Tratamiento y Transmisión de Señales

Ingenieros Electrónicos

EXAMEN CONVOCATORIA SEPTIEMBRE 2004

SEGUNDA PARTE: PROBLEMAS

1 hora 30 minutos y 2 puntos para el primer problema y 1 hora y 1 punto para el segundo. Total 2 problemas: 2 horas y media y 3 puntos.

PROBLEMA 1. Sea una señal moduladora aleatoria $m(t)$ de distribución desconocida. Se sabe sin embargo que tiene media cero y función de autocorrelación $R_M(\tau)$ cuya transformada de Fourier da lugar a la densidad espectral de potencia $S_M(f)$ que se sabe que vale cero fuera del intervalo frecuencial $(-W, W)$ siendo W una constante determinística conocida dada en Hz.

Sea también una señal portadora aleatoria $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \Theta)$ para la que se sabe que su amplitud A_c y su frecuencia f_c son ambas constantes determinísticas conocidas. Se sabe además que la fase Θ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0, 2\pi)$ y que es además independiente de la señal moduladora $m(t)$.

Se desea modular la señal $m(t)$ usando la portadora $c(t)$ empleando la técnica AM para obtener la señal modulada $s(t) = [1 + k_a m(t)]c(t)$, siendo k_a una constante determinística conocida que depende de la sensibilidad en amplitud del modulador empleado.

a) ¿Se puede decir que la señal moduladora $m(t)$ es estacionaria en sentido amplio con respecto a la media (constante) y con respecto a la autocorrelación (función de la diferencia entre los índices temporales)? ¿Y estacionaria en sentido estricto?

b) Determinar y dibujar la función de densidad de la fase aleatoria Θ de la portadora.

c) Calcular la media estadística de la señal portadora. ¿Se puede decir que la señal portadora $c(t)$ es estacionaria con respecto a la media?

d) Determinar la función de autocorrelación estadística $R_C(t_1, t_2)$ de la señal portadora $c(t)$. ¿Se puede decir que la señal portadora es estacionaria con respecto a la autocorrelación? En ese caso expresar la autocorrelación como función de la variable $\tau = t_1 - t_2$.

e) Determinar la media estadística de la señal modulada $s(t)$. ¿Se puede decir que la señal modulada $s(t)$ es estacionaria con respecto a la media?

f) Determinar la función de autocorrelación estadística $R_S(t_1, t_2)$ de la señal modulada $s(t)$. ¿Se puede decir que la señal modulada es estacionaria con respecto a la autocorrelación? En ese caso expresar la autocorrelación como función de la variable $\tau = t_1 - t_2$.

g) En caso de que la señal modulada $s(t)$ sea estacionaria con respecto a la autocorrelación, determinar su densidad espectral de potencia $S_S(f)$.

h) Suponiendo que la autocorrelación de la señal moduladora $m(t)$ fuera $R_M(\tau) = \mathrm{sinc}^2(W\tau)$ determinar y dibujar (con el mayor detalle posible) su densidad espectral de potencia $S_M(f)$. ¿Cuál es el ancho de banda de dicha señal?

i) En caso de que la señal modulada $s(t)$ sea estacionaria con respecto a la autocorrelación, determinar y dibujar (con el mayor detalle posible) su densidad espectral de potencia $S_S(f)$ bajo el supuesto del apartado anterior. ¿Cuál es el ancho de banda de dicha señal?

PROBLEMA 2. Sea un sistema de transmisión digital que pretende transmitir símbolos pertenecientes a un alfabeto con $M = 8$ símbolos distintos $m_1, \ldots, m_M$. Vamos a considerar una tasa uniforme de R símbolos por segundo o, equivalentemente, símbolos con duración $T = 1/R$ segundos. Se han elegido las siguientes señales $s_i(t)$, $1 \leq i \leq M$ de duración T para representar en su caso cada unos de los M símbolos posibles:

$$s_1(t) = \Pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) \qquad s_2(t) = 2\Pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)$$

$$s_3(t) = -\Pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) \qquad s_4(t) = -2\Pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)$$

$$s_5(t) = \Pi\left(\frac{2t}{T} - \frac{1}{2}\right) - \Pi\left(\frac{2t}{T} - \frac{3}{2}\right) \qquad s_6(t) = 2\Pi\left(\frac{2t}{T} - \frac{1}{2}\right) - 2\Pi\left(\frac{2t}{T} - \frac{3}{2}\right)$$

$$s_7(t) = \Pi\left(\frac{2t}{T} - \frac{3}{2}\right) - \Pi\left(\frac{2t}{T} - \frac{1}{2}\right) \qquad s_8(t) = 2\Pi\left(\frac{2t}{T} - \frac{3}{2}\right) - 2\Pi\left(\frac{2t}{T} - \frac{1}{2}\right)$$

a) Dibujar las señales $s_i(t)$ para $1 \leq i \leq M$.

b) Elegir $P < M$ señales linealmente independientes (conjunto de señales para las que ninguna de ellas se puede poner como combinación lineal del resto) del conjunto original de forma que el resto se pueda poner como combinación lineal de éstas. ¿Cuál es entonces la dimensión N del espacio de señal del sistema de transmisión digital planteado?

c) Determinar una base de señales ortonormales $\phi_j(t)$, $1 \leq j \leq N$ que represente a las M señales originales y dibujarla.

d) Determinar los coeficientes s_{ij}, con $1 \leq i \leq M$ y $1 \leq j \leq N$ de las M señales del sistema en el espacio de señal determinado en el apartado anterior.

e) Calcular las energías E_i para $1 \leq i \leq M$ de las señales.

f) Dibujar en dicho espacio de señal la constelación (las M señales) usando los resultados anteriores.

g) ¿Existe otra base ortonormal (aparte del caso trivial $-\phi_j(t)$) de funciones $\psi_j(t)$, $1 \leq j \leq N$ diferente de la anterior que represente al mismo conjunto de señales $s_i(t)$ para $1 \leq i \leq M$? En caso afirmativo determinar una base distinta $\psi_j(t)$, $1 \leq j \leq N$ y repetir el apartado anterior usando esta nueva base.