

# TRATAMIENTO Y TRANSMISIÓN DE SEÑALES

INGENIEROS ELECTRÓNICOS

## SOLUCIÓN CUESTIONES DEL EXAMEN JUNIO 2003

1. Si  $g(t)$  es una señal de energía, su autocorrelación viene dada por:

$$\begin{aligned}R_g(\tau) &= \langle g(t), g(t - \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t - \tau)dt \\ &= \langle g(t + \tau), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t + \tau)g^*(t)dt\end{aligned}$$

Propiedades:

- a) Simetría conjugada:

$$R_g(\tau) = R_g^*(-\tau)$$

- b) En el origen es la energía:

$$R = R_g(0) = \langle g(t), g(t) \rangle = \|g(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$$

- c) En el origen toma el valor máximo:

$$|R_g(\tau)| \leq R_g(0) \quad \forall \tau$$

- d) La transformada de Fourier es la densidad espectral:

$$R_g(\tau) \iff \Psi_g(f)$$

Si  $G(f)$  es la transformada de Fourier de la señal, la densidad espectral de potencia viene dada por:

$$\Psi_g(f) = |G(f)|^2$$

Propiedades:

a)  $\Psi_g(f) \geq 0 \quad \forall f.$

b) La transformada de inversa de Fourier es la función de autocorrelación:

$$R_g(\tau) \iff \Psi_g(f)$$

c) El área debajo de la densidad espectral es la energía:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(f) df$$

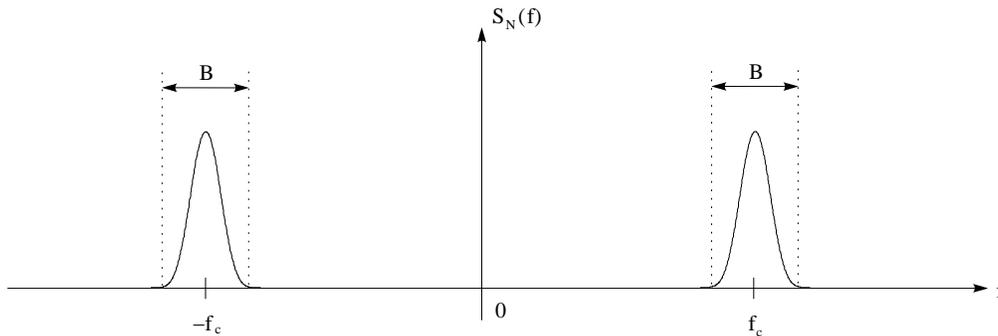
El teorema de energía de Rayleigh es:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$$

2. El ruido de banda estrecha es un ruido para el que su frecuencia central  $f_c$  es mucho mayor que su ancho de banda  $B$ :

$$f_c \gg B$$

Su densidad espectral de potencia  $S_N(f)$  viene dada gráficamente por:



Se suele modelar como un ruido blanco seguido de un filtro paso banda de banda estrecha:

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2$$

Si  $n_c(t)$  es la componente en fase del ruido de banda estrecha y  $n_s(t)$  la componente en cuadratura, la forma canónica del ruido de banda estrecha  $n(t)$  es:

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Propiedades:

- a) Si  $n(t)$  tiene media cero, entonces  $n_c(t)$  y  $n_s(t)$  también tienen media cero.
- b) Si  $n(t)$  es Gaussiano, entonces  $n_c(t)$  y  $n_s(t)$  son Gaussianos y conjuntamente Gaussianos.
- c) Si  $n(t)$  es WSS con media cero, entonces  $n_c(t)$  y  $n_s(t)$  son WSS y JWSS.
- d)

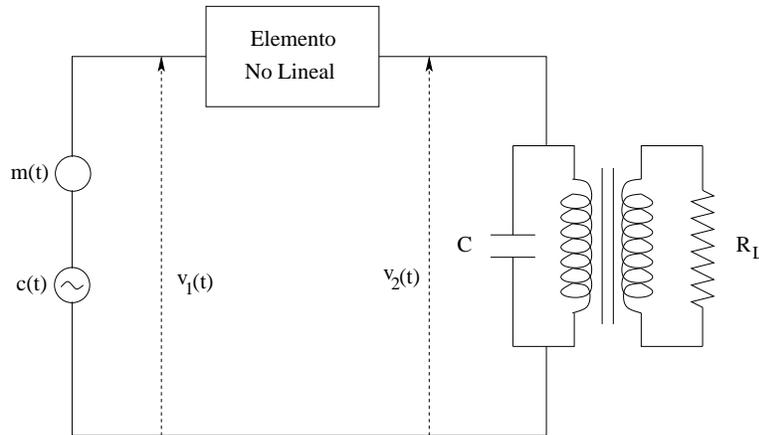
$$S_{N_C}(f) = S_{N_S}(f) = \begin{cases} S_N(f - f_c) + S_N(f + f_c) & |f| < B \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- e) Si  $n(t)$  tiene media cero, entonces  $n_c(t)$  y  $n_s(t)$  tienen ambos la misma varianza que coincide con la varianza de  $n(t)$ .
- f)

$$S_{N_C N_S}(f) = -S_{N_S N_C}(f) = \begin{cases} j[S_N(f + f_c) - S_N(f - f_c)] & |f| < B \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- g) Si  $n(t)$  es Gaussiano con media cero y densidad espectral de potencia  $S_N(f)$  localmente simétrica con respecto a  $\pm f_c$ , entonces  $n_c(t)$  y  $n_s(t)$  son estadísticamente independientes.

3. Suponiendo que  $m(t)$  es la señal moduladora con ancho de banda  $W$  y  $c(t)$  la portadora, el modulador de AM en cuadratura se puede ver en la siguiente figura:



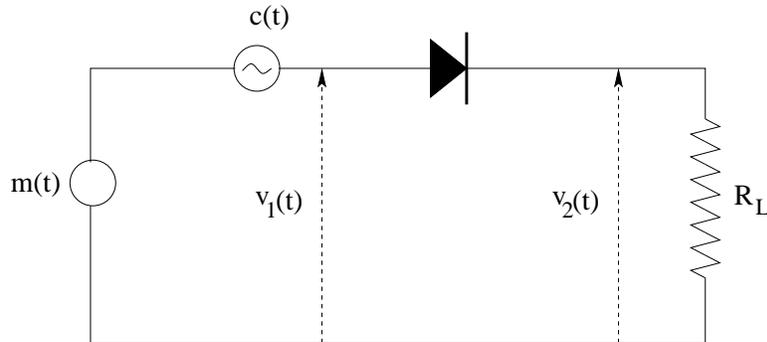
Se tiene que:

$$v_1(t) = m(t) + c(t)$$

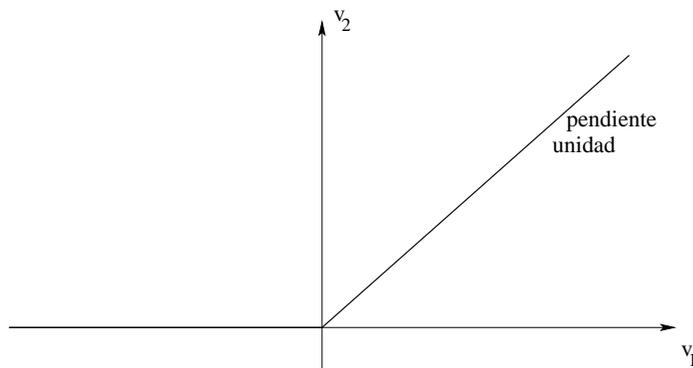
$$v_2(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_1^2(t)$$

Se puede obtener la señal AM a partir de la señal  $v_2(t)$  mediante el filtro paso banda de la figura con frecuencia central la de la portadora  $f_c$  y ancho de banda  $2W$ . Se tiene que cumplir que  $f_c > 3W$ .

El modulador de AM por conmutación se puede ver en la siguiente figura:



La característica entrada salida del diodo se supone ideal según la siguiente figura:



Se tiene que:

$$v_1(t) = m(t) + c(t)$$

Además suponiendo que  $|m(t)| \ll A_c$ , siendo  $A_c$  la amplitud de la portadora, entonces:

$$v_2(t) \approx \begin{cases} v_1(t) & c(t) \geq 0 \\ 0 & c(t) < 0 \end{cases}$$

El diodo conmuta  $v_1(t)$  cuando la portadora  $c(t)$  es positiva y tiene salida cero cuando la portadora es negativa. Se puede obtener la señal AM a partir de la señal  $v_2(t)$  usando un filtro paso banda (no mostrado en la figura anterior) con frecuencia central la de la portadora  $f_c$  y ancho de banda  $2W$ . En este caso, se tiene que cumplir que  $f_c > 2W$ .

4. Una señal FM es de banda estrecha cuando su índice de modulación  $\beta$  es menor que 0,3 radianes. Si  $A_c$  es la amplitud de la portadora,  $f_c$  la frecuencia de la portadora y  $f_m$  la frecuencia de la moduladora sinusoidal, entonces la señal FM viene dada por:

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)] \\ = A_c \cos(2\pi f_c t) \cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] - A_c \sin(2\pi f_c t) \sin[\beta \sin(2\pi f_m t)]$$

Para  $\beta < 0,3$  radianes se pueden utilizar las siguientes aproximaciones:

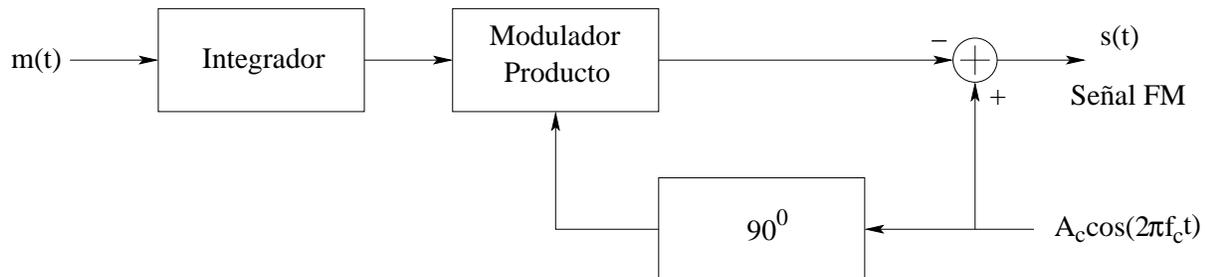
$$\cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] \approx 1$$

$$\sin[\beta \sin(2\pi f_m t)] \approx \beta \sin(2\pi f_m t)$$

por lo que la señal modulada de banda estrecha es:

$$s(t) \approx A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \beta \sin(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_m t)$$

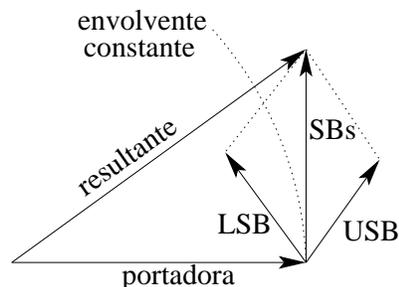
En la siguiente figura se puede ver el diagrama de bloques para el modulador de FM de banda estrecha:



Multiplicando los senos en la ecuación anterior se obtiene:

$$s(t) \approx A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c \beta}{2} \{ \cos[2\pi(f_c + f_m)t] - \cos[2\pi(f_c - f_m)t] \}$$

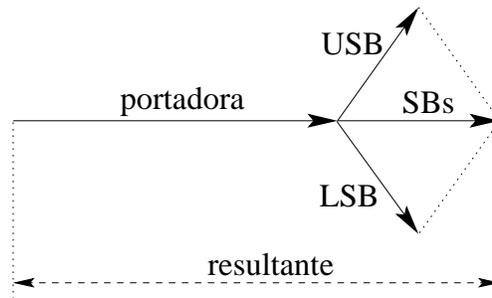
El diagrama fasorial para FM de banda estrecha siguiente la ecuación anterior viene dado por la siguiente figura:



La composición de las bandas laterales siempre está en cuadratura con la portadora, la resultante no está en fase con la portadora y la envolvente se mantiene prácticamente constante. La expresión de una señal AM con moduladora sinusoidal, siendo  $\mu$  el índice de modulación AM, viene dada por:

$$s_{AM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c \mu}{2} \{ \cos[2\pi(f_c + f_m)t] + \cos[2\pi(f_c - f_m)t] \}$$

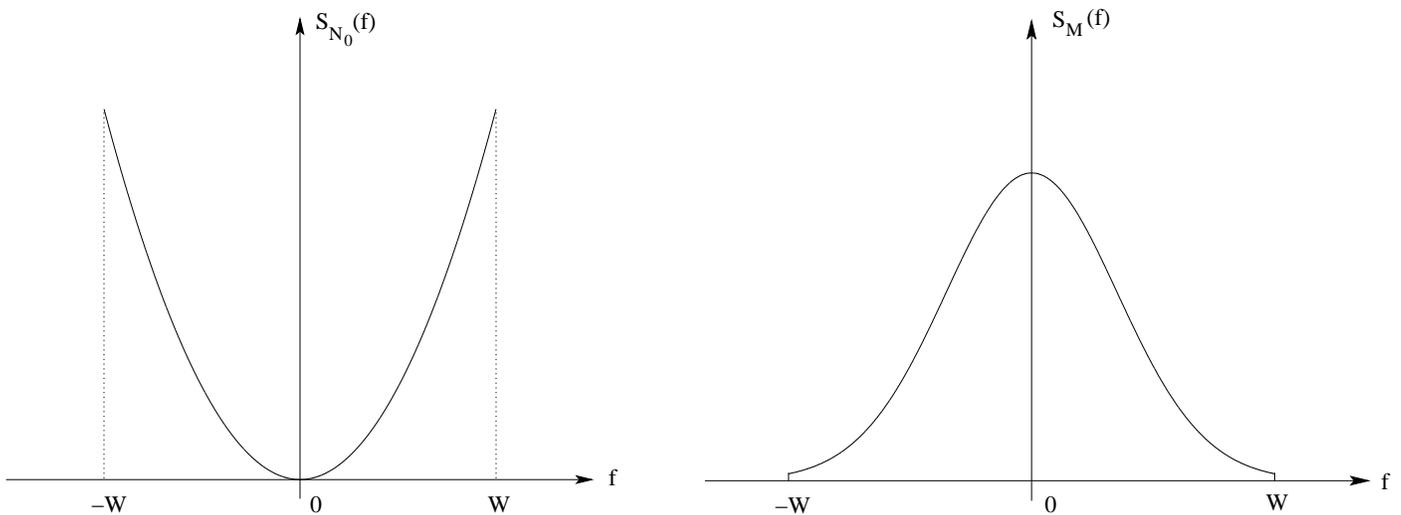
La expresión es muy similar pero hay un cambio de signo en la banda lateral inferior. El diagrama fasorial para AM siguiendo la ecuación anterior viene dado por la siguiente figura:



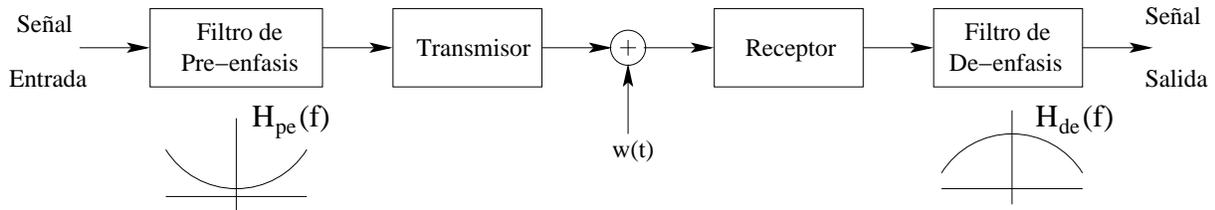
Ahora, la composición de las bandas laterales siempre está en fase con la portadora, la resultante está en fase con la portadora y la envolvente varía según la señal de información.

- Las redes de pre-énfasis y de-énfasis sirven para reducir considerablemente el efecto del ruido en FM o, lo que es lo mismo, aumentar la SNR a la salida del receptor.

El empleo de estas redes se puede justificar comparando la densidad espectral del ruido a la salida del receptor de FM con la densidad espectral de potencia típica de la señal moduladora según la figura siguiente:



La SNR está desigualmente repartida en frecuencia. Para que la SNR sea más uniforme en frecuencia es necesario dar ganancia a las altas frecuencias de la señal moduladora y atenuar las bajas frecuencias antes del transmisor e invertir el proceso a la salida del receptor, atenuando entonces las altas frecuencias del ruido y dejando la señal moduladora sin modificar extremo a extremo. El esquema de un sistema FM que emplea este tipo de redes se puede ver en la siguiente figura:



Las funciones de transferencia deben ser inversas en el ancho de banda  $W$  de la señal moduladora según:

$$H_{de}(f) = \frac{1}{H_{pe}(f)}$$

La potencia de ruido con redes es:

$$P_{N_e} = \frac{N_0}{A_c^2} \int_{-W}^W f^2 |H_{de}(f)|^2 df$$

y sin redes:

$$P_{N_0} = \frac{N_0}{A_c^2} \int_{-W}^W f^2 df$$

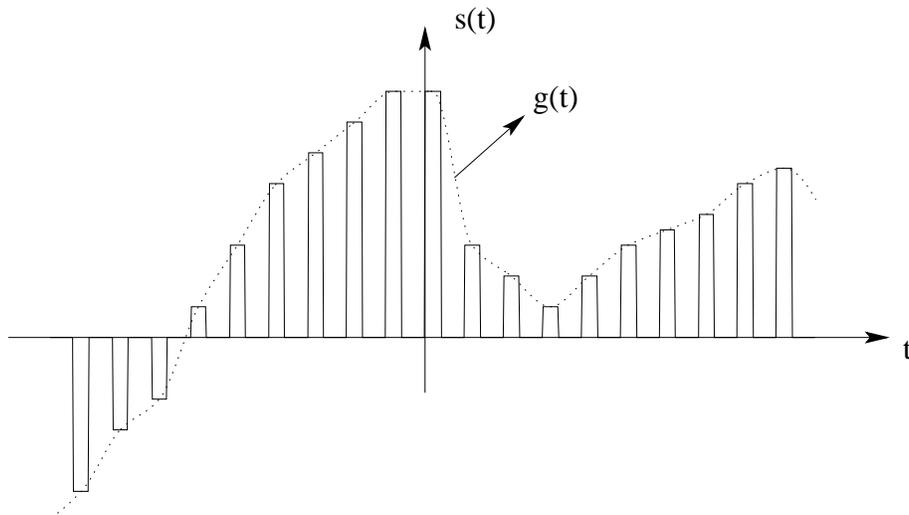
por lo que el factor de ganancia viene dado por:

$$D = \frac{P_{N_0}}{P_{N_e}} = \frac{2W^3}{3 \int_{-W}^W f^2 |H_{de}(f)|^2 df}$$

Un valor típico para este factor es  $D = 22$  (13 dB).

6. El enunciado del teorema de Nyquist es el siguiente: cualquier señal limitada en frecuencia a  $W$  se puede recuperar de forma exacta a partir de sus muestras siempre que estas se tomen a una tasa  $f_s$  igual o superior a  $2W$ .

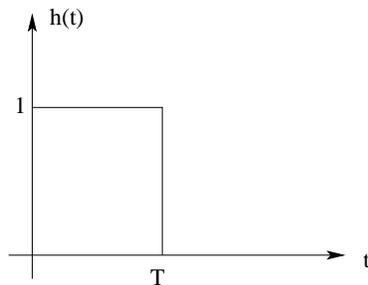
En la siguiente figura se puede ver un ejemplo de una señal muestreada empleando muestras Flat-Top:



Su expresión viene dada por:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)h(t - nT_s)$$

siendo  $T_s$  el periodo de muestreo,  $g(t)$  la señal a muestrear y  $h(t)$  la forma de las muestras Flat-Top según la siguiente figura:



La señal muestreada  $s(t)$  se puede poner como la convolución:

$$s(t) = g_\delta(t) * h(t)$$

siendo  $g_\delta(t)$  la señal muestreada empleando muestreo ideal dada por:

$$g_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

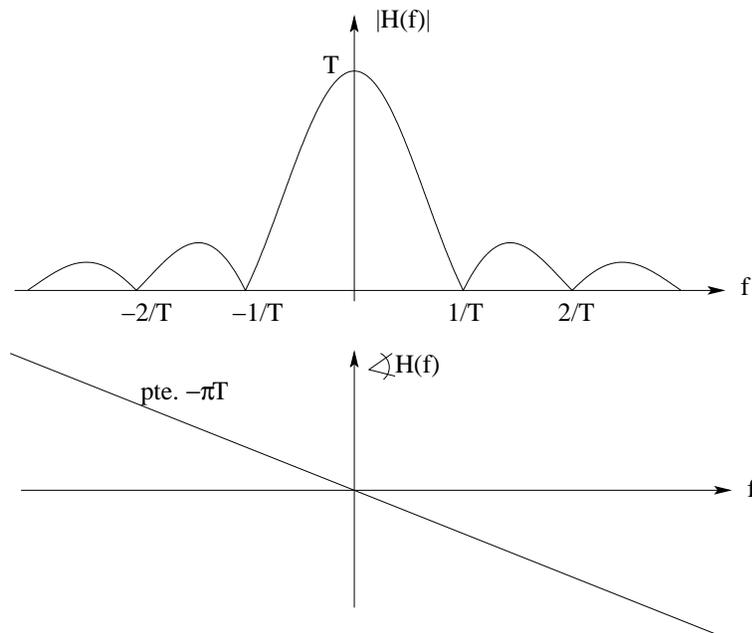
La transformada de Fourier  $S(f)$  de la señal muestreada con muestras Flat-Top viene dada entonces:

$$S(f) = G_{\delta}(f)H(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f - nf_s)H(f)$$

siendo  $f_s$  la tasa de muestreo,  $G_{\delta}(f)$  la transformada de Fourier de la señal muestreada ideal  $g_{\delta}(t)$ ,  $H(f)$  la transformada de  $h(t)$  y  $G(f)$  la transformada de  $g(t)$ . La transformada  $H(f)$  viene dada por:

$$H(f) = T \text{sinc}(fT) \exp(-j\pi fT)$$

cuyo módulo y fase se pueden ver en la siguiente figura (en la fase no se han representado los saltos de fase debido al cambio de signo de la función sinc):



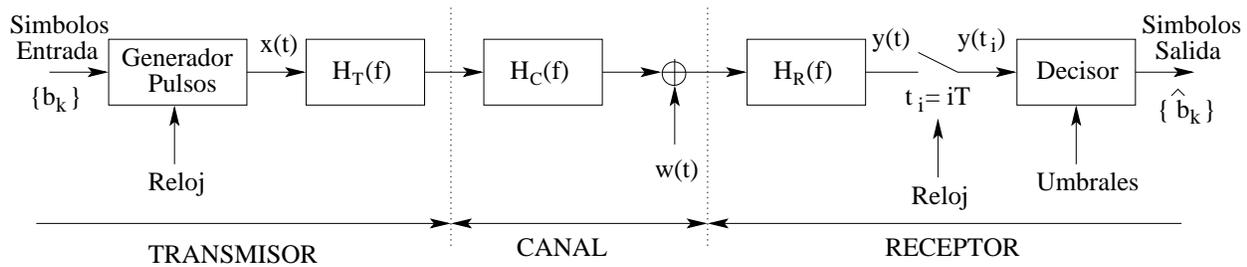
Ahora se puede poner:

$$S(f) = \frac{T}{T_s} \text{sinc}(fT) \exp(-j\pi fT) \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f - nf_s)$$

La fase es lineal y representa un retardo de la señal de  $T/2$  por lo que no implica distorsión. Sin embargo si que tenemos distorsión de amplitud que será despreciable sólo cuando  $T \ll T_s$ . Esta distorsión se denomina efecto apertura. Para corregir esta distorsión el filtro de reconstrucción debe invertir la respuesta en amplitud de  $H(f)$  según:

$$H_{rec}(f) = \begin{cases} \frac{1}{|H(f)|} = \frac{\pi f}{\sin(\pi fT)} & |f| \leq W \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases}$$

7. En la siguiente figura podemos ver el diagrama de bloques del transmisor digital banda base basado en la modulación PAM:



$\{b_k\}$  son los símbolos de entrada, cada uno de ellos perteneciente a un alfabeto de  $M$  símbolos. Se transmiten símbolos a una tasa  $R$  cuyo inverso  $T$  representa la duración de cada símbolo.

Cada símbolo  $b_k$  se representa con un pulso  $g(t)$  con diferente amplitud  $a_k$  dependiendo del símbolo transmitido, por lo que:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t - kT)$$

Además los pulsos  $g(t)$  vienen normalizados de forma que  $g(0) = 1$ .

$H_C(f)$  es la función de transferencia del canal que va a dar lugar a distorsión de amplitud y de fase.  $H_T(f)$  y  $H_R(f)$  son los filtros de transmisión y recepción diseñados para minimizar el efecto de la ISI y para minimizar la probabilidad de error. Además el canal añade ruido AWG  $w(t)$  con media cero.

La señal recibida es:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k p(t - kT) + n(t)$$

siendo  $p(t)$  la forma del pulso recibido a la salida del filtro de recepción. Este pulso está normalizado según  $p(0) = 1$  y tiene forma de sinc o de coseno alzado para eliminar la ISI. La amplitud recibida  $A_k$  es proporcional a la transmitida según  $A_k = K a_k$ . Además se cumple que:

$$KP(f) = G(f)H_T(f)H_C(f)H_R(f)$$

siendo  $G(f)$  y  $P(f)$  las transformadas de Fourier de los pulsos transmitido  $g(t)$  y recibido  $p(t)$ , respectivamente. Si no tenemos ISI tras muestrear en  $t_i = iT$  a la entrada del decisor tendremos:

$$y(t_i) = A_i + n(t_i)$$

El decisor compara este valor  $y(t_i)$  con unos umbrales y decide cual fue el símbolo transmitido dando lugar a la estimación de los símbolos recibidos  $\{\hat{b}_k\}$ . Los umbrales y las amplitudes  $A_k$  se deben elegir de forma que se minimice la probabilidad de error.

8. Si  $\phi(t)$ , definido en  $0 \leq t \leq T$ , es la señal a la que se adapta el filtro entonces la respuesta al impulso del filtro adaptado viene dada por:

$$h(t) = K\phi(T - t)$$

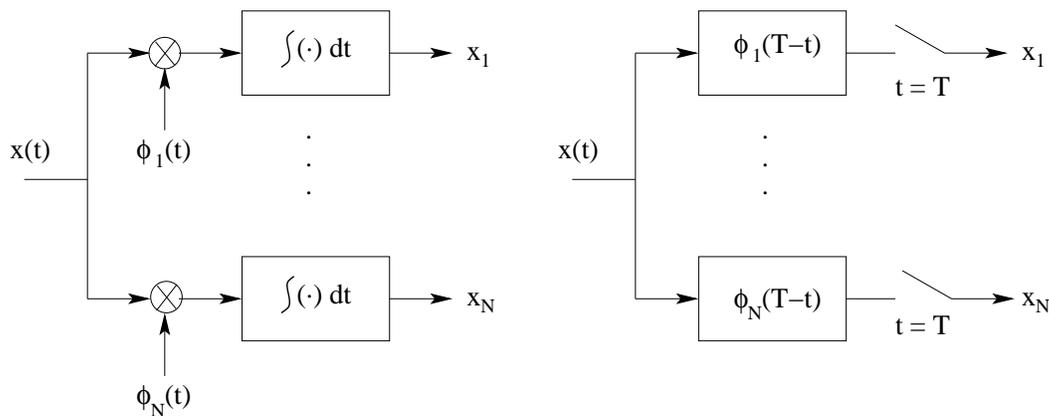
siendo  $K$  una constante arbitraria, en particular se puede elegir  $K = 1$ . Si  $\Phi(f)$  es la transformada de Fourier de  $\phi(t)$  la función de transferencia del filtro adaptado es:

$$H(f) = K\Phi^*(f) \exp(-j2\pi fT)$$

Propiedades (para  $K = 1$ ):

- Si la señal a la entrada es la señal a adaptar  $\phi(t)$ , la salida es  $R_\phi(t - T)$ , siendo  $R_\phi(\tau)$  la función de autocorrelación de  $\phi(t)$ .
- En el dominio de la frecuencia, si  $\Phi(f)$  es la entrada, la salida es  $\Psi_\phi(f) \exp(-j2\pi fT)$  siendo  $\Psi_\phi(f)$  la densidad espectral de energía de  $\phi(t)$ .
- La SNR máxima de pico (para cuando la señal a la entrada es  $\phi(t)$  y para  $t = T$ ) a la salida es  $2E/N_0$  siendo  $E$  la energía de la señal  $\phi(t)$  y  $N_0$  la densidad espectral del ruido AWG a la entrada con media cero.
- La adaptación se hace en dos fases:
  - Adaptación espectral de fase, dando lugar a un pico de señal para  $t = T$ .
  - Adaptación espectral de amplitud, dando lugar a la SNR máxima a la salida en  $t = T$ .

En la siguiente figura se puede ver el esquema general de la etapa de detección del receptor (la primer etapa) usando correladores (a la izquierda) y filtros adaptados (a la derecha):



$x(t)$  es la señal recibida,  $\phi_j(t)$  con  $j = 1, \dots, N$  es la base ortonormal de funciones del espacio de señal y  $\mathbf{x}$  es el vector de señal recibida (vector observación). Cada  $x_j$  es la proyección de la señal recibida  $x(t)$  en el elemento de la base  $\phi_j(t)$ . La proyección de la señal recibida  $x(t)$  en el espacio de señal, da lugar al vector  $\mathbf{x}$ .

Ambos esquemas son totalmente equivalentes, pero el esquema con filtros adaptados es más fácil de implementar.