TRATAMIENTO Y TRANSMISIÓN DE SEÑALES

SOLUCIÓN PROBLEMAS TEMA 1

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE COMUNICACIÓN

1.

a) Señal periódica y por tanto de potencia.

$$P = \frac{A^2}{2}$$

b) Señal finita en el tiempo y por tanto de energía.

$$E = \frac{A^2 T_0}{2}$$

c) Señal que decae exponencialmente, de energía.

$$E = \frac{A^2}{2a}$$

d) Señal periódica y por tanto de potencia.

$$P = 13$$

2.

a)

$$g_k = \int_0^T g(t)\phi_k(t)dt$$

b)

$$E_{\min} = \frac{1}{T}\left(E_g - E_n\right)$$

siendo E_g la energía de la señal original

$$E_g = \int_0^T g^2(t)dt$$

y E_n la energía de la aproximación con n términos que vale

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} g_k^2$$

El error cuadrático medio mínimo es el cociente entre la diferencia entre la energía de la señal original y de la aproximación y la duración temporal de la señal T. Como las energías son positivas y E_n va aumentando al ir añadiendo más términos, el error cuadrático medio mínimo va disminuyendo de forma monótona.

3.

a)

$$G(f) = \frac{AT}{2}\left[\mathrm{sinc}\left(fT - \frac{1}{2}\right) + \mathrm{sinc}\left(fT + \frac{1}{2}\right)\right]$$

b)

$$G(f) = \frac{AT}{2}\left[\mathrm{sinc}\left(fT - \frac{1}{2}\right) + \mathrm{sinc}\left(fT + \frac{1}{2}\right)\right]\exp(-j\pi fT)$$

c)

$$G(f) = \frac{AT|a|}{2}\left[\mathrm{sinc}\left(afT - \frac{1}{2}\right) + \mathrm{sinc}\left(afT + \frac{1}{2}\right)\right]\exp(-j\pi afT)$$

d)

$$G(f) = -\frac{AT}{2}\left[\mathrm{sinc}\left(fT - \frac{1}{2}\right) + \mathrm{sinc}\left(fT + \frac{1}{2}\right)\right]\exp(j\pi fT)$$

e)

$$G(f) = jAT\left[\mathrm{sinc}(2fT + 1) - \mathrm{sinc}(2fT - 1)\right]$$

4. $Y(t) = x(t)x(t)$ que en el dominio de la frecuencia es $Y(t) = X(f) * X(f)$ puesto que $X(f)$ está limitado a $|f| < W$ a partir de la integral de convolución en el dominio de la frecuencia se puede ver que $Y(f)$ es cero fuera de $|f| < 2W$.

5. Usando la definición límite de $\delta(t)$ a partir de $\Pi(t)$ según

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right)$$

a)

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

b)

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

c)

$$g(t)\delta(t-t_0) = g(t_0)\delta(t-t_0)$$

6.

a)

$$G(f) = -\frac{1}{4\pi^2 f^2}\sum_i k_i \exp(-j2\pi f t_i)$$

b)

$$G(f) = \frac{A}{\pi^2 f^2 (t_b - t_a)}\sin[\pi f(t_a + t_b)]\sin[\pi f(t_b - t_a)]$$

7.

$$S_g(f) = \frac{A^2}{16}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{n - f_c T_0}{2}\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{n + f_c T_0}{2}\right)\right]^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

8.

$$\Psi_g(f) = \frac{4A^2 T^2 \cos^2(\pi f T)}{\pi^2 (4T^2 f^2 - 1)^2}$$

9.

a)

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2a}\exp(-a|\tau|)$$

b)

$$R_g(\tau) = \frac{1}{a}\exp(-a|\tau|)(1 + a|\tau|)$$

c)

$$R_g(\tau) = \frac{1}{a}\exp(-a|\tau|)(1 - a|\tau|)$$

10.

a)

$$R_g(\tau) = A_0^2 + \frac{A_1^2}{2}\cos(2\pi f_1 \tau) + \frac{A_2^2}{2}\cos(2\pi f_2 \tau)$$

b)

$$R_g(0) = A_0^2 + \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2}$$

c) Se ha perdido la información de fase θ.

11.

a)

$$R_{12}(\tau) = \begin{cases} A^2T & |\tau| < \frac{3T}{2} \\ \frac{5A^2T}{2}\left(1 - \frac{2|\tau|}{5T}\right) & \frac{3T}{2} \leq |\tau| \leq \frac{5T}{2} \\ 0 & |\tau| > \frac{5T}{2} \end{cases}$$

b)

$$R_{21}(\tau) = R_{12}(\tau)$$

12.

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_1\left(\frac{n}{T_0}\right) G_2^*\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

13.

a)

$$\mathrm{SNR}_i = 50 \text{ dB}$$

b)

$$P_{S_o} = 5 \text{ dBm}$$

c)

$$P_{N_o} = -3{,}67 \text{ dBm}$$

d)

$$\mathrm{SNR}_o = 8{,}67 \text{ dB}$$

e)

$$41{,}33 \text{ dB}$$

14.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(nf_0) \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right)$$

con $H(f)$ la función de transferencia del sistema dada por

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

y c_n los coeficientes de la serie de Fourier de la señal de entrada $x_p(t)$ dados por

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t)\exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right)dt$$

15.

a)

$$y(t) = a_0 g(t-t_0) + \frac{a_1}{2} g\left(t-t_0+\frac{1}{2B}\right) + \frac{a_1}{2} g\left(t-t_0-\frac{1}{2B}\right)$$

b)

$$y(t) = a_0 g(t-t_0) + \frac{a_0 b_1}{2} g\left(t-t_0+\frac{1}{2B}\right) - \frac{a_0 b_1}{2} g\left(t-t_0-\frac{1}{2B}\right)$$

16.

$$\Psi_y(f) = A^2B^2T^2\mathrm{sinc}^2(fT)\Pi\left(\frac{fT}{2}\right)$$

17.

a)

$$g_+(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)\exp\left(\frac{j\pi t}{2}\right)$$

$$g_-(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)\exp\left(-\frac{j\pi t}{2}\right)$$

$$\tilde{g}(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$g_c(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right) \qquad g_s(t) = 0$$

$$a(t) = \left|\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)\right| \qquad \phi(t) = \frac{\pi}{2}\left\{\mathrm{sign}\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)\right] + 1\right\}$$

b)

$$g_+(t) = [1 + k\cos(2\pi f_m t)]\exp(j2\pi f_c t)$$

$$g_-(t) = [1 + k\cos(2\pi f_m t)]\exp(-j2\pi f_c t)$$

$$\tilde{g}(t) = [1 + k\cos(2\pi f_m t)]$$

$$g_c(t) = [1 + k\cos(2\pi f_m t)] \qquad g_s(t) = 0$$

$$a(t) = |1 + k\cos(2\pi f_m t)| \qquad \phi(t) = \frac{\pi}{2}\{\mathrm{sign}[1 + k\cos(2\pi f_m t)] + 1\}$$

18.

$$G_c(f) = \frac{1}{2}[G_+(f + f_c) + G_+^*(-f + f_c)]$$

$$G_s(f) = \frac{1}{2j}[G_+(f + f_c) - G_+^*(-f + f_c)]$$

19.

a)

$$X(f) = \frac{AT}{2j}[\text{sinc}(fT - f_cT) - \text{sinc}(fT + f_cT)]$$

b) Suponiendo que $f_c \gg \frac{1}{T}$

$$\tilde{X}(f) = -jAT\text{sinc}(fT)$$

c)

$$\tilde{H}(f) = \cos^2\left(\frac{\pi Tf}{4}\right)\Pi\left(\frac{Tf}{4}\right)$$

d)

$$\tilde{Y}(f) = -\frac{jAT}{2}\left[\text{sinc}(fT) + \frac{3}{4}\text{sinc}\left(\frac{3fT}{2}\right) + \frac{1}{4}\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)\right]\Pi\left(\frac{Tf}{4}\right)$$

e)

$$Y(f) = \frac{AT}{4j}\left\{\left[\text{sinc}(fT) + \frac{3}{4}\text{sinc}\left(\frac{3fT}{2}\right) + \frac{1}{4}\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)\right]\Pi\left(\frac{Tf}{4}\right)\right\} * [\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)]$$

f)

$$y(t) = \frac{2A}{T}\left\{\left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{2t}{3T}\right) + \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{2t}{T}\right)\right] * \text{sinc}\left(\frac{4t}{T}\right)\right\}\sin(2\pi f_c t)$$

20.

a)

$$\tau_p = \frac{3}{2\pi}\mu\text{s}$$

b)

$$\tau_g = \frac{10}{2\pi}\mu\text{s}$$

21.

$$y(t) = Kx_c(t - \tau_g)\cos[2\pi f_c(t - \tau_p)] - Kx_s(t - \tau_g)\sin[2\pi f_c(t - \tau_p)]$$