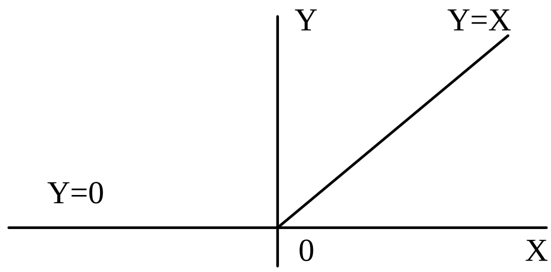
TRATAMIENTO Y TRANSMISIÓN DE SEÑALES

PROBLEMAS TEMA 2

SEÑALES ALEATORIAS Y RUIDO

1.- Una variable aleatoria X con distribución Gaussiana, media cero y varianza σ_X^2 se transforma mediante un circuito rectificador caracterizado por una relación entrada salida:



a) Comprobar que la función densidad de probabilidad de Y viene dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{para } y < 0 \\ k\delta(f) & \text{para } y = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_X} \exp\left(-\dfrac{y^2}{2\sigma_X^2}\right) & \text{para } y > 0 \end{cases}$$

b) Determinar el valor de la constante k que multiplica a $\delta(f)$.

2.- Una variable aleatoria X con distribución Gaussiana, media cero y varianza σ_X^2 se transforma mediante un circuito con ley cuadrática caracterizado por una relación entrada salida dada por:

$$Y = X^2$$

Mostrar que la función densidad de probabilidad de la nueva variable aleatoria Y es igual a:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}\ \sigma_X} \exp\left(-\dfrac{y}{2\sigma_X^2}\right) & \text{para } y \geq 0 \\ 0 & \text{para } y < 0 \end{cases}$$

3.- Probar las siguientes dos propiedades de la función de autocorrelación $R_X(\tau)$ de un proceso X(t):

a) Si X(t) contiene una componente continua de valor A, entonces $R_X(\tau)$ tiene una componente continua de valor A^2.

b) Si X(t) tiene una componente sinusoidal, entonces $R_x(\tau)$ también contiene una componente sinusoidal a la misma frecuencia.

4.- Sea una señal binaria X(t) formada por una ristra de símbolos 1 y 0 equiprobables. El símbolo 1 se representa por un pulso de amplitud A y el símbolo 0 se representa por cero. La duración de cada símbolo es T segundos. Mostrar que:

a) La densidad espectral de potencia es:

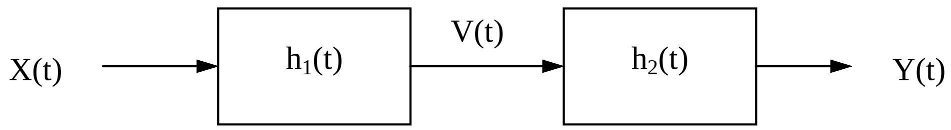
$$S_X(f) = \frac{A^2}{4}\delta(f) + \frac{A^2 T}{4}\operatorname{sinc}^2(fT)$$

b) La función de autocorrelación es:

$$R_X(\tau) = \begin{cases} \dfrac{A^2}{4} + \dfrac{A^2}{4}\left(1 - \dfrac{|\tau|}{T}\right) & \text{para } |\tau| < T \\ \dfrac{A^2}{4} & \text{para } |\tau| \geq T \end{cases}$$

¿Cuál es tanto por ciento de potencia contenida en la componente continua de la señal binaria?

5.- Considerar dos filtros conectados en cascada como se muestra en la figura:



Sea X(t) un proceso estacionario en sentido amplio con función de autocorrelación $R_X(\tau)$. Sea V(t) el proceso que aparece a la salida del primer filtro y sea Y(t) el proceso que aparece a la salida de la cascada de ambos filtros.

a) Encontrar la función de autocorrelación $R_Y(\tau)$.

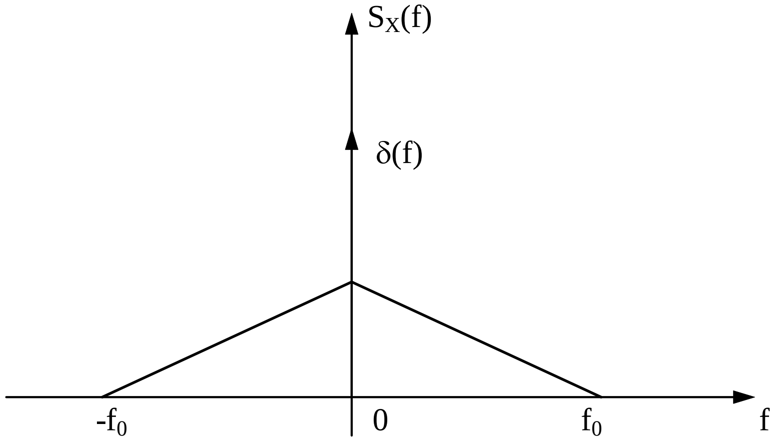
b) Encontrar la función de correlación cruzada $R_{VY}(\tau)$.

6.- Considerar la función σ(f) definida por:

$$\sigma(f) = \frac{S(f)}{R(0)}$$

donde S(f) es la densidad espectral de potencia de un proceso estocástico y R(0) es el valor en el origen de su función de autocorrelación. Explicar porque σ(f) tiene las propiedades típicas de una función densidad de probabilidad.

7.- La densidad espectral de potencia de un proceso estocástico X(t) es la siguiente:



a) Determina y dibuja la función de autocorrelación $R_X(\tau)$.

b) ¿Cuál es la potencia dc contenida en X(t)?

c) ¿Cuál es la potencia ac contenida en X(t)?

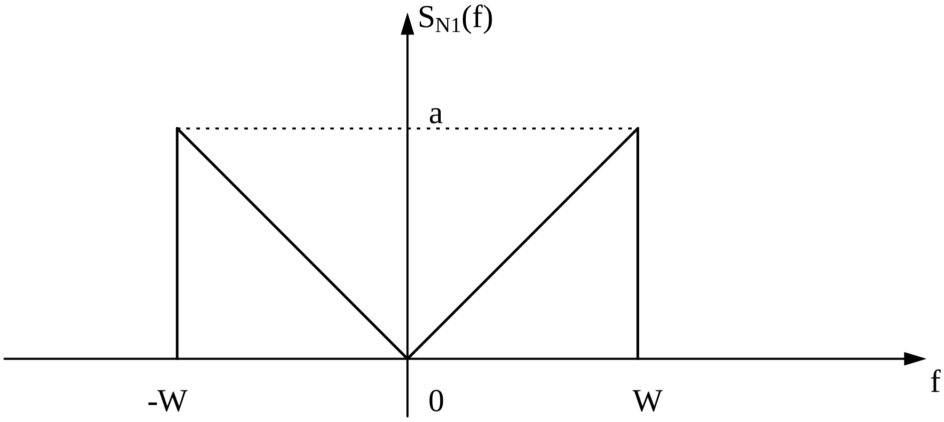
8.- Un par de procesos ruidosos $n_1(t)$ y $n_2(t)$ están relacionados por:

$$n_2(t) = n_1(t)\cos(2\pi f_c t + \theta) - n_1(t)\sin(2\pi f_c t + \theta)$$

donde f_c es una constante y θ es una variable aleatoria definida por:

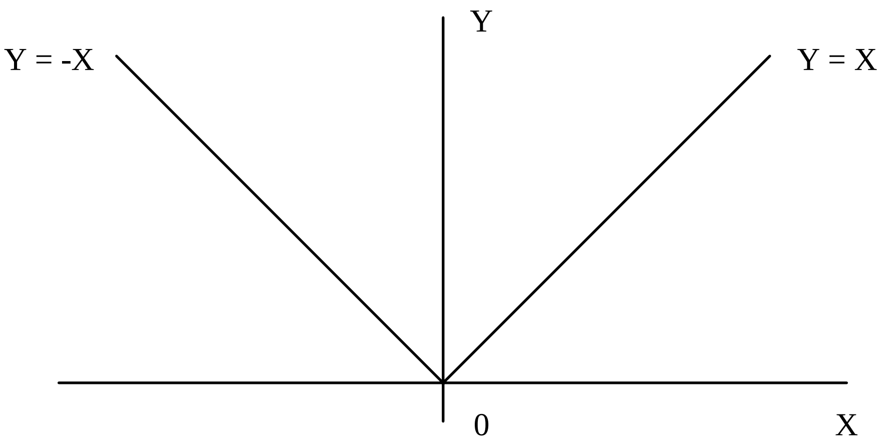
$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{para } 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases}$$

El proceso de ruido $n_1(t)$ es estacionario en sentido amplio y su densidad espectral de potencia es:



Encontrar y dibujar la densidad espectral de potencia de $n_2(t)$.

9.- Un proceso gaussiano X(t) de media cero y varianza σ^2 se pasa por un sistema rectificador cuya relación entrada salida es la que se muestra en la siguiente figura:

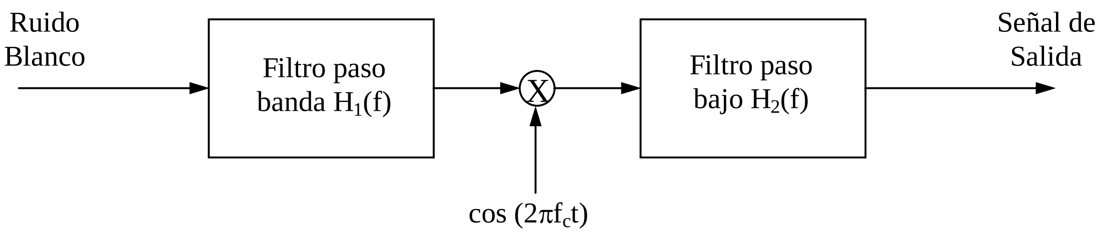


a) Mostrar que la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria $Y(t_k)$ obtenida observando el proceso Y(t) en el instante t_k es:

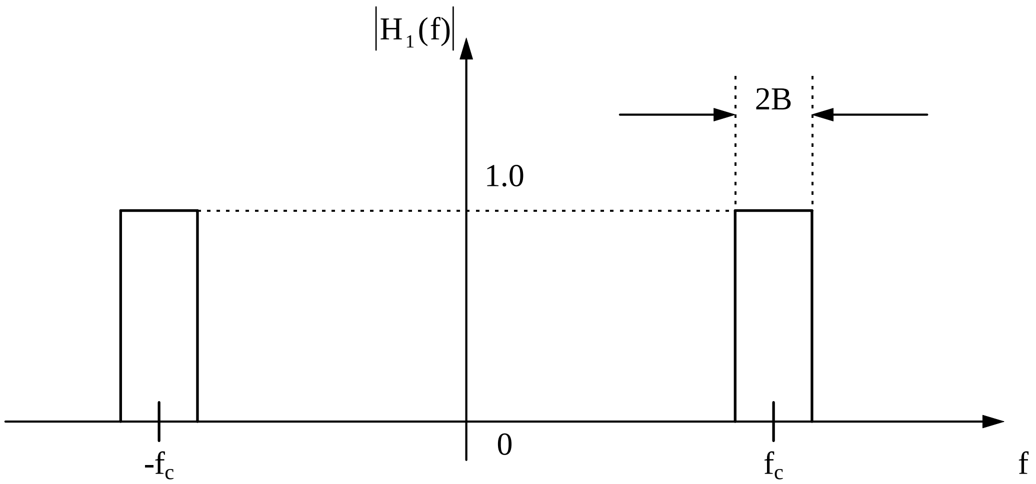
$$f_{Y(t_k)}(y) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\sigma}\exp\left(-\dfrac{y^2}{2\sigma^2}\right) & \text{para } y \geq 0 \\ 0 & \text{para } y < 0 \end{cases}$$

b) Determina la media y la varianza de la variable aleatoria $Y(t_k)$.

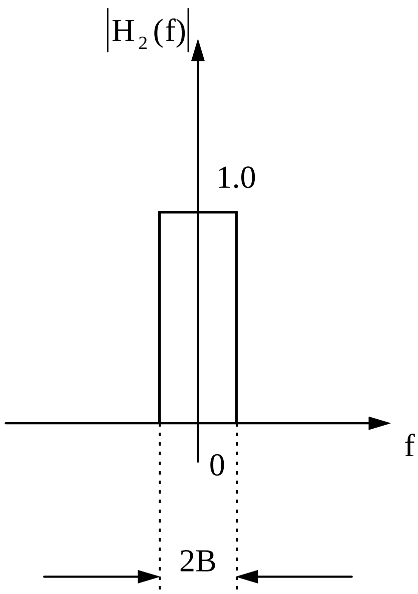
10.- Considerar un proceso de ruido blanco gaussiano de media cero y densidad espectral de potencia $N_0/2$ que se aplica a la entrada del sistema que se muestra en la siguiente figura:



siendo el filtro paso banda:



y el filtro paso bajo:



a) Encontrar la densidad espectral de potencia del proceso de salida del sistema.

b) ¿Cuál es la media y la varianza de este proceso de salida?