TRATAMIENTO Y TRANSMISIÓN DE SEÑALES

SOLUCIÓN PROBLEMAS TEMA 3

MODULACIÓN EN AMPLITUD

1.

a)

$$i = -I_0 \frac{v}{V_T} + I_0 \frac{v^2}{2V_T^2} - I_0 \frac{v^3}{6V_T^3}$$

b) Para $v(t) = k\cos(2\pi f_m t) + k\cos(2\pi f_c t)$, la expresión algebraica es:

$$\frac{i(t)}{I_0} = \frac{k^2}{2V_T^2} - \left(\frac{k}{V_T} + \frac{3k^3}{8V_T^3}\right)[\cos(2\pi f_m t) + \cos(2\pi f_c t)] + \frac{k^2}{4V_T^2}[\cos(4\pi f_m t) + \cos(4\pi f_c t)]$$

$$-\frac{k^3}{24V_T^3}[\cos(6\pi f_m t) + \cos(6\pi f_c t)] + \frac{k^2}{2V_T^2}\{\cos[2\pi(f_c + f_m)t] + \cos[2\pi(f_c - f_m)t]\}$$

$$-\frac{k^3}{8V_T^3}\{\cos[2\pi(f_c+2f_m)t] + \cos[2\pi(f_c-2f_m)t] + \cos[2\pi(2f_c+f_m)t] + \cos[2\pi(2f_c-f_m)t]\}$$

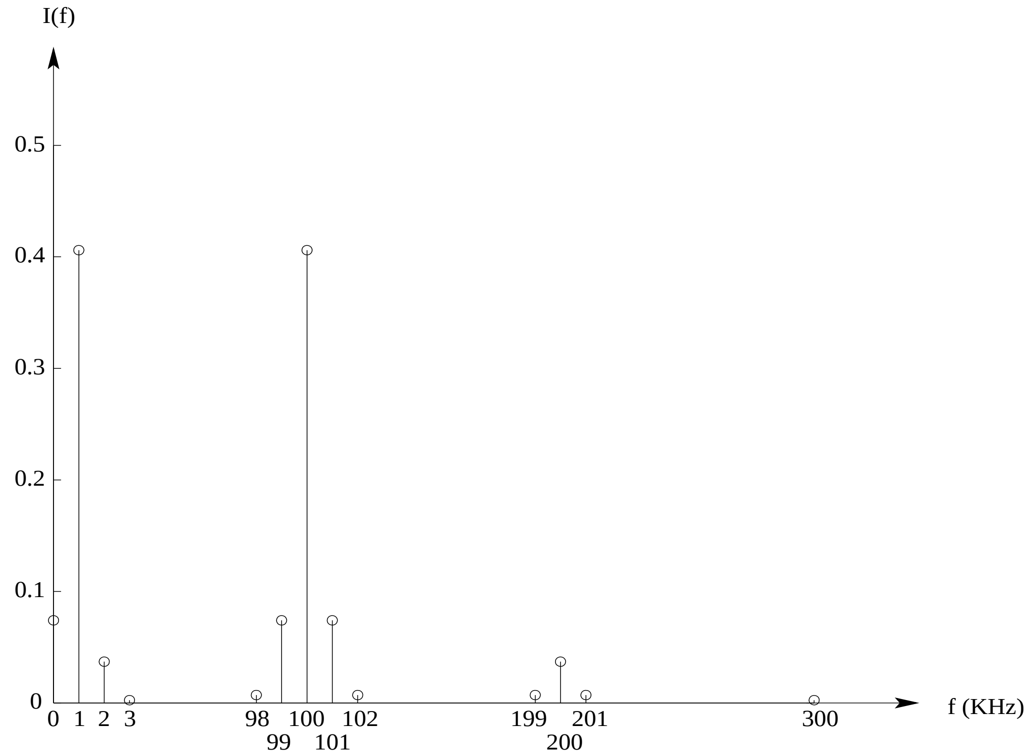
y la expresión numérica:

$$\frac{i(t)}{I_0} = 0{,}074 - 0{,}406[\cos(2\pi f_m t) + \cos(2\pi f_c t)] + 0{,}037[\cos(4\pi f_m t) + \cos(4\pi f_c t)]$$

$$-0{,}024[\cos(6\pi f_m t) + \cos(6\pi f_c t)] + 0{,}074\{\cos[2\pi(f_c + f_m)t] + \cos[2\pi(f_c - f_m)t]\}$$

$$-0{,}0071\{\cos[2\pi(f_c+2f_m)t] + \cos[2\pi(f_c-2f_m)t] + \cos[2\pi(2f_c+f_m)t] + \cos[2\pi(2f_c-f_m)t]\}$$

En la siguiente figura se puede ver el espectro para frecuencias positivas:



c) Necesitamos extraer únicamente las componentes a 99, 100 y 101 KHz correspondientes a $f_c - f_m$, f_c y $f_c + f_m$. La frecuencia central del filtro paso banda es $f_c = 100$ KHz y el ancho de banda B_w dado por:

$$2 \text{ KHz} < B_w < 4 \text{ KHz}$$

d) La señal a la salida del filtro paso banda viene dada por la expresión algebraica:

$$y(t) = -I_0 \frac{k}{V_T} \left(1 + \frac{3k^2}{8V_T^2}\right) \left[1 - \frac{8V_T k}{8V_T^2 + 3k^2} \cos(2\pi f_m t)\right] \cos(2\pi f_c t)$$

y la expresión numérica:

$$y(t) = -0{,}406 I_0 [1 - 0{,}346 \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_c t)$$

luego el índice de modulación es:

$$\mu = \frac{8V_T k}{8V_T^2 + 3k^2} = 0{,}364$$

es decir, un factor de modulación del 36,4 %.

2.

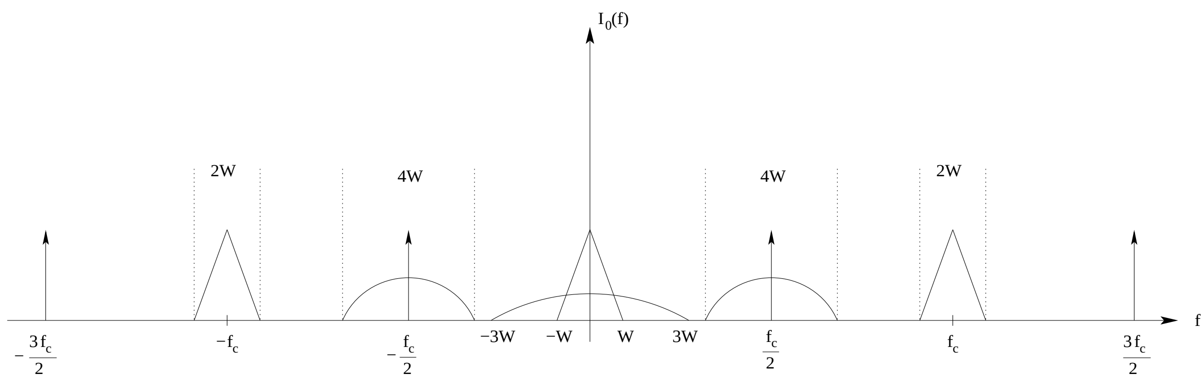
a) Para una señal portadora a frecuencia $f_c/2$ la señal a la entrada es:

$$v_i(t) = A_c \cos(\pi f_c t) + m(t)$$

y la señal a la salida:

$$i_0(t) = \left(a_1 + \frac{3}{2} a_3 A_c^2\right) m(t) + a_3 m^3(t) + \left(A_c a_1 + \frac{3}{4} a_3 A_c^3\right) \cos(\pi f_c t)$$
$$+3 a_3 A_c \cos(\pi f_c t) m^2(t) + \frac{3}{2} a_3 A_c^2 \cos(\pi f_c t) m(t) + \frac{a_3 A_c^3}{4} \cos(3\pi f_c t)$$

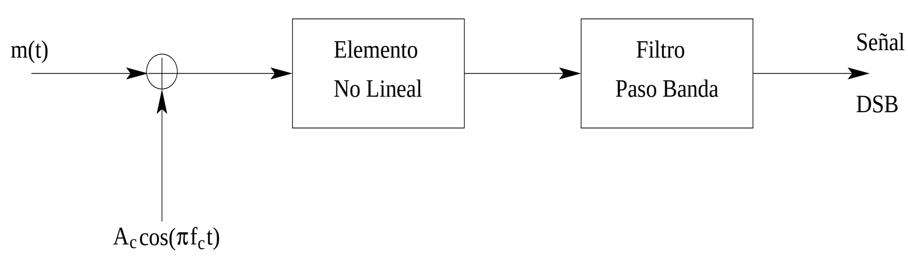
En la siguiente figura se puede ver esquemáticamente el espectro de esta señal:



Para extraer una señal DSB centrada en f_c se puede utilizar un filtro paso banda con frecuencia central f_c y ancho de banda B_w que cumpla:

$$2W < B_w < \frac{f_c}{2} - 2W$$

con la restricción $f_c > 6W$. Usando el esquema de la siguiente figura:



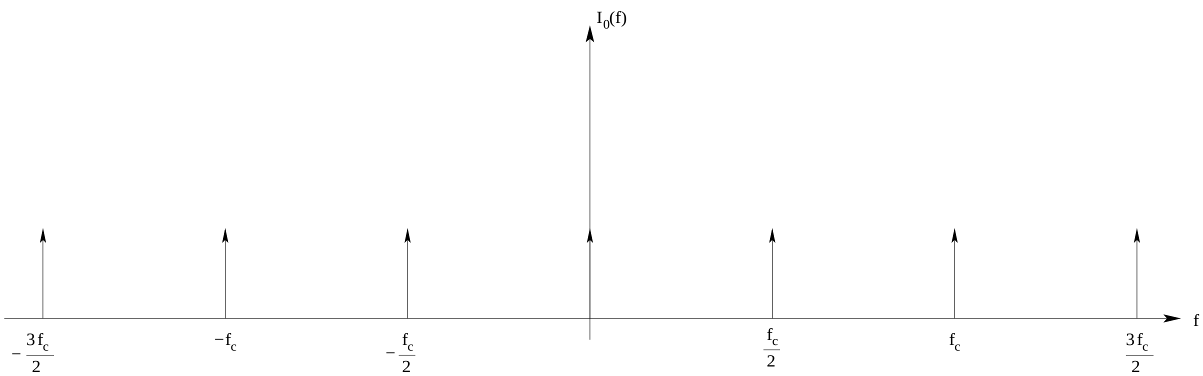
la señal a la salida será la señal DSB:

$$s(t) = \frac{3}{2} a_3 A_c^2 \cos(2\pi f_c t) m(t)$$

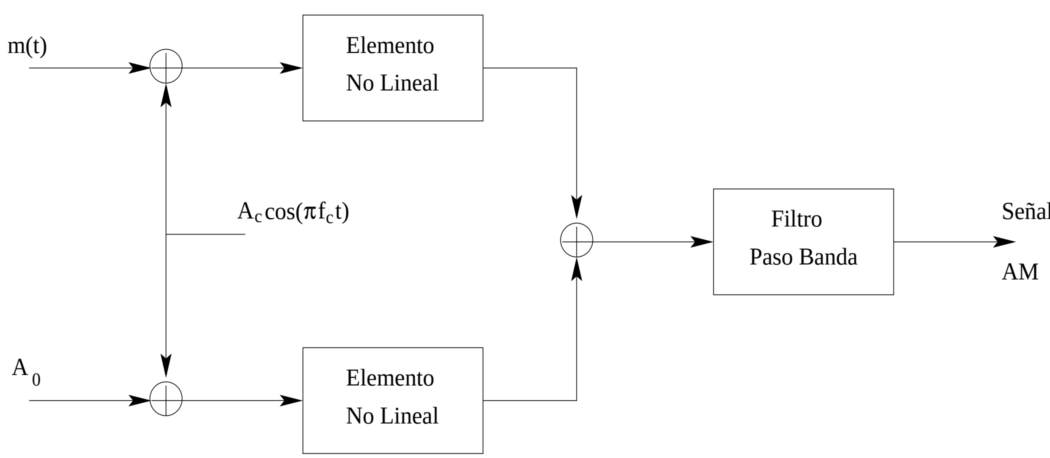
b) Repitiendo el apartado anterior sustituyendo la señal moduladora $m(t)$ por una constante A_0 se tiene:

$$i_0(t) = \left(a_1 A_0 + \frac{3}{2} a_3 A_c^2 A_0 + a_3 A_0^3\right) + \left(A_c a_1 + \frac{3}{4} a_3 A_c^3 + 3 a_3 A_c A_0^2\right) \cos(\pi f_c t)$$
$$+ \frac{3}{2} a_3 A_c^2 A_0 \cos(2\pi f_c t) + \frac{a_3 A_c^3}{4} \cos(3\pi f_c t)$$

En la siguiente figura se puede ver esquemáticamente el espectro de esta señal:



Si sumamos esta señal con la anterior y usando el mismo filtro paso banda tendremos el esquema de la siguiente figura:



lo que dará lugar a la siguiente señal AM:

$$s(t) = \frac{3}{2} a_3 A_c^2 [A_0 + m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

3.

a) Se tiene que:

$$v_1(t) = A_c[1 + k_a m(t)]|\cos(2\pi f_c t)|$$

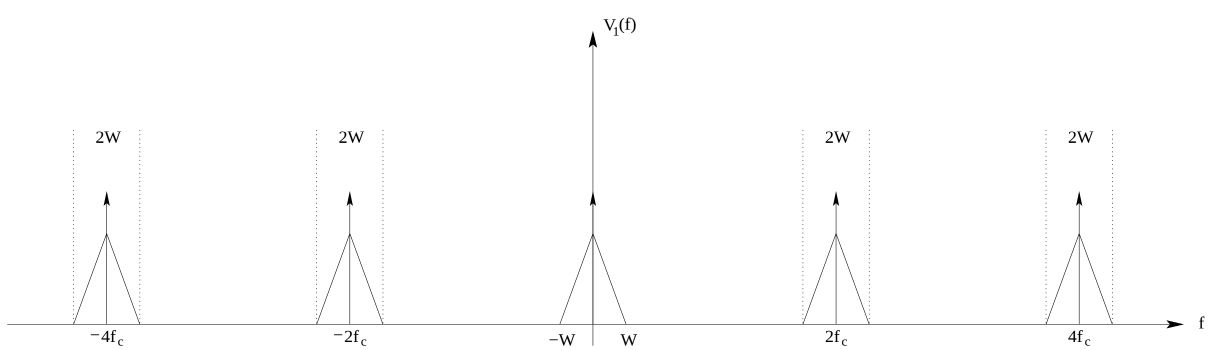
donde $|\cos(2\pi f_c t)|$ es una señal periódica con frecuencia fundamental $2f_c$ que se puede desarrollar en serie de Fourier obteniéndose:

$$|\cos(2\pi f_c t)| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos(4\pi f_c t)$$

por lo que:

$$v_1(t) = \frac{2A_c}{\pi}[1 + k_a m(t)] + \frac{4A_c}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}[1 + k_a m(t)]\cos(4\pi f_c t)$$

cuyo espectro se puede ver esquemáticamente en la siguiente figura:



b) Tras el filtro paso bajo se eliminan todos los términos de frecuencia elevada del sumatorio quedando únicamente el primer término, por lo que:

$$v_2(t) = \frac{2A_c}{\pi}[1 + k_a m(t)]$$

4. Utilizando un detector coherente. Si la señal modulada es:

$$s(t) = A_c[1 + k_a m(t)]\cos(2\pi f_c t)$$

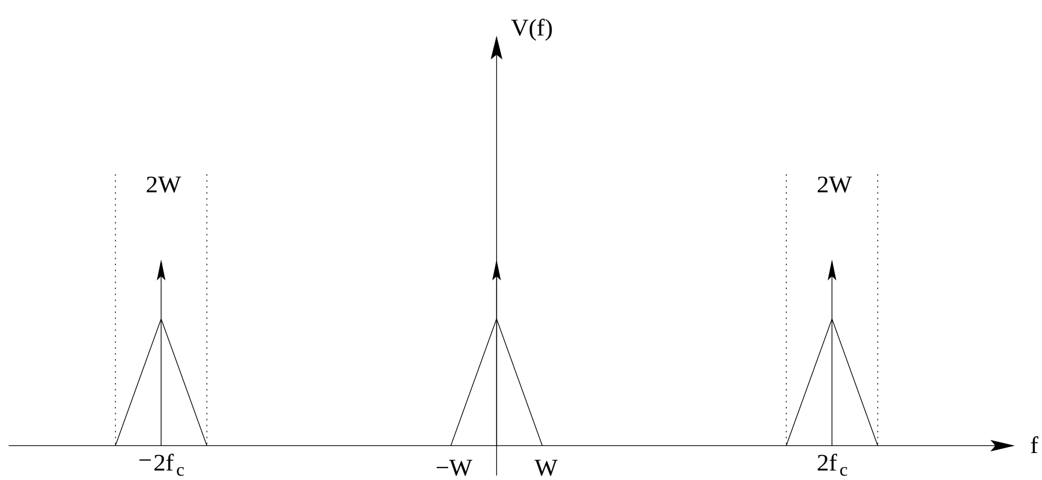
la señal tras el modulador producto, usando la portadora generada localmente:

$$A'_c \cos(2\pi f_c t)$$

es:

$$v(t) = \frac{A_c A'_c}{2}[1 + k_a m(t)] + \frac{A_c A'_c}{2}[1 + k_a m(t)]\cos(4\pi f_c t)$$

que se puede ver gráficamente en la siguiente figura:



Ahora mediante un filtro paso bajo de ancho de banda W se tiene la señal a la salida del detector coherente:

$$y(t) = \frac{A_c A'_c}{2}[1 + k_a m(t)]$$

La componente continua se puede eliminar fácilmente.

5.

a) La señal modulada es:

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) m(t)$$

La portadora generada localmente con un error frecuencial Δf es:

$$A_c' \cos[2\pi(f_c + \Delta f)t]$$

La señal a la salida del modulador producto:

$$v(t) = \frac{A_c A_c'}{2} \cos(2\pi \Delta f t) m(t) + \frac{A_c A_c'}{2} \cos[2\pi(2f_c + \Delta f)t] m(t)$$

Tras el filtro paso bajo de ancho de banda W la señal es:

$$y(t) = \frac{A_c A_c'}{2} \cos(2\pi \Delta f t) m(t)$$

La señal demodulada es una señal DSB para la frecuencia portadora Δf.

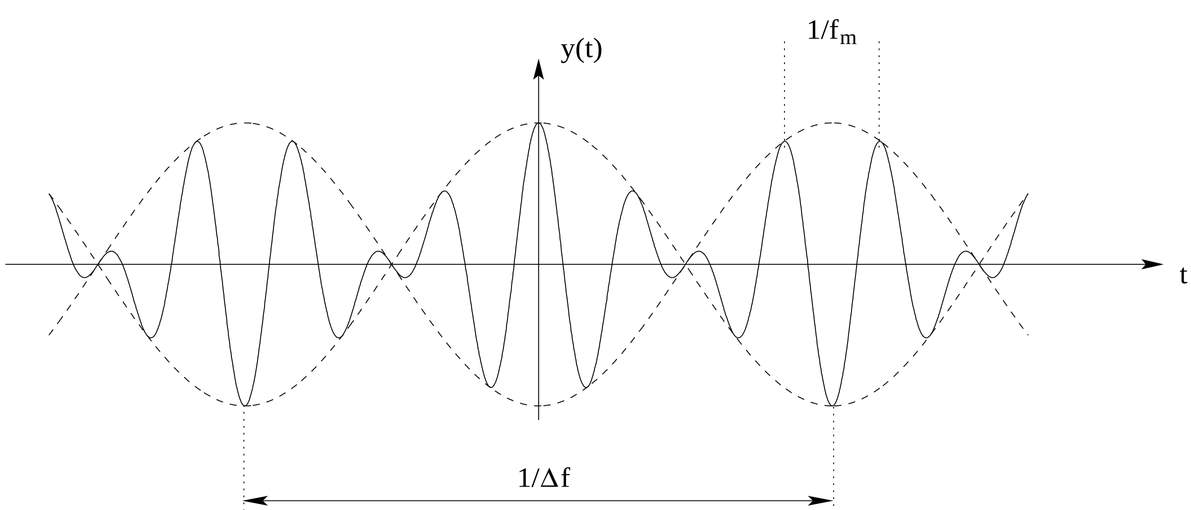
b) Para una señal moduladora:

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

la señal a la salida del detector coherente es:

$$y(t) = \frac{A_c A_c' A_m}{2} \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi \Delta f t)$$

En la siguiente figura se puede ver un ejemplo de esta señal con efecto batido:

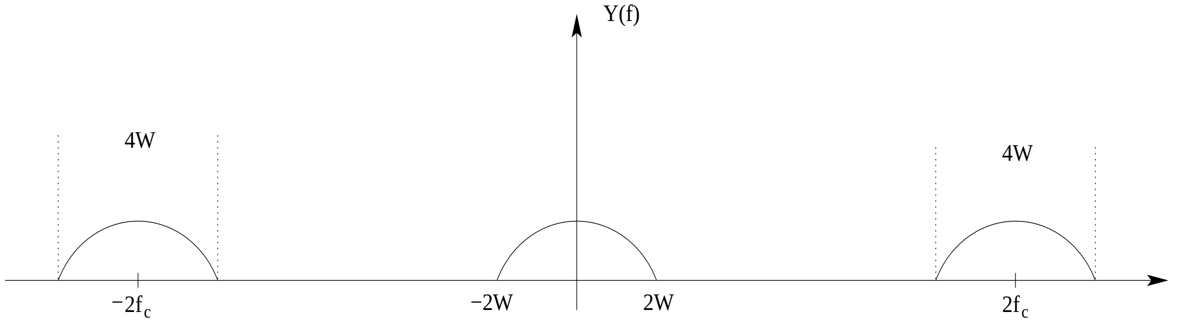


6.

a) El espectro de la señal a la salida es:

$$Y(f) = \frac{A_c^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} M(\lambda)M(f-\lambda)d\lambda + \frac{A_c^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} M(\lambda)M(f-2f_c-\lambda)d\lambda$$
$$+\frac{A_c^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} M(\lambda)M(f+2f_c\lambda)d\lambda$$

donde $M(f)$ es el espectro de la señal moduladora. En la siguiente figura se puede ver esquemáticamente este espectro:



b) Se tiene que:

$$Y(2f_c) = Y(-2f_c) = \frac{A_c^2 E}{4}$$

por lo que se puede hacer la aproximación, para Δf pequeño:

$$V(f) \approx \frac{A_c^2 E}{4}\left[\Pi\left(\frac{f-2f_c}{\Delta f}\right) + \Pi\left(\frac{f+2f_c}{\Delta f}\right)\right]$$

Usando la definición límite de la función Delta de Dirac:

$$\delta(f) = \lim_{\Delta f \longrightarrow 0} \frac{1}{\Delta f}\Pi\left(\frac{f}{\Delta f}\right)$$

y tomando transformada inversa:

$$v(t) \approx \frac{A_c^2 E \Delta f}{2}\cos(4\pi f_c t)$$

7. El espectro de la señal transmitida es:

$$S(f) = \frac{A_c}{2}[M_1(f - f_c) + M_1(f + f_c)] + \frac{A_c}{2j}[M_2(f - f_c) - M_2(f + f_c)]$$

donde $M_1(f)$ y $M_2(f)$ son los espectros de las moduladoras. El espectro de la señal recibida viene dado por:

$$R(f) = H(f)S(f)$$

Para recuperar la primera señal moduladora se multiplica la señal recibida por $A'_c \cos(2\pi f_c t)$ y se filtra paso bajo obteniéndose el espectro:

$$\begin{aligned} Y_1(f) &= \frac{A_c A'_c}{4} M_1(f)[H(f - f_c) + H(f + f_c)] + \frac{A_c A'_c}{4j} M_2(f)[H(f - f_c) - H(f + f_c)] \\ &= \frac{A_c A'_c}{2} M_1(f)H(f - f_c) \end{aligned}$$

Para que se cumpla la última igualdad, teniendo en cuenta que $H(f) = H^*(-f)$, es necesario que:

$$H(f - f_c) = H(f + f_c) = H^*(f_c - f) \text{ para } |f| < W$$

Para recuperar la segunda señal moduladora se multiplica la señal recibida por $A'_c \sin(2\pi f_c t)$ y se filtra paso bajo obteniéndose el espectro:

$$\begin{aligned} Y_2(f) &= \frac{A_c A'_c}{4j} M_1(f)[H(f - f_c) - H(f + f_c)] + \frac{A_c A'_c}{4} M_2(f)[H(f - f_c) + H(f + f_c)] \\ &= \frac{A_c A'_c}{2} M_2(f)H(f - f_c) \end{aligned}$$

Para que se cumpla la última igualdad, teniendo en cuenta que $H(f) = H^*(-f)$, es necesario que:

$$H(f - f_c) = H(f + f_c) = H^*(f_c - f) \text{ para } |f| < W$$

8. La envolvente natural ideal es:

$$a(t) = |\tilde{s}(t)| = [A_c + m(t)]\sqrt{1 + \left(\frac{\hat{m}(t)}{A_c + m(t)}\right)^2}$$

Si el término que aparece elevado al cuadrado es pequeño comparado con la unidad, entonces:

$$a(t) \approx [A_c + m(t)]\left(1 + \frac{\hat{m}^2(t)}{2[A_c + m(t)]^2}\right)$$

La distorsión es:

$$d(t) = 1 + \frac{\hat{m}^2(t)}{2[A_c + m(t)]^2}$$

Si $A_m = \text{máx}\{\text{máx}[m(t)], \text{máx}[\hat{m}(t)]\}$, la distorsión máxima posible será:

$$d_{\text{máx}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{A_m^2}{A_c^2 + A_m^2}$$

por lo que para no superar dicha distorsión máxima se tiene que cumplir que:

$$A_c > \frac{1 - \sqrt{2(d_{\text{máx}} - 1)}}{\sqrt{2(d_{\text{máx}} - 1)}}A_m$$

Por ejemplo para una distorsión máxima del 5 % se tiene que cumplir:

$$A_c > 2{,}16A_m$$

9.

a) La componente en fase es:

$$s_c(t) = \frac{1}{2} A_m A_c \cos(2\pi f_m t)$$

y la componente en cuadratura:

$$s_s(t) = \frac{1}{2} A_m A_c (1-2a) \sin(2\pi f_m t)$$

b) La envolvente natural ideal es:

$$a(t) = A_c \left(1 + \frac{1}{2} A_m \cos(2\pi f_m t)\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{1}{2} A_m (1-2a) \sin(2\pi f_m t)}{1 + \frac{1}{2} A_m \cos(2\pi f_m t)}\right)^2}$$

La distorsión será:

$$d(t) = \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{1}{2} A_m (1-2a) \sin(2\pi f_m t)}{1 + \frac{1}{2} A_m \cos(2\pi f_m t)}\right)^2}$$

c) El caso mejor es para $a = 0{,}5$ para el que $d(t) = 1$ (no hay distorsión), que corresponde a una señal AM pura.

El caso peor es para $a = 0$ ó para $a = 1$ para el que $|1-2a| = 1$ y la distorsión es máxima, que corresponde a SSB (USB para $a = 1$ y LSB para $a = 0$) con portadora.

10.

a) Si $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ y para $f_a > f_b$ la señal transmitida viene dada por:

$$s(t) = \sum_{k=1}^{4} [\cos(2\pi f_a t + \alpha_{k-1}) + \cos(2\pi f_b t + \beta_{k-1})] m_k(t)$$

En recepción para recuperar la moduladora i-ésima se multiplica por la portadora $\cos(2\pi f_a t + \alpha_{i-1}) + \cos(2\pi f_b t + \beta_{i-1})$ y se filtra paso bajo obteniéndose la señal:

$$y_i(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4} [\cos(\alpha_{k-1} - \alpha_{i-1}) + \cos(\beta_{k-1} - \beta_{i-1})] m_k(t)$$

Igualando esta señal a la moduladora deseada $m_i(t)$ se tiene que:

$$\cos(\alpha_{k-1} - \alpha_{i-1}) + \cos(\beta_{k-1} - \beta_{i-1}) = \begin{cases} 2 & i = k \\ \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Lo primero siempre es cierto, por lo que la condición necesaria y suficiente es:

$$\cos(\alpha_{k-1} - \alpha_{i-1}) + \cos(\beta_{k-1} - \beta_{i-1}) = 0 \text{ para } i \neq k$$

con k e i valiendo 1, 2, 3 y 4.
Esto da lugar a 6 ecuaciones con 6 incógnitas:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1) + \cos(\beta_1) &= 0 \\ \cos(\alpha_2) + \cos(\beta_2) &= 0 \\ \cos(\alpha_3) + \cos(\beta_3) &= 0 \\ \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \cos(\beta_1 - \beta_2) &= 0 \\ \cos(\alpha_1 - \alpha_3) + \cos(\beta_1 - \beta_3) &= 0 \\ \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + \cos(\beta_2 - \beta_3) &= 0 \end{aligned}$$

b) Para que el filtro paso bajo elimine los términos en la banda $f_a - f_b$ es necesario que $f_a - f_b > 2W$, es decir, las frecuencias f_a y f_b deben estar separadas al menos $2W$ (el doble del ancho de banda de las señales moduladoras). El ancho de banda de transmisión mínimo (para el caso $f_a - f_b = 2W$) es de:

$$B_T = 4W$$

por lo que es un sistema eficiente de transmisión ya que se transmiten cuatro señales moduladoras cada una de ellas de ancho de banda W por un ancho de banda total de $B_T = 4W$.