PROBLEMA:

a) $\eta = E[R(t)]$

Como el ruido es estacionario la envolvente también lo va a ser:

$$n(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_c t) + n_s(t)\,\text{sen}(2\pi f_c t)$$

$$r(t) = \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)}$$

fijando $t = t_k$ $\quad R = R(t_k)$ será una variable aleatoria Rayleigh.

σ^2 es la potencia del ruido $n(t)$. Como la media es cero, la potencia de $n_c(t)$ y $n_s(t)$ es también σ^2. Entonces de teoría se sabe que la distribución de la envolvente R viene dada por la distribución Rayleigh:

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)u(r)$$

La media será:

$$\eta = E(R) = \int_{-\infty}^{\infty} r\, f_R(r)\,dr = \int_0^{\infty} r \cdot \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)dr$$

integrando por partes

$$\left.\begin{array}{l} u = r \\ dv = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)dr \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} du = dr \\ v = -\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \end{array}\right|$$

②

$$\eta = -r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr$$

La primera parte es cero puesto que la exponencial decrece mucho más rápido que r crece.

Para la segunda parte se sabe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1 \quad \text{(Distribución Gaussiana)}$$

Además como tiene simetría par:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma$$

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma}$$

b) Como la media η no es cero se tiene que

$$\rho = E[R^2] - \eta^2$$

$$E[R^2] = \int_{-\infty}^{\infty} r^2 f_R(r)\, dr = \int_0^\infty r^2 \cdot \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr$$

Integrando por partes

$$u = r^2 \qquad du = 2r$$

$$dv = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right) \qquad v = -\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

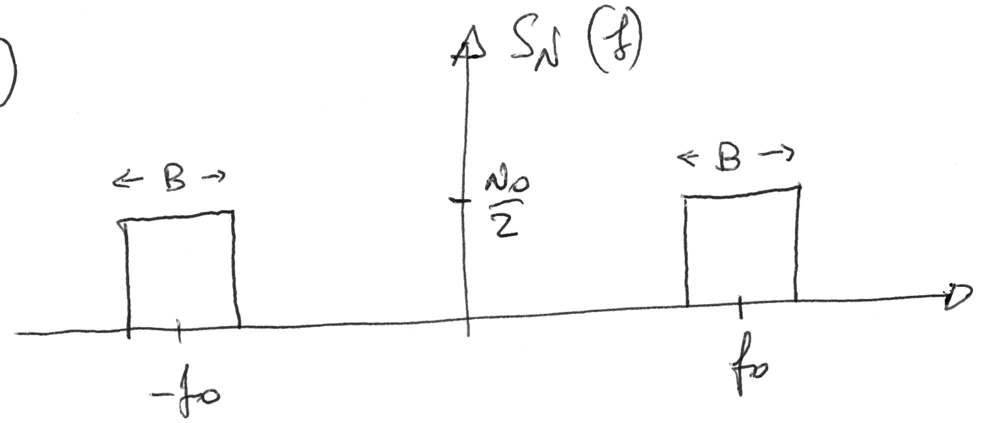
$$E[R^2] = -r^2 \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\Bigg]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr$$

La primera parte es cero puesto que la exponencial decrece mucho más rápido que crece r^2. La segunda parte:

$$\int_0^{\infty} 2r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr = \left[-2\sigma^2 \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right]_0^{\infty} = 2\sigma^2$$

$$\boxed{\rho = E[R^2] - \eta^2 = 2\sigma^2 - \frac{\pi}{2}\sigma^2 = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2}$$

c)



$$\boxed{\sigma^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f)\,df = \frac{N_0}{2}B + \frac{N_0}{2}B = \boxed{N_0 \cdot B}$$

d) $$f_R(r) = \frac{r}{N_0 B} \exp\left(-\frac{r^2}{2N_0 B}\right) u(r)$$

e) $$\eta = \sqrt{\frac{\pi N_0 B}{2}} \quad \text{y} \quad \rho = \frac{(4-\pi) N_0 B}{2}$$