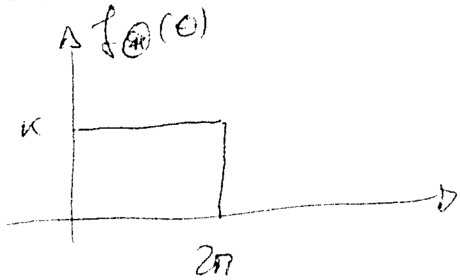
PROBLEMA 1:

a) m(t) es estacionaria con respecto a la media puesto que es constante ya que vale cero.

m(t) es estacionaria con respecto a la autocorrelación puesto que esta solo depende de $\tau = t_1 - t_2$ diferencia de índices temporales.

No se sabe si m(t) es estacionaria en sentido estricto, con la información disponible.

b) Como se dice que la fase es uniforme entre $(0, 2\pi)$, esto significa que la función de densidad es constante en dicho intervalo y cero fuera:



El valor de K se debe determinar para que tenga área unidad por lo que $K = \frac{1}{2\pi}$

$$\boxed{f_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \Pi\left(\frac{\theta - \pi}{2\pi}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

c) $\boxed{E[c(t)]} = E[A_c \cos(2\pi f_c t + \Theta)] = A_c \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_c t + \theta)\, d\theta$

$= A_c \left[\operatorname{sen}(2\pi f_c t + \theta)\right]_0^{2\pi} = \boxed{0}$ Es estacionaria con respecto a la media.

d) $R_C(t_1,t_2) = E[c(t_1)\, c(t_2)] = E[A_c\cos(2\pi f_c t_1 + \Theta) A_c \cos(2\pi f_c t_2 + \Theta)]$

$= A_c^2\, E[\cos(2\pi f_c t_1 + \Theta)\cos(2\pi f_c t_2 + \Theta)] =$

$= \frac{A_c^2}{2} E[\cos(2\pi f_c (t_1+t_2) + 2\Theta)] + \frac{A_c^2}{2}\cos[2\pi f_c(t_1-t_2)]$

$= \frac{A_c^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos[2\pi f_c(t_1+t_2)+2\theta]\,d\theta + \frac{A_c^2}{2}\cos[2\pi f_c(t_1-t_2)]$

$= \frac{A_c^2}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}[2\pi f_c(t_1+t_2)+2\theta]}{2}\right]_0^{2\pi} + \frac{A_c^2}{2}\cos[2\pi f_c(t_1-t_2)]$

$\boxed{R_c(t_1,t_2) = \frac{A_c^2}{2}\cos[2\pi f_c(t_1-t_2)]}$ Sí es estacionario con respecto a la autocorrelación

$\boxed{R_c(\tau) = \frac{A_c^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau)}$

e) $E[s(t)] = E[[1 + k_a m(t)]\, c(t)] \underset{\text{indep}}{=} E[(1+k_a m(t))]\, E[c(t)] = 0$

Sí es estacionario con respecto a la media.

f) $R_s[t_1,t_2] = E[s(t_1) s(t_2)] = E[(1+k_a m(t_1))\, c(t_1)\, (1+k_a m(t_2))\, c(t_2)] \underset{\text{indep}}{=}$

$= E[(1+k_a m(t_1))(1+k_a m(t_2))]\, E[c(t_1) c(t_2)]$

$= E[(1 + \underbrace{k_a m(t_1)}_{\text{media } 0} + \underbrace{k_a m(t_2)}_{\text{media } 0} + k_a^2 m(t_1) m(t_2))]\, R_C(t_1,t_2)$

+ (continuación)

$$= \left[1 + K_a E[m(t_1)] + K_a E[m(t_2)] + K_a^2 \underbrace{E[m(t_1) m(t_2)]}_{R_M(t_1,t_2)}\right] R_c(t_1, t_2)$$

$$\boxed{R_S(t_1, t_2) = \left[1 + K_a^2 R_M(t_1, t_2)\right] R_c(t_1, t_2)}$$

$$\boxed{R_S(t_1, t_2) = \frac{A_c^2}{2} \left[1 + K_a^2 R_M(t_1, t_2)\right] \cos(2\pi f_c (t_1 - t_2))}$$

Sí es estacionaria con respecto la autocorrelación ya que R_M $m(t)$ lo es.

$$\boxed{R_S(\tau) = \frac{A_c^2}{2} \left[1 + K_a^2 R_M(\tau)\right] \cos(2\pi f_c \tau)}$$

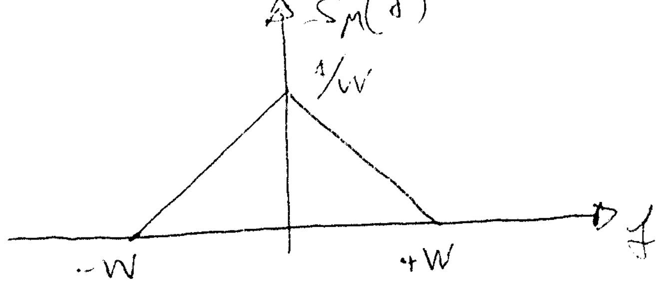
g) Tomando TF.

$$R_M(\tau) \rightleftharpoons S_M(f) \quad y \quad R_S(\tau) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} S_S(f)$$

$$S_S(f) = \frac{A_c^2}{2} \left[\delta(f) + K_a^2 S_M(f)\right] * \left[\frac{1}{2}\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}\delta(f + f_c)\right]$$

$$S_S(f) = \frac{A_c^2}{4} \left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) + K_a^2 S_M(f - f_c) + K_a^2 (f + f_c)\right]$$

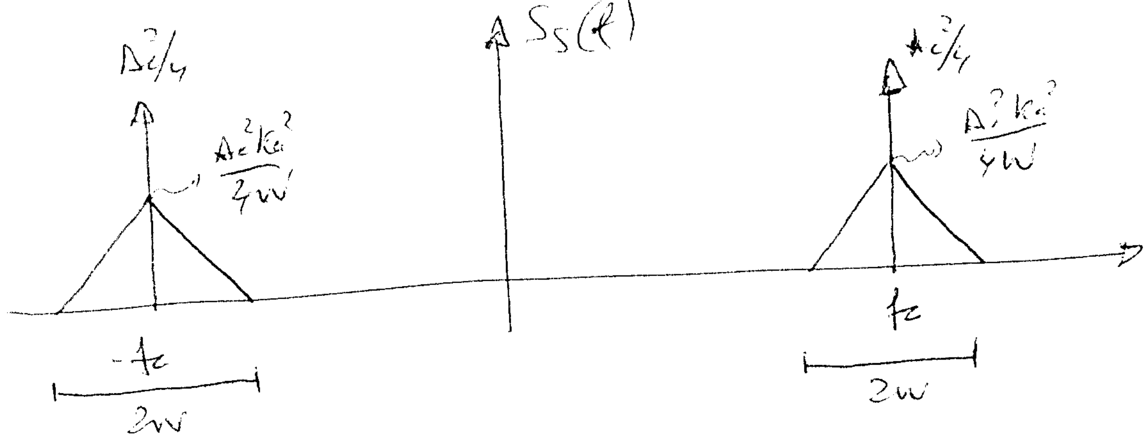
h) $R_M(\tau) = \text{sinc}^2(W\tau) \rightleftharpoons \boxed{S_M(f) = \frac{1}{W} \Lambda\left(\frac{f}{W}\right)}$



Ancho de Banda W Hz

i)

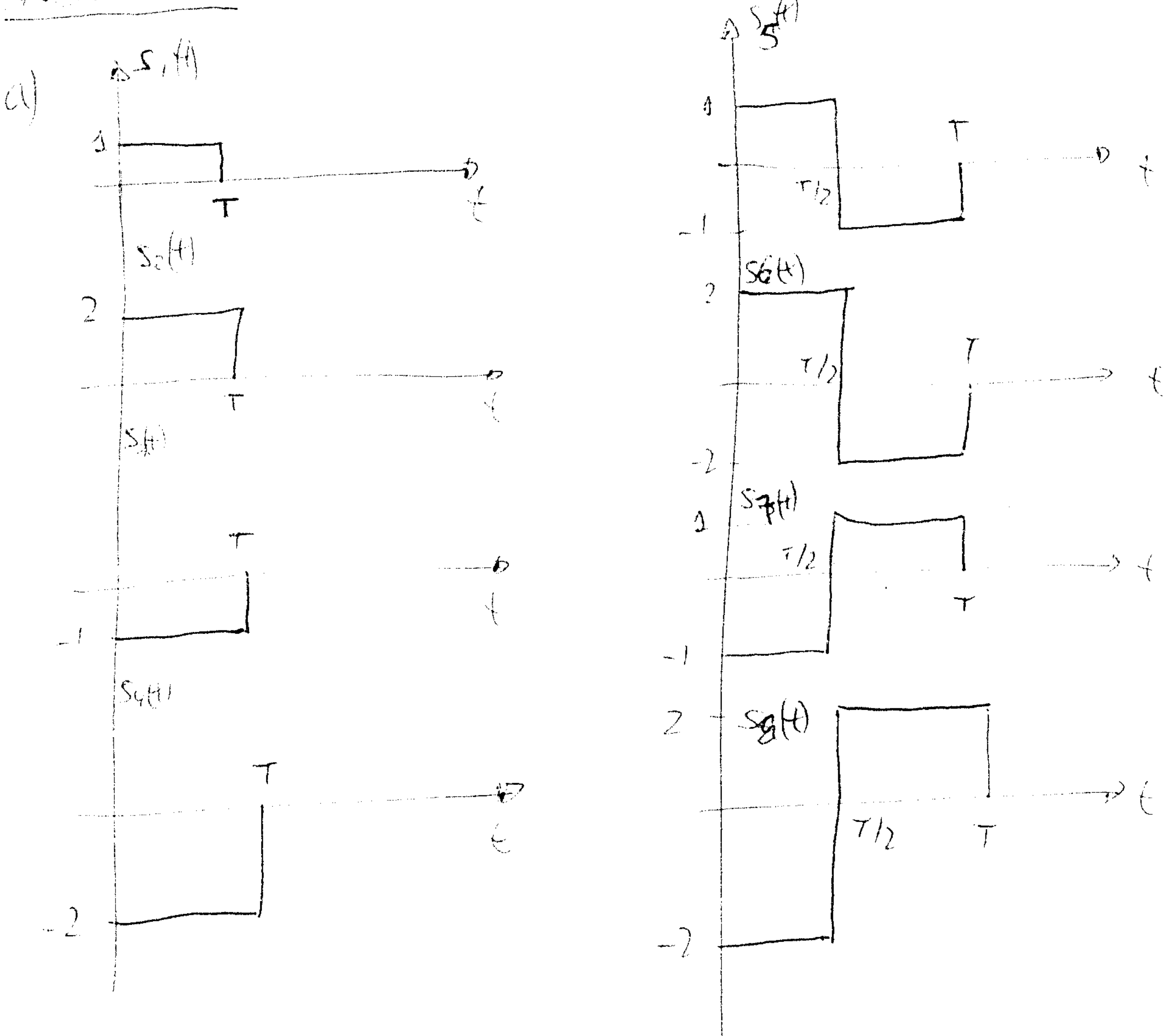
$$\boxed{S_S(f) = \frac{A_c^2}{4}\delta(f-f_c) + \frac{A_c^2}{4}\delta(f+f_c) + \frac{A_c^2 K_a^2}{4W}\Lambda\left(\frac{f-f_c}{W}\right) + \frac{A_c^2 K_a^2}{4W}\Lambda\left(\frac{f+f_c}{W}\right)}$$



Ancho de Banda de $2W$ Hz

PROBLEMA 2:

a)



b) Elegimos $s_1(t)$ como parte del conjunto, y vamos intentando añadir el resto siempre que sean linealmente independientes de $s_1(t)$

* $\underline{s_2(t)}$ $\Rightarrow$ $s_2(t) = 2\,s_1(t)$ lo descartamos

* $\underline{s_3(t)}$ $\Rightarrow$ $s_3(t) = -s_1(t)$ lo descartamos

* $\underline{s_4(t)}$ $\Rightarrow$ $s_4(t) = -2\,s_1(t)$ lo descartamos.

* $\underline{s_5(t)}$ es linealmente independiente de $s_1(t)$. (No es proporcional)

Ahora consideramos $s_1(t)$ y $s_5(t)$ y intentamos añadir el resto siempre que sean linealmente independientes de estos:

* $\underline{s_6(t)}$ $\Rightarrow$ $s_6(t) = 2 s_5(t)$ la descartamos

* $\underline{s_7(t)}$ $\Rightarrow$ $s_7(t) = - s_5(t)$ la descartamos

* $\underline{s_8(t)}$ $\Rightarrow$ $s_8(t) = -2 s_5(t)$ la descartamos.

El conjunto de señales pedido es $s_1(t)$ y $s_5(t)$, entonces $P = 2$.

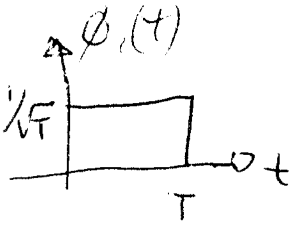
La dimensión del espacio de señal es $N = P = 2$.

c) Usamos procedimiento Gram-Schmidt:

* Partiendo de $s_1(t)$ determinamos su energía:

$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t) = \int_0^T (1)^2 \, dt = T$$

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)$$



* Determinamos coeficiente s_{51}

$$s_{51} = \int_0^T \phi_1(t) \, s_5(t) \, dt = \int_0^{T/2} \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)(1) \, dt - \int_{T/2}^{T} \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)(-1) \, dt$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) T/2 - \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) T/2 = 0.$$

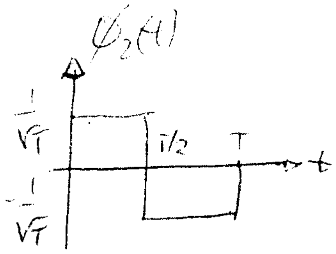
$s_1(t) \perp s_5(t) \Rightarrow \phi_1(t) \perp s_5(t)$

entonces

$$\phi_2(t) = \frac{s_5(t)}{\sqrt{E_5}} \quad / \quad E_5 = \int_0^T s_5^2(t) \, dt = T$$

2. (continued)

$$\phi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\Pi\left(\frac{2t}{T}-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{T}}\Pi\left(\frac{2t}{T}-\frac{3}{2}\right)$$



d)

$s_1(t) = \sqrt{T}\,\phi_1(t)$ / $s_2(t) = 2\sqrt{T}\,\phi_1(t)$

$s_3(t) = -\sqrt{T}\,\phi_1(t)$ / $s_4(t) = -2\sqrt{T}\,\phi_1(t)$

$s_5(t) = \sqrt{T}\,\phi_2(t)$ / $s_6(t) = 2\sqrt{T}\,\phi_2(t)$

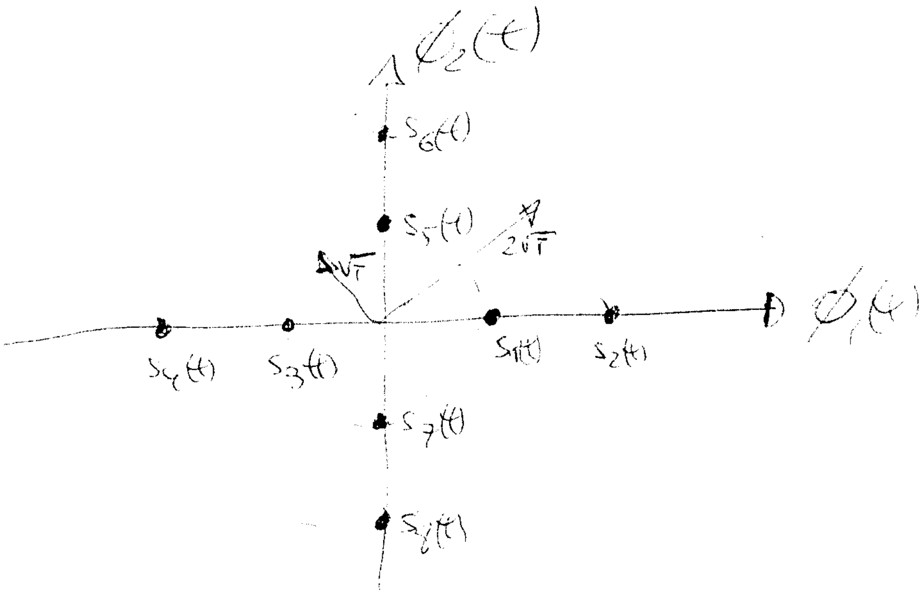
$s_7(t) = -\sqrt{T}\,\phi_2(t)$ / $s_8(t) = -2\sqrt{T}\,\phi_2(t)$

s_{ij} (i \ j)	1	2
1	$\sqrt{T}$	0
2	$2\sqrt{T}$	0
3	$-\sqrt{T}$	0
4	$-2\sqrt{T}$	0
5	0	$\sqrt{T}$
6	0	$2\sqrt{T}$
7	0	$-\sqrt{T}$
8	0	$-2\sqrt{T}$

e) $E_i = \sum_{j=1}^{N} s_{ij}^2 \Rightarrow$ $E_1 = T$ $E_2 = 4T$ $E_3 = T$ $E_4 = 4T$

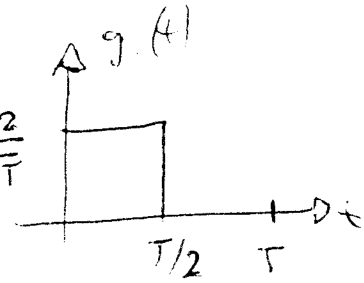
$E_5 = T$ $E_6 = 4T$ $E_7 = T$ $E_8 = 4T$

f)



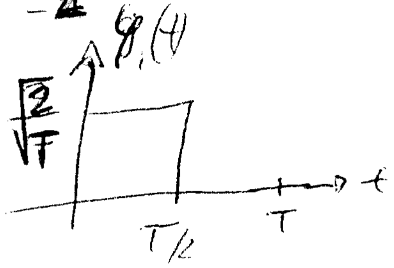
g) Otra base debería ser otro conjunto ortonormal distinto que generase el mismo espacio de señal. Debería ser combinación lineal de $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$.

Si definimos $g_1(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t)$



$$E_g = \int_0^{T/2} \left(\frac{2}{\sqrt{T}}\right)^2 dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} dt = \frac{4}{T}\cdot\frac{T}{2} = 2$$

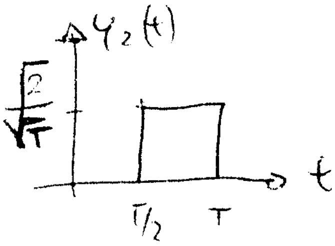
$$\boxed{\varphi_1(t) = \frac{g_1(t)}{\sqrt{E_{g_1}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\,\Pi\left(\frac{2t}{T}-\frac{1}{2}\right)}$$



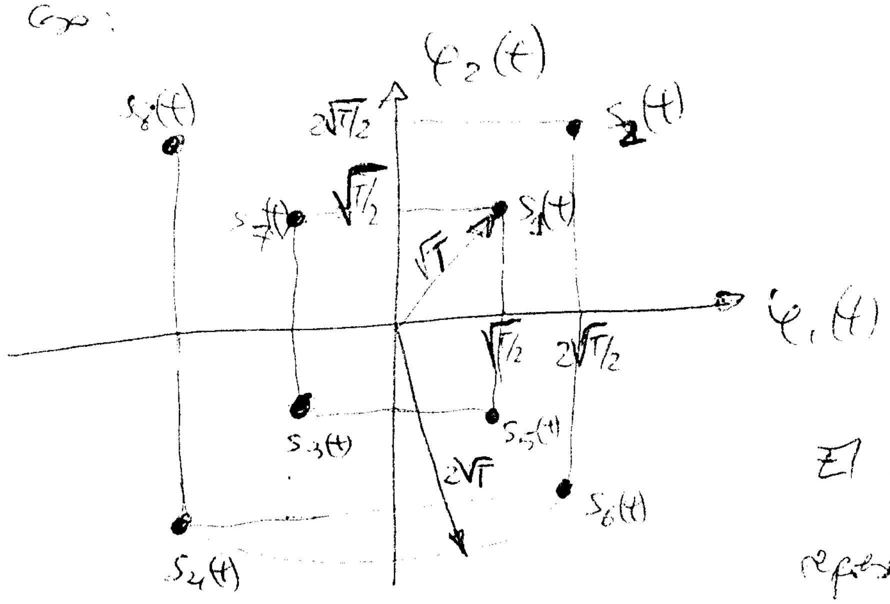
Claramente

$$g_2(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) = \frac{2}{\sqrt{T}}\,\Pi\left(\frac{2t}{T}-\frac{3}{2}\right)$$

$$\boxed{\varphi_2(t) = \frac{g_2(t)}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{T}}\,\Pi\left(\frac{2t}{T}-\frac{3}{2}\right)}$$



En este caso:



El cambio de base representa un giro en el plano y un cambio de signo (de sentido)