TRATAMIENTO Y TRANSMISIÓN DE SEÑALES

PROBLEMAS TEMA 1

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE COMUNICACIÓN

1.- Clasifica las siguientes señales como señales de energía o de potencia. Calcula en cada caso la potencia o la energía de dichas señales:

a) $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ para $-\infty < t < \infty$

b) $x(t) = \begin{cases} A\cos(2\pi f_0 t) & \text{para } -T_0/2 \le t \le T_0/2, \text{ donde } T_0 = 1/f_0 \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases}$

c) $x(t) = \begin{cases} A\exp(-at) & \text{para } t > 0 \text{ y } a > 0 \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases}$

d) $x(t) = \cos(t) + 5\cos(2t)$ para $-\infty < t < \infty$

2.- Considerar un conjunto de n funciones reales $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, ... $\phi_n(t)$ de modo que sean ortogonales entre sí en el intervalo 0 a T:

$$\int_0^T \phi_i(t)\phi_j(t)dt = 0 \text{ para } i \neq j$$

Estas funciones han sido normalizadas de modo que tienen energía unidad:

$$\int_0^T \phi_j^2(t)dt = 1 \text{ para } j = 1,2, \dots n$$

Sea g(t) una función arbitraria que puede ser aproximada en el intervalo 0 a T mediante la combinación lineal de n de esas funciones mutuamente ortogonales:

$$g(t) \cong \sum_{k=1}^{n} g_k \phi_k(t)$$

Si se define el error cuadrático medio de la aproximación como:

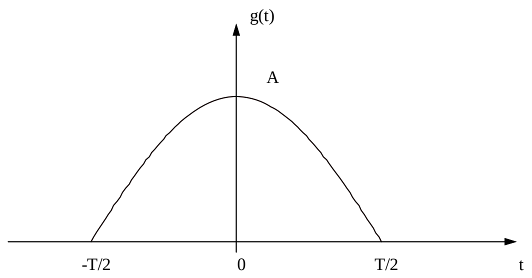
$$E = \frac{1}{T}\int_0^T \left[g(t) - \sum_{k=1}^{n} g_k \phi_k(t) \right]^2 dt$$

a) Para la mejor aproximación, es decir, para la que minimice el error cuadrático medio E, mostrar que los coeficientes de la expansión deben ser:

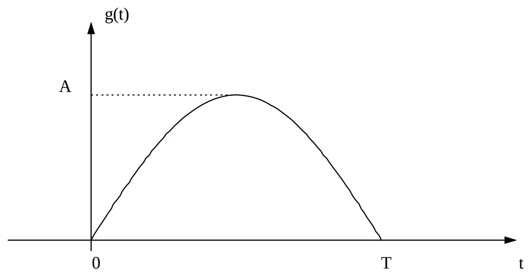
$$g_k = \int_0^T g(t)\phi_k(t)dt \quad \text{para } j = 1,2, \dots n$$

b) Determina el valor mínimo del error cuadrático medio E. ¿Qué ocurre con este error según el número de términos en la aproximación tiende a infinito?

3.-
a) Calcular la transformada de Fourier del pulso medio-coseno mostrado en la figura:

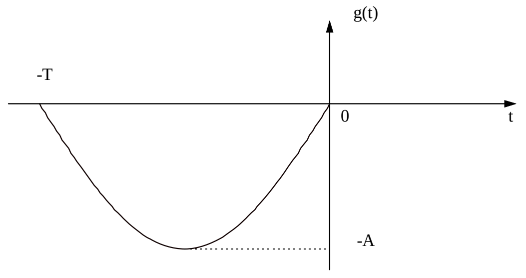


b) Aplicar la propiedad de desplazamiento temporal para a partir del resultado obtenido en el apartado anterior calcular la transformada de Fourier del pulso medio-seno mostrado en la figura:

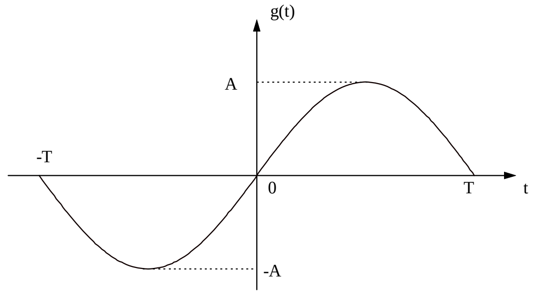


c) ¿Cuál es la transformada de Fourier del pulso medio-seno de duración aT?

d) ¿Cuál es la transformada de Fourier del pulso medio-seno negativo de la figura?



e) Calcular el espectro del pulso seno de la siguiente figura:



4.- Una señal x(t) de energía finita es aplicada a un dispositivo cuadrático cuya salida y(t) está relacionada con la entrada x(t) mediante la expresión:

$$y(t) = x^2(t)$$

El espectro de x(t) está limitado al intervalo de frecuencias $-W \le f \le W$. Mostrar entonces que el espectro de y(t) está limitado al intervalo $-2W \le f \le 2W$.

5.- Probar las siguientes propiedades de la función $\delta(t)$:

a) La función $\delta(t)$ es una función par del tiempo, es decir $\delta(t) = \delta(-t)$.

b) El efecto de escalar el argumento de la función $\delta(t)$ por una constante a se debe entender como:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

c) El efecto de multiplicar a $\delta(t)$ por una función del tiempo g(t) se puede describir:

$$g(t)\,\delta(t-t_0) = g(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

6.- Considerar una función g(t) que sea un pulso formado por un número finito de segmentos de línea recta. Supongamos que dicha función g(t) es diferenciable con respecto al tiempo dos veces, de modo que puede generarse un tren de deltas ponderadas de la siguiente forma:

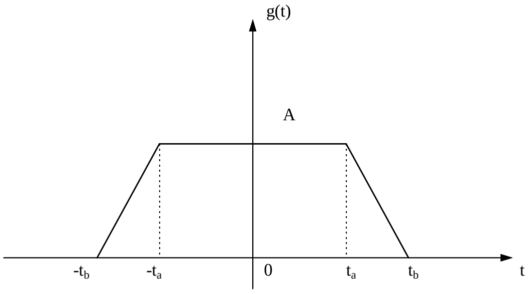
$$\frac{d^2g(t)}{dt^2} = \sum_i k_i \delta(t - t_i)$$

donde los k_i están relacionados con las pendientes de los segmentos de línea recta.

a) Dados los valores de k_i y de t_i, mostrar que la transformada de Fourier de g(t) viene dada por:

$$G(f) = -\frac{1}{4\pi^2 f^2}\sum_i k_i \exp(-j2\pi f\, t_i)$$

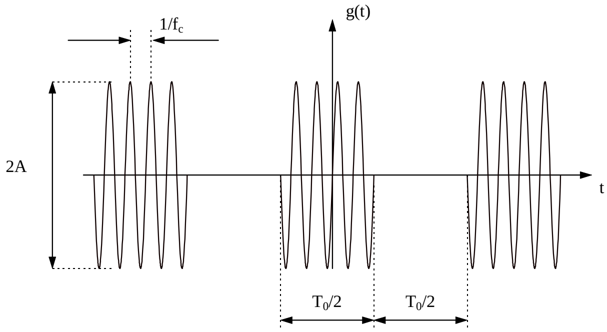
b) Utilizando este procedimiento, mostrar que la transformada de Fourier del pulso trapezoidal mostrado en la figura:



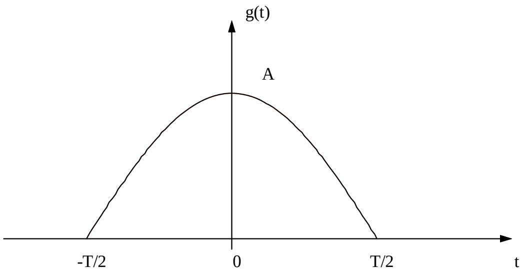
es:

$$G(f) = \frac{A}{\pi^2 f^2 (t_b - t_a)} \sin\left[\pi f (t_b - t_a)\right] \sin\left[\pi f (t_b + t_a)\right]$$

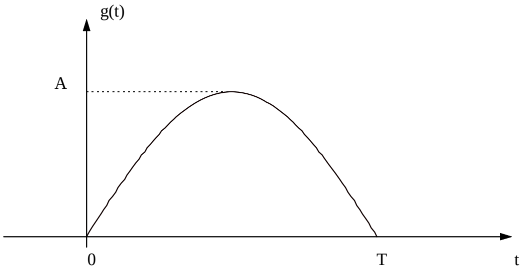
7.- Calcular la densidad espectral de potencia del pulso RF de la figura:



8.- Mostrar que la densidad espectral de energía del pulso:



y la del pulso:



es la misma y tiene un valor:

$$\Psi_g(\mathrm{f}) = \frac{4\mathrm{A}^2\mathrm{T}^2\cos^2(\pi\,\mathrm{T}\,\mathrm{f})}{\pi^{\,2}(4\mathrm{T}^2\mathrm{f}^2-1)^2}$$

9.- Determina y dibuja la función de autocorrelación para los siguientes pulsos exponenciales, siendo a > 0:

a) g(t) = exp(-a t)u(t)
b) g(t) = exp(-a |t|)
c) g(t) = exp(-a t)u(t) - exp(a t)u(-t)

10.- Considerar la señal g(t) definida por:

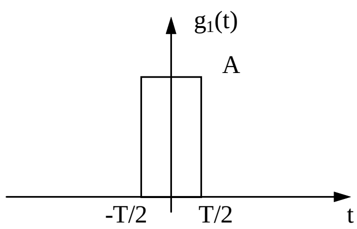
$$\mathrm{g(t)} \;=\; \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\cos(2\pi\,\mathrm{f}_1\mathrm{t}+\theta) + \mathrm{A}_2\cos(2\pi\,\mathrm{f}_2\mathrm{t}+\theta)$$

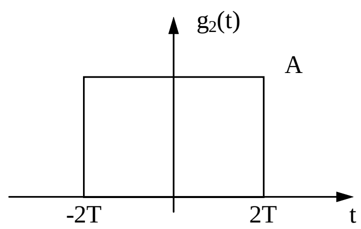
a) Determinar la función de autocorrelación $R_g(t)$ de la señal.

b) ¿Cuál es el valor de $R_g(0)$?

c) ¿Se ha perdido información de g(t) al calcular la función de autocorrelación $R_g(t)$?

11.- Determina la función de correlación cruzada $R_{12}(\tau)$ del par de pulsos rectangulares que se muestran en la figura y dibuja dicha función. ¿Cuál es el valor de $R_{21}(\tau)$?



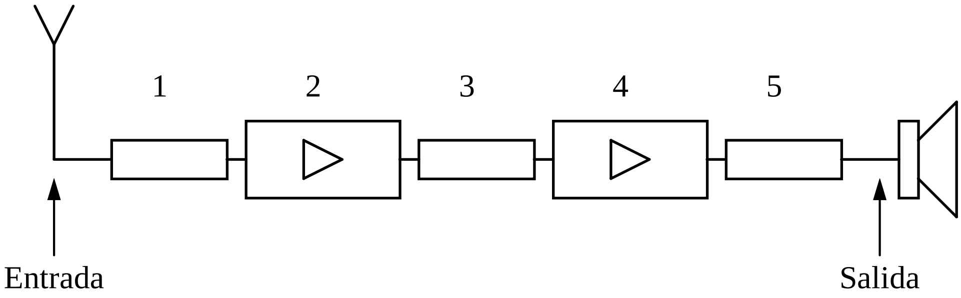


12.- Considerar dos señales periódicas $g_{p1}(t)$ y $g_{p2}(t)$, ambas de período T_0. Mostrar que la función de correlación cruzada $R_{12}(\tau)$ de estas dos señales satisface el par transformado de Fourier:

$$R_{12}(\tau) \Leftrightarrow \frac{1}{T_0^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_1\left(\frac{n}{T_0}\right) G_2^*\left(\frac{n}{T_0}\right)\delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

donde $G_1(n/T_0)$ y $G_2(n/T_0)$ son las transformadas de Fourier de las dos funciones generadoras de las señales $g_{p1}(t)$ y $g_{p2}(t)$ evaluadas a la frecuencia $f = n/T_0$.

13.- Considere un sistema receptor formado por cinco secciones como se muestra en la siguiente figura:



sabiendo que la primera sección, la tercera y la quinta son atenuadores iguales de 5 dB y que introducen una potencia de ruido de -100 dBm, -50 dBm y -20 dBm respectivamente al final de esa sección. Sabiendo además que las secciones segunda y cuarta son amplificadores de 20 y 50 dB respectivamente que además introducen un ruido de -50 dBm y -20 dBm respectivamente al final de esa sección. Con esos datos y suponiendo que a la entrada hay una potencia de señal de -50 dBm y de ruido de -100 dBm, determinar:

a) El valor de la SNR a la entrada en dB.

b) La potencia de señal a la salida en dBm.

c) La potencia de ruido a la salida en dBm.

d) El valor de la SNR a la salida en dB.

e) La relación entre el valor de la SNR a la entrada y el valor de la SNR a la salida medida en dB.

14.- Una señal periódica $x_p(t)$ de período T_0 se aplica a un filtro lineal e invariante en el tiempo de respuesta al impulso h(t). Utiliza la representación en serie de Fourier Compleja de $x_p(t)$ y la integral de convolución para evaluar la respuesta del filtro a dicha entrada.

15.-

a) Considerar una señal g(t) limitada a la banda de frecuencias -B ≤ f ≤ B. Esta señal se aplica a un filtro paso bajo con amplitud no constante y fase lineal dado por:

$$|H(f)| = \begin{cases} a_0 + a_1 \cos(\pi \frac{f}{B}) & \text{para } |f| \leq B \\ 0 & \text{para } |f| > B \end{cases}$$

y por:

$$\beta(f) = \begin{cases} -2\pi t_0 f & \text{para } |f| \leq B \\ 0 & \text{para } |f| > B \end{cases}$$

Determinar la salida del filtro resultante.

b) Supóngase ahora el caso contrario para el que la amplitud es constante y la fase no lineal:

$$|H(f)| = \begin{cases} a_0 & \text{para } |f| \leq B \\ 0 & \text{para } |f| > B \end{cases}$$

y por:

$$\beta(f) = \begin{cases} -2\pi t_0 f + b_1 \sin(\pi \frac{f}{B}) & \text{para } |f| \leq B \\ 0 & \text{para } |f| > B \end{cases}$$

Determinar la salida del filtro resultante suponiendo que la constante b_1 es lo suficientemente pequeña como para poder utilizar la aproximación:

$$\exp\left[jb_1 \sin(\frac{\pi f}{B}) \right] \cong 1 + jb_1 \sin(\frac{\pi f}{B})$$

16.- Dado un filtro paso bajo ideal lineal e invariante en el tiempo de amplitud constante e igual a A y lineal en fase de pendiente $-2\pi t_0$ y ancho de banda 1/T calcular la densidad espectral de energía de la señal de salida cuando la señal aplicada a su entrada es:

$$x(t) = B \, \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

17.- Determina la señal analítica positiva $g_+(t)$ la señal analítica negativa $g_-(t)$, la envolvente compleja $\tilde{g}(t)$, la componente en fase $g_c(t)$, la componente en cuadratura $g_s(t)$, la envolvente natural a(t) y la fase $\phi(t)$ para las siguientes señales:

a) g(t) = sinc(t).

b) $g(t) = [1 + k \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_c t)$.

18.- Una señal de banda estrecha se puede expresar de la forma:

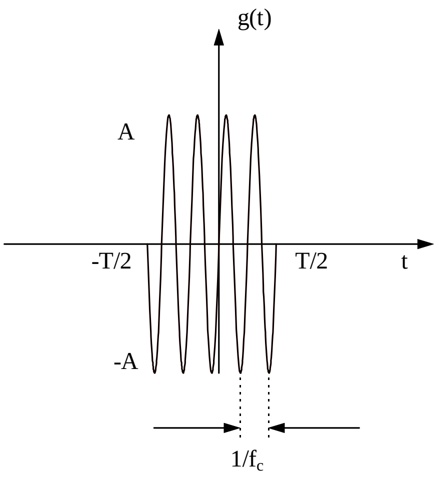
$$g(t) = g_c(t)\cos(2\pi f_c t) - g_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

Utilizando $G_+(f)$ para denotar la transformada de Fourier de la señal analítica positiva de g(t), mostrar que las transformadas de Fourier de las componentes en fase $g_c(t)$ y en cuadratura $g_s(t)$ vienen dadas por:

$$G_c(f) = \frac{1}{2}\left[G_+(f + f_c) + G_+^*(-f + f_c)\right]$$

$$G_s(f) = \frac{1}{2j}\left[G_+(f + f_c) - G_+^*(-f + f_c)\right]$$

19.- Dada la siguiente señal paso banda:



y el sistema paso banda:

$$H(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left[\frac{\pi T(f - f_c)}{2}\right] & \text{para } \left|f - f_c\right| \leq \frac{2}{T} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left[\frac{\pi T(f + f_c)}{2}\right] & \text{para } \left|f + f_c\right| \leq \frac{2}{T} \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases}$$

a) Determinar la transformada de Fourier de la señal de entrada X(f).

b) Determinar la transformada de Fourier de la envolvente compleja de la señal de entrada $\tilde{X}(f)$.

c) Determinar la transformada de Fourier de la envolvente compleja de la respuesta al impulso del sistema $\tilde{H}(f)$.

d) Determinar la transformada de Fourier de la envolvente compleja de la señal de salida $\tilde{Y}(f)$.

e) Determinar la transformada de Fourier de la señal de salida Y(f).

f) Determinar la señal de salida y(t).

20.- Si de un sistema de fase no lineal se sabe que una buena aproximación de su respuesta en fase β(f) se puede calcular desarrollando dicha respuesta en fase en serie de Taylor en torno a una frecuencia f_c = 1 MHz y quedándose con los dos primeros términos de dicho desarrollo, puesto que se sabe que la no linealidad de la fase no es muy grande. Si la expresión para dicha aproximación es $\beta(f) \approx 7 - 10^{-5}f$, calcular:

a) El valor del retardo de fase τ_p.

b) El valor del retardo de grupo τ_g.

21.- Si a la entrada de un sistema lineal e invariante en el tiempo dado por:

$$|H(f)| = K$$

y por:

$$\beta(f) = -2\pi f_c \tau_p - 2\pi(f - f_c)\tau_g$$

se aplica una señal de banda estrecha dada por:

$$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_c t) - x_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

calcular la expresión de la señal de salida y(t) en función de K, $x_c(t)$, $x_s(t)$, f_c, τ_p y τ_g.