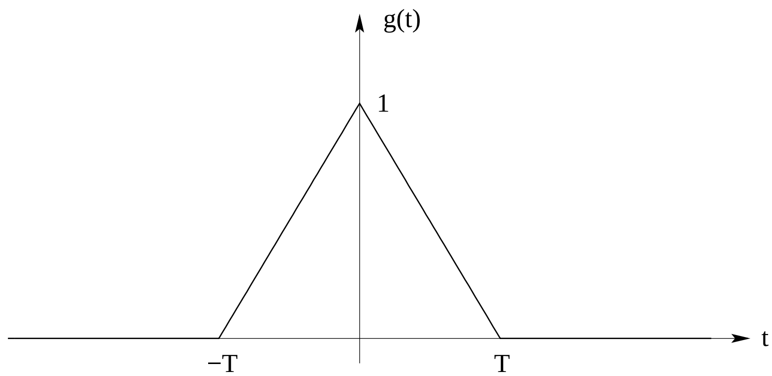
# TRATAMIENTO Y TRANSMISIÓN DE SEÑALES

## INGENIEROS ELECTRÓNICOS

### SOLUCIÓN PROBLEMAS DEL EXAMEN JUNIO 2003

1.

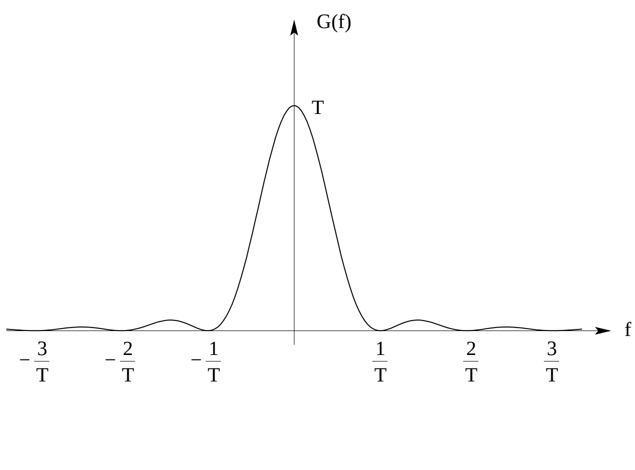
a.1) En la siguiente figura se puede ver la señal $g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$:




a.2) La transformada $G(f)$ es inmediata y vale:

$$G(f) = T\text{sinc}^2(fT)$$

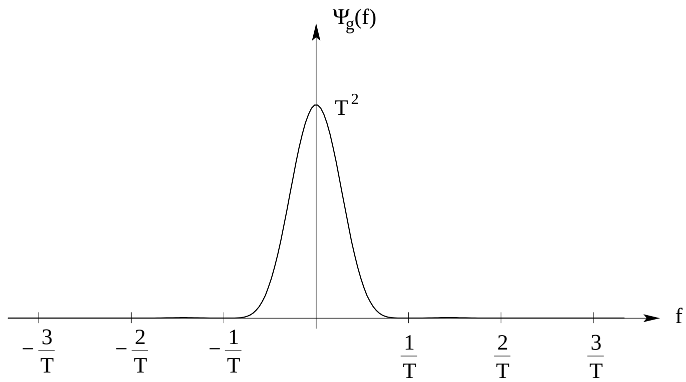
En la siguiente figura se puede ver dicha transformada:



a.3) La densidad espectral de energía viene dada por:

$$\Psi_g(f) = |G(f)|^2 = T^2 \text{sinc}^4(fT)$$

En la siguiente figura se puede ver esta densidad espectral de energía:




b.1) La señal $x(t) = g(t)\cos(2\pi f_c t)$ es esencialmente de banda estrecha por lo que está limitada en banda. En ese caso su transformada de Hilbert es inmediata y viene dada por:

$$\hat{x}(t) = g(t)\sin(2\pi f_c t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\sin(2\pi f_c t)$$

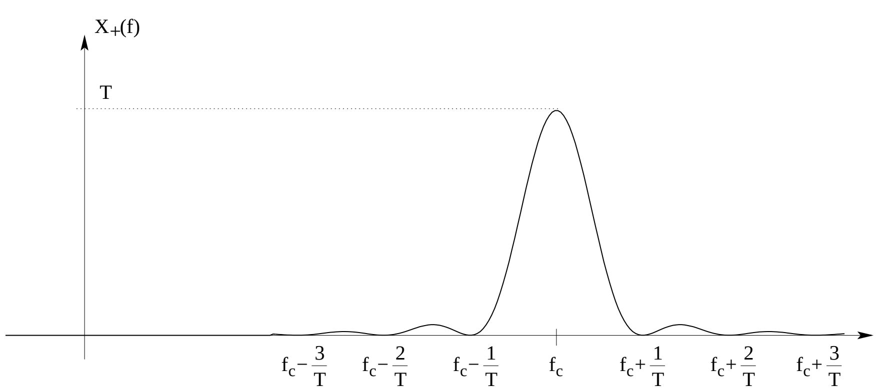
b.2) La señal analítica positiva viene dada por:

$$x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = g(t)\cos(2\pi f_c t) + jg(t)\sin(2\pi f_c t)$$
$$= g(t)[\cos(2\pi f_c t) + j\sin(2\pi f_c t)] = g(t)\exp(j2\pi f_c t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\exp(j2\pi f_c t)$$

La transformada $X_+(f)$ se puede determinar fácilmente usando la propiedad de desplazamiento frecuencial:

$$X_+(f) = G(f - f_c) = T\text{sinc}^2[(f - f_c)T]$$

En la siguiente figura se puede ver este espectro:



b.3) La envolvente compleja viene dada por:

$$\tilde{x}(t) = x_+(t)\exp(-j2\pi f_c t) = g(t)\exp(j2\pi f_c t)\exp(-j2\pi f_c t) = g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

La transformada es entonces:

$$\tilde{X}(f) = G(f) = T\mathrm{sinc}^2(fT)$$

Esta transformada se puede ver gráficamente en el apartado a.2).

b.4) La envolvente compleja se puede poner como:

$$\hat{x}(t) = x_c(t) + jx_s(t)$$

por lo que las componentes en fase y cuadratura son:

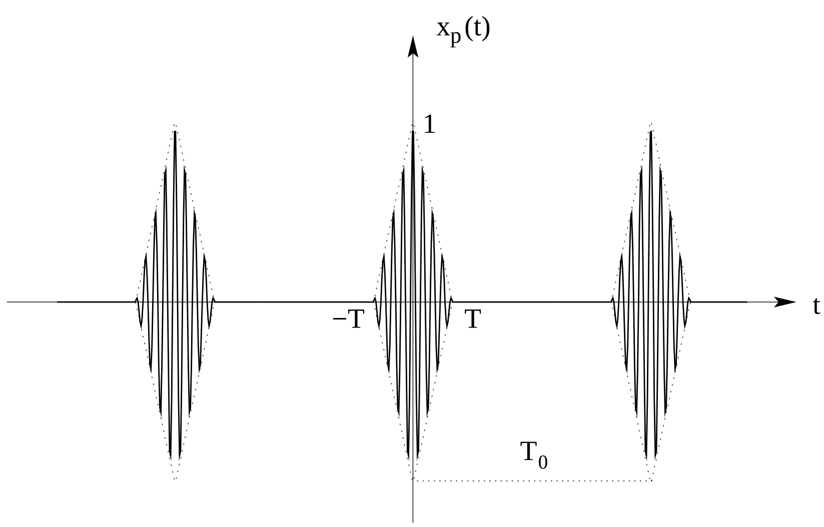
$$x_c(t) = g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$
$$x_s(t) = 0$$

Sus transformadas son:

$$X_c(f) = G(f) = T\mathrm{sinc}^2(fT)$$
$$X_s(f) = 0$$

La transformada de la componente en fase se puede ver gráficamente en el apartado a.2).

c.1) En la siguiente figura se puede ver gráficamente la señal $x_p(t)$:



c.2) La señal $x_p(t)$ es periódica con periodo $T_0$ y frecuencia fundamental $f_0 = 1/T_0$. Los coeficientes de su serie compleja de Fourier viene dados por:

$$c_n = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right) = f_0 X(n f_0)$$

siendo $X(f)$ la transformada de Fourier de la señal generadora $x(t)$ de la señal $x_p(t)$. La señal $x(t) = g(t)\cos(2\pi f_c t)$ tiene como transformada:

$$X(f) = \frac{T}{2}\text{sinc}^2[(f - f_c)T] + \frac{T}{2}\text{sinc}^2[(f + f_c)T]$$

Por lo que los coeficientes de la serie compleja de Fourier de $x_p(t)$ son:

$$c_n = \frac{T f_0}{2}\text{sinc}^2[(n f_0 - f_c)T] + \frac{T f_0}{2}\text{sinc}^2[(n f_0 + f_c)T]$$

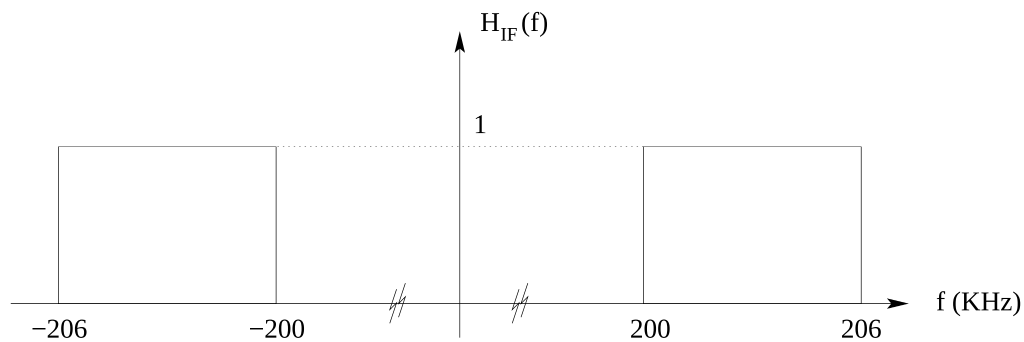
Finalmente la densidad espectral de potencia viene dada por:

$$S_{x_p}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(f - n f_0)$$

$$= \frac{T^2 f_0^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{\text{sinc}^2[(n f_0 - f_c)T] + \text{sinc}^2[(n f_0 + f_c)T]\}^2 \delta(f - n f_0)$$

2.

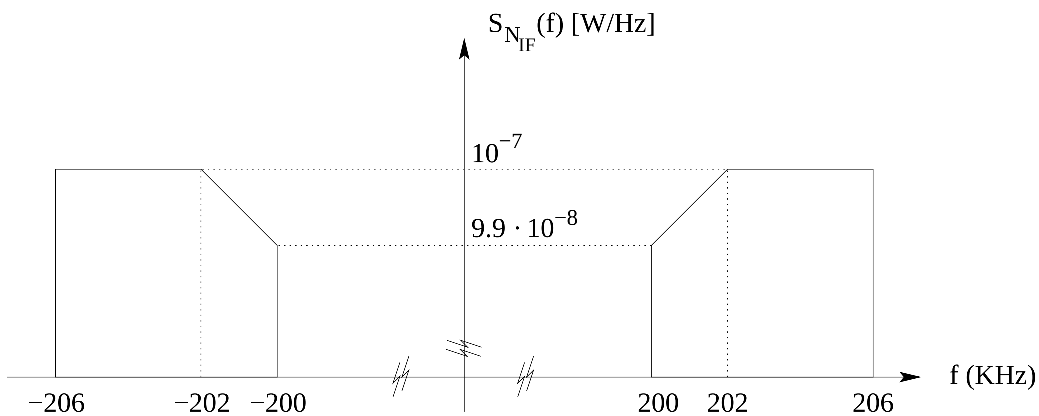
*a)* El filtro IF equivalente ideal viene dada por la siguiente figura:




La densidad espectral de ruido a la salida de este filtro viene dada por:

$$S_{N_{IF}}(f) = S_N(f)|H_{IF}(f)|^2$$

En la siguiente figura se puede ver gráficamente:




*b)* Si la señal portadora generada localmente en el receptor es $\cos(2\pi f_c t)$, siendo $f_c = 200$ KHz la frecuencia de la portadora, la señal a la salida del receptor viene dada por:

$$y(t) = \frac{1}{4}A_c m(t) + \frac{1}{2}n_c(t)\cos(\pi W t) - \frac{1}{2}n_s(t)\sin(\pi W t)$$

siendo $A_c$ la amplitud de la portadora utilizada en el transmisor, $m(t)$ la señal moduladora, $W = 6$ KHz el ancho de banda de la señal moduladora y $n_c(t)$ y $n_s(t)$ las componente en fase y cuadratura del ruido a la salida del filtro IF equivalente. El primer término de la señal $y(t)$ corresponde a la componente de señal a la salida que depende de la amplitud de la portadora $A_c$ utilizada en el transmisor y de la señal moduladora $m(t)$. El segundo y tercer término de la señal $y(t)$ corresponde a la componente de ruido a la salida que depende de las componentes en fase $n_c(t)$ y cuadratura $n_s(t)$ del ruido a la salida del filtro IF equivalente y del ancho de banda $W$ de la señal moduladora.

*c*) La potencia de la componente de señal a la salida del receptor viene dada por:

$$P_{S_O} = \frac{A_c^2 P}{16}$$

siendo $P$ la potencia de la señal moduladora $m(t)$. La potencia de la componente de señal a la entrada del receptor viene dada por:

$$P_{S_I} = \frac{A_c^2 P}{4}$$

por lo que:

$$P_{S_O} = \frac{P_{S_I}}{4}$$

Tomando logaritmos:

$$10 \log_{10} P_{S_O} = 10 \log_{10} P_{S_I} - 10 \log_{10} 4$$

Entonces:

$$P_{S_O}(\text{dBm}) = P_{S_I}(\text{dBm}) - 10 \log_{10} 4 = 45 \text{ dBm} - 6 \text{ dB} = 39 \text{ dBm}$$

*d*) Como la densidad espectral de potencia del ruido a la salida del filtro IF equivalente no es simétrica con respecto a la frecuencia central $\pm(f_c + W/2)$, las componente en fase $n_c(t)$ y cuadratura $n_s(t)$ no son independientes por lo que no se cumple la propiedad de superposición de potencias ni de densidades espectrales de potencia.

La componente de ruido a la salida del receptor es:

$$n_0(t) = \frac{1}{2} n_c(t) \cos(\pi W t) - \frac{1}{2} n_s(t) \sin(\pi W t)$$

Vamos a determinar en primer lugar la función de autocorrelación de este ruido para posteriormente determinar su densidad espectral de potencia tomando transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}
R_{N_0}(\tau) = E\{n_0(t) n_0(t-\tau)\} &= \frac{1}{4} E\{[n_c(t)\cos(\pi W t) - n_s(t)\sin(\pi W t)] \\
&\cdot [n_c(t-\tau)\cos[\pi W(t-\tau)] - n_s(t-\tau)\sin[\pi W(t-\tau)]]\} \\
&= \frac{1}{4} R_{N_c}(\tau)\{\cos(\pi W t)\cos[\pi W(t-\tau)] + \sin(\pi W t)\sin[\pi W(t-\tau)]\} \\
&+ \frac{1}{4} R_{N_c N_s}(\tau)\{\sin(\pi W t)\cos[\pi W(t-\tau)] - \cos(\pi W t)\sin[\pi W(t-\tau)]\} \\
&= \frac{1}{4} R_{N_c}(\tau)\cos(\pi W \tau) + \frac{1}{4} R_{N_c N_s}(\tau)\sin(\pi W \tau)
\end{aligned}$$

siendo $R_{N_c}(\tau)$ la autocorrelación de la componente en fase y $R_{N_cN_s}(\tau)$ la correlación cruzada de la componente en fase y la componente en cuadratura. Además se ha utilizado la igualdad $R_{N_c}(\tau) = R_{N_s}(\tau)$, siendo $R_{N_s}(\tau)$ la autocorrelación de la componente en cuadratura, y $R_{N_cN_s}(\tau) = -R_{N_sN_c}(\tau)$ siendo $R_{N_sN_c}(\tau)$ la correlación cruzada de la componente en cuadratura y la componente en fase.

Tomando transformadas de Fourier la densidad espectral de potencia de la componente de ruido a la salida del receptor vale:

$$S_{N_0}(f) = \underbrace{\frac{1}{8}\left[S_{N_c}\left(f - \frac{W}{2}\right) + S_{N_c}\left(f + \frac{W}{2}\right)\right]}_{S_{N_{0_1}}(f)} + \underbrace{\frac{1}{8j}\left[S_{N_cN_s}\left(f - \frac{W}{2}\right) - S_{N_cN_s}\left(f + \frac{W}{2}\right)\right]}_{S_{N_{0_2}}(f)}$$

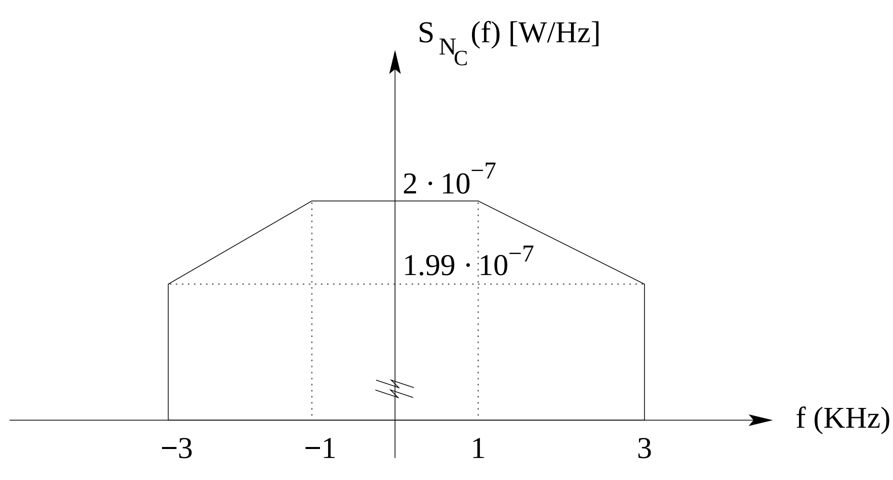
La expresión de la densidad espectral de potencia de la componente en fase viene dada por:

$$S_{N_C}(f) = \begin{cases} S_{N_{IF}}\left(f - f_c - \frac{W}{2}\right) + S_{N_{IF}}\left(f + f_c + \frac{W}{2}\right) & |f| < \frac{W}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

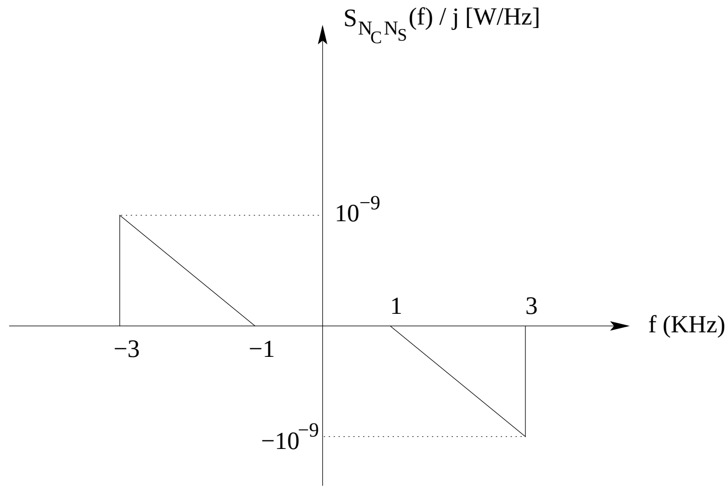
y la expresión de la densidad espectral de potencia cruzada:

$$S_{N_CN_S}(f) = \begin{cases} j[S_{N_{IF}}\left(f + f_c + \frac{W}{2}\right) - S_{N_{IF}}\left(f - f_c - \frac{W}{2}\right)] & |f| < \frac{W}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

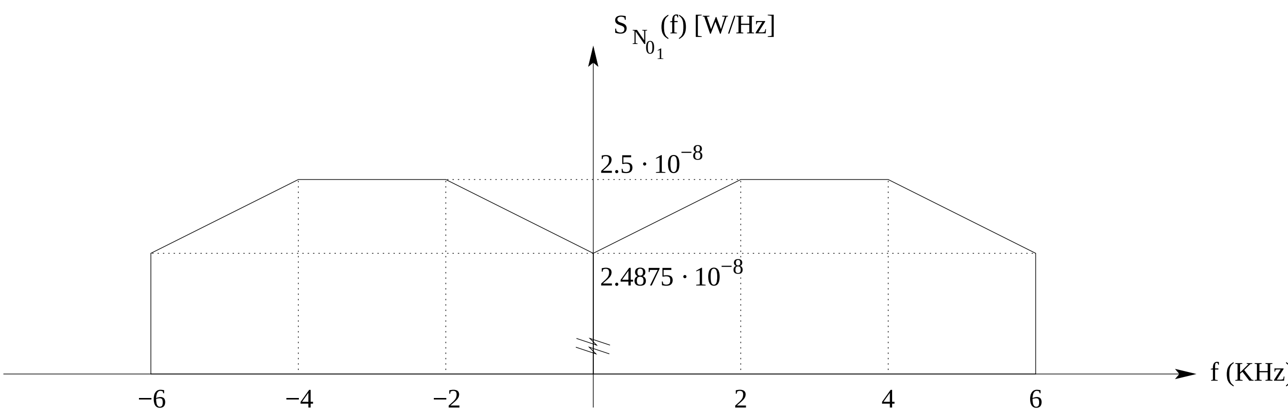
La determinación de las distintas densidades espectrales se puede hacer de forma sencilla gráficamente. En la siguiente figura podemos ver la densidad espectral de potencia de la componente en fase:



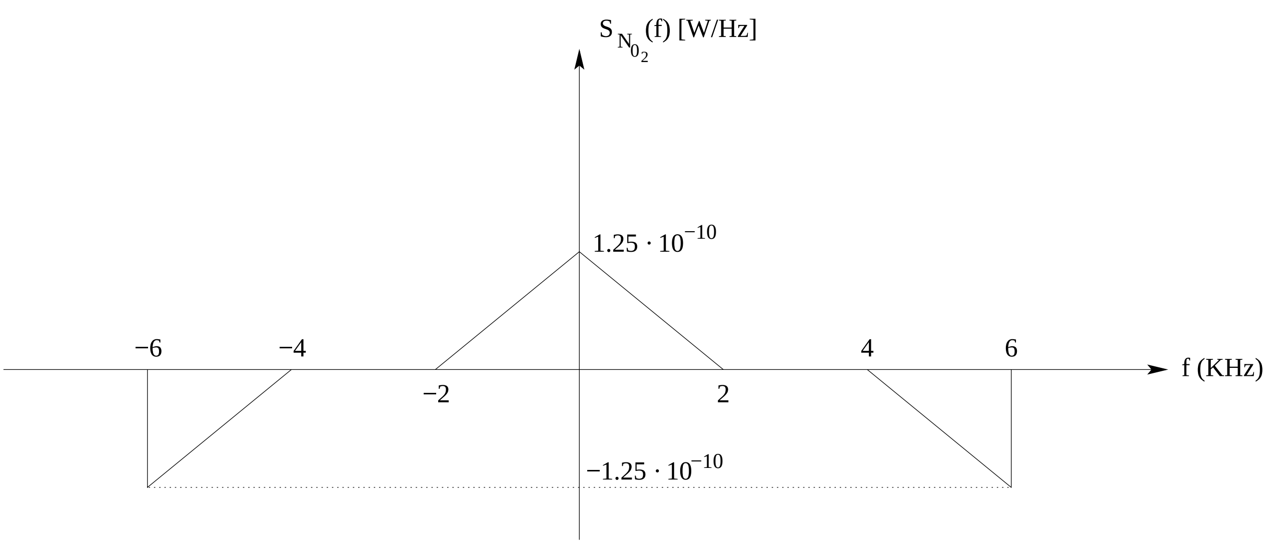
En la siguiente figura podemos ver la densidad espectral de potencia cruzada:



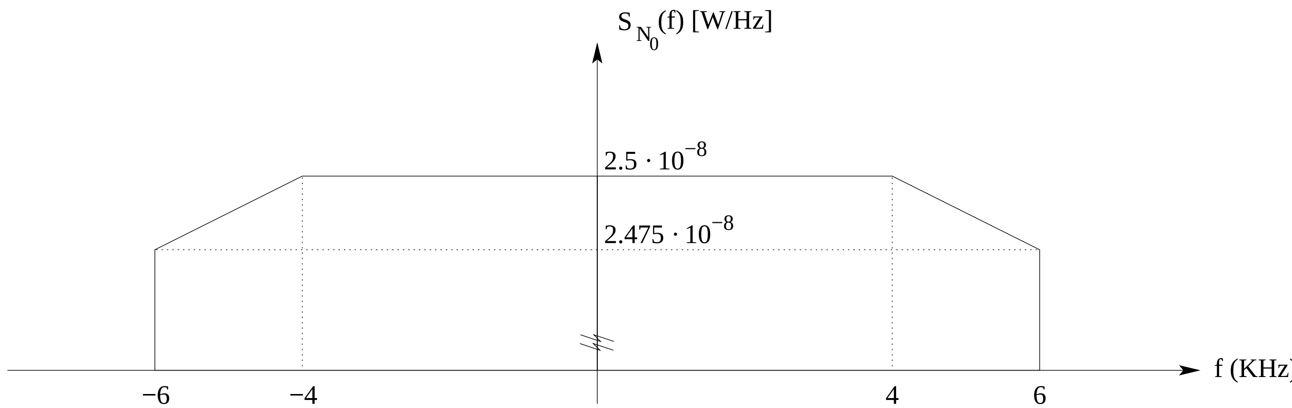

En la siguiente figura podemos ver la densidad espectral de potencia $S_{N_{0_1}}(f)$:




En la siguiente figura podemos ver la densidad espectral de potencia $S_{N_{0_2}}(f)$:



Finalmente en la siguiente figura podemos ver la densidad espectral de potencia de la componente de ruido a la salida:




*e*) La potencia de ruido a la salida, corresponde al área debajo de la densidad espectral de potencia de la última figura:

$$P_{N_0} = \int_{-W}^{W} S_{N_0}(f)df = 12 \cdot 10^3 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-8} - 2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-10}$$
$$= 3 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-7} = 0{,}2995 \text{ mW}$$

Pasando los mW a dBm se obtiene una potencia de ruido a la salida de $-5{,}236$ dBm.

*f*) La SNR utilizando unidades logarítmicas viene dada por:

$$SNR(\text{dB}) = P_{S_O}(\text{dBm}) - P_{N_O}(\text{dBm})$$
$$= 39 \text{ dBm} - (-5{,}236 \text{ dBm}) = 44{,}215 \text{ dB}$$

3.

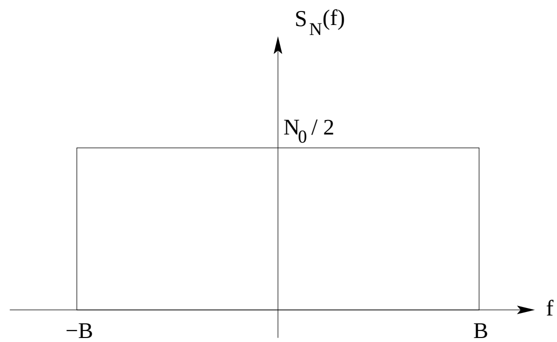
*a*) Para el pulso con forma de sinc el ancho de banda viene dada por:

$$B_T = \frac{1}{2T} = \frac{R}{2}$$

Para el pulso con espectro en coseno alzado con $\rho = 1$ el ancho de banda es:

$$B = 2B_T = R$$

*b*) La densidad espectral de potencia a la salida del filtro paso bajo viene dada gráficamente por:




Por lo que la varianza o potencia del ruido a la salida del filtro es:

$$\sigma^2 = 2B \cdot \frac{N_0}{2} = BN_0 = RN_0$$

*c*) La potencia de pico del símbolo 0 es:

$$Pot_0 = (-10A)^2 = 100A^2$$

la potencia de pico del símbolo 1 es:

$$Pot_1 = (8A)^2 = 64A^2$$

y la potencia de pico del símbolo 2 es:

$$Pot_2 = (10A)^2 = 100A^2$$

Puesto que los símbolos son equiprobables se tiene que la potencia de pico media es:

$$\begin{aligned} Pot &= Prob(0)Pot_0 + Prob(1)Pot_1 + Prob(2)Pot_2 \\ &= \frac{1}{3}[100A^2 + 64A^2 + 100A^2] = \frac{264A^2}{3} = 88A^2 \end{aligned}$$

*d*) Si se transmite el símbolo 0, la variable $X$ a la entrada del decisor es:

$$X = -10A + N$$

siendo $N$ una muestra del ruido a la salida del filtro paso bajo. La variable $X$ es Gaussiana con media $-10A$ y varianza $RN_0$ por lo que su función densidad de probabilidad es:

$$f_{X/0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi RN_0}} \exp\left(-\frac{(x+10A)^2}{2RN_0}\right)$$

En este caso se comete error siempre que $X > -A$ por lo que la probabilidad de error viene dada por:

$$P_{e_0} = Prob(X > -A/0) = \int_{-A}^{\infty} f_{X/0}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi RN_0}} \int_{-A}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+10A)^2}{2RN_0}\right) dx$$

Haciendo el cambio de variable:

$$z = \frac{x+10A}{\sqrt{2RN_0}}$$

se tiene:

$$P_{e_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{9A}{\sqrt{2RN_0}}}^{\infty} \exp(-z^2)dz$$

ya que:

$$\mathrm{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{u}^{\infty} \exp(-z^2)dz$$

entonces:

$$P_{e_0} = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{9A}{\sqrt{2RN_0}}\right)$$

Si se transmite el símbolo 1, la variable $X$ a la entrada del decisor es:

$$X = 8A + N$$

La variable $X$ es Gaussiana con media $8A$ y varianza $RN_0$ por lo que su función densidad de probabilidad es:

$$f_{X/1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi RN_0}} \exp\left(-\frac{(x-8A)^2}{2RN_0}\right)$$

En este caso se comete error siempre que $X < -A$ ó $X > 9A$ por lo que la probabilidad de error viene dada por:

$$P_{e_1} = Prob(X < -A/1) + Prob(X > 9A/1) = \underbrace{\int_{-\infty}^{-A} f_{X/1}(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{9A}^{\infty} f_{X/1}(x)dx}_{I_2}$$

Por simetría la integral $I_1$ coincide con la ya calculada para el símbolo 0. Para $I_2$ se tiene:

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi RN_0}} \int_{9A}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-8A)^2}{2RN_0}\right) dx$$

Haciendo el cambio de variable:

$$z = \frac{x-8A}{\sqrt{2RN_0}}$$

se tiene:

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{A}{\sqrt{2RN_0}}}^{\infty} \exp(-z^2)dz = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2RN_0}}\right)$$

Juntando $I_1$ e $I_2$ se tiene que:

$$P_{e_1} = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{9A}{\sqrt{2RN_0}}\right) + \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2RN_0}}\right)$$

Si se transmite el símbolo 2, la variable $X$ a la entrada del decisor es:

$$X = 10A + N$$

La variable $X$ es Gaussiana con media $10A$ y varianza $RN_0$ por lo que su función densidad de probabilidad es:

$$f_{X/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi RN_0}} \exp\left(-\frac{(x-10A)^2}{2RN_0}\right)$$

En este caso se comete error siempre que $X < 9A$ por lo que la probabilidad de error viene dada por:

$$P_{e_2} = Prob(X < 9A/2) = \int_{-\infty}^{9A} f_{X/2}(x)dx$$

Por simetría esta integral es igual a la integral $I_2$ ya calculada para el símbolo 1, entonces:

$$P_{e_2} = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2RN_0}}\right)$$

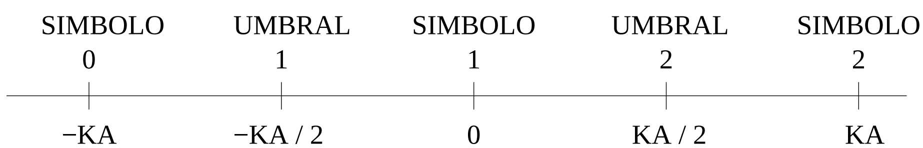
Puesto que los símbolos son equiprobables se tiene que la probabilidad de error media es:

$$P_e = Prob(0)P_{e_0} + Prob(1)P_{e_1} + Prob(2)P_{e_2}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{9A}{\sqrt{2RN_0}}\right) + \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{9A}{\sqrt{2RN_0}}\right) + \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2RN_0}}\right) + \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2RN_0}}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\text{erfc}\left(\frac{9A}{\sqrt{2RN_0}}\right) + \frac{1}{3}\text{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2RN_0}}\right)$$

*e*) No se han elegido de forma óptima los niveles de amplitud ya que el símbolo 0 esta mucho más separado del símbolo 1 que éste del símbolo 2, por lo que la probabilidad de que el decisor se confunda entre estos dos últimos es muy elevada. La probabilidad de error disminuye siempre que los niveles que representan los símbolos estén equiespaciados y lo más separados que sea posible.

Para el caso $M = 3$ la situación óptima (mínima probabilidad de error dada una potencia media de pico) es elegir unos niveles de amplitud simétricos respecto al origen como se muestra en la siguiente figura:




siendo $K$ un factor que es necesario determinar. En esta situación la potencia media de pico viene dada por:

$$Pot = Prob(0)Pot_0 + Prob(1)Pot_1 + Prob(2)Pot_2$$
$$= \frac{1}{3}[K^2A^2 + 0 + K^2A^2] = \frac{2K^2A^2}{3}$$

Si queremos que la potencia se mantenga constante la igualamos a la que teníamos antes que era $88A^2$ y despejamos $K$:

$$\frac{2K^2A^2}{3} = 88A^2 \quad \Rightarrow \quad K^2 = 132 \quad \Rightarrow \quad K = 2\sqrt{33}$$

La amplitud para el símbolo 0 es $-2\sqrt{33}$, para el símbolo 1 es 0 y para el símbolo 2 es $2\sqrt{33}$. Ahora se puede determinar la probabilidad de error media obteniéndose:

$$P_e = \frac{2}{3}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{33}{2RN_0}}A\right)$$

que es siempre mucho menor que la de antes.