TRATAMIENTO Y TRANSMISIÓN DE SEÑALES

<u>SOLUCIÓN PROBLEMAS TEMA 4</u>

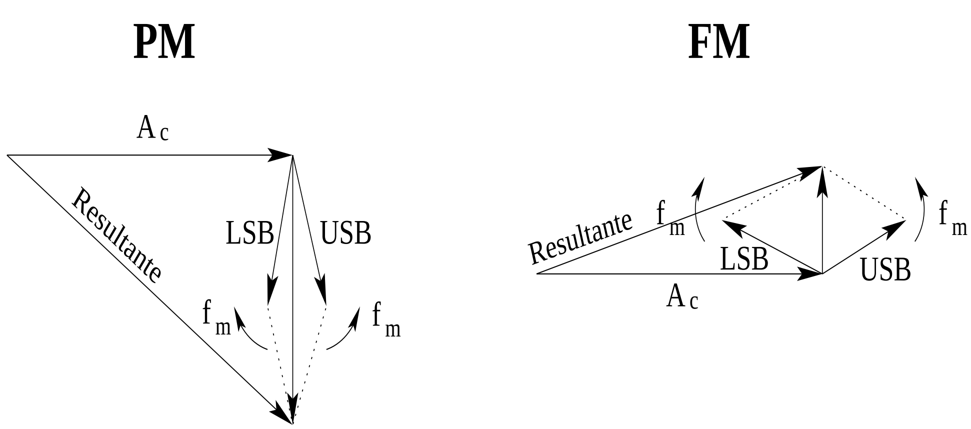
MODULACIONES ANGULARES

1.

a) La expresión del espectro es:

$$S(f) \approx \frac{A_c}{2}[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)] - \frac{A_c\beta_p}{4j}[\delta(f-f_c-f_m)+\delta(f+f_c+f_m)]$$
$$-\frac{A_c\beta_p}{4j}[\delta(f-f_c+f_m)+\delta(f+f_c-f_m)]$$

b) En la siguiente figura se puede ver el diagrama fasorial para PM y para FM:



En ambos casos la suma de las bandas laterales está en cuadratura con la portadora. Cuando en FM la suma de las bandas laterales toma su valor máximo, en PM es cero, por tanto, la diferencia entre ambos diagramas fasoriales es debido a un desfase de 90^0.

2. La expresión analítica del espectro es:

$$S_0(f) = \frac{A_c}{2} J_0(\beta)[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{A_c}{2} J_1(\beta)[\delta(f - f_c - f_m) + \delta(f + f_c + f_m)]$$

$$-\frac{A_c}{2} J_1(\beta)[\delta(f - f_c + f_m) + \delta(f + f_c - f_m)] + \frac{A_c}{2} J_2(\beta)[\delta(f - f_c - 2f_m) + \delta(f + f_c + 2f_m)]$$

$$+\frac{A_c}{2} J_2(\beta)[\delta(f - f_c + 2f_m) + \delta(f + f_c - 2f_m)]$$

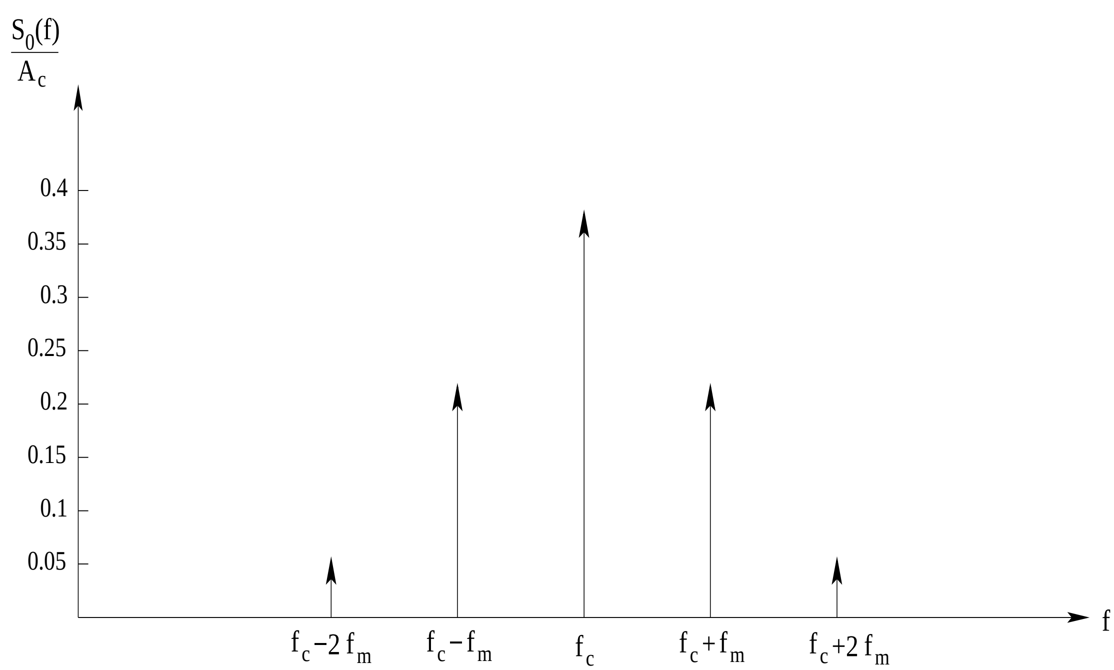
La expresión numérica:

$$\frac{S_0(f)}{A_c} = 0{,}382[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + 0{,}22[\delta(f - f_c - f_m) + \delta(f + f_c + f_m)]$$

$$-0{,}22[\delta(f - f_c + f_m) + \delta(f + f_c - f_m)] + 0{,}058[\delta(f - f_c - 2f_m) + \delta(f + f_c + 2f_m)]$$

$$+0{,}058[\delta(f - f_c + 2f_m) + \delta(f + f_c - 2f_m)]$$

En la siguiente figura se puede ver la amplitud del espectro normalizado con respecto a la amplitud de la portadora A_c:

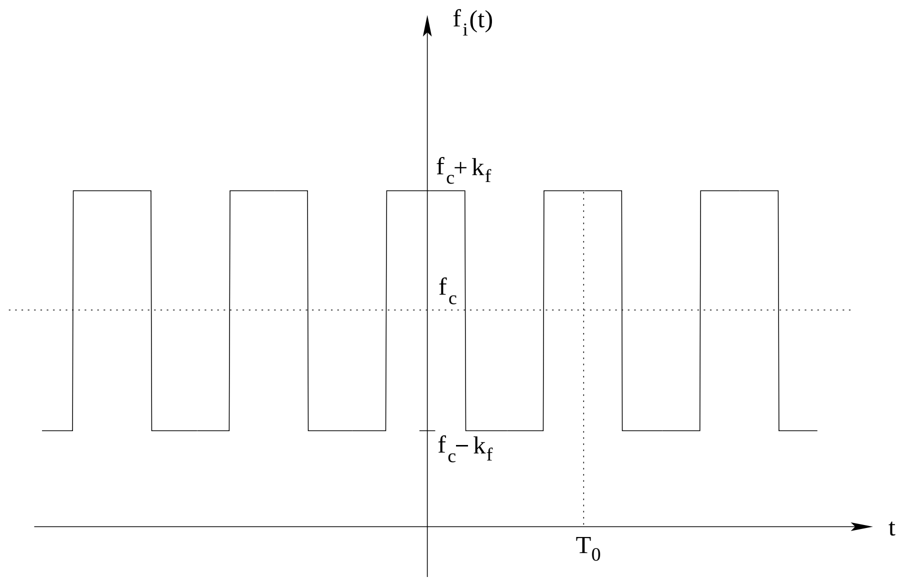


3.

a) La frecuencia instantánea viene dada por:

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

En la siguiente figura se puede ver gráficamente:



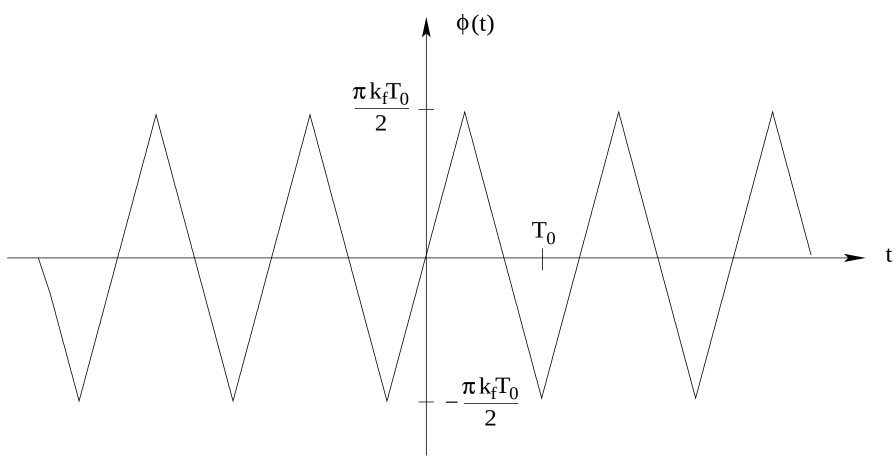
b) La fase instantánea viene dada por:

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \phi(t)$$

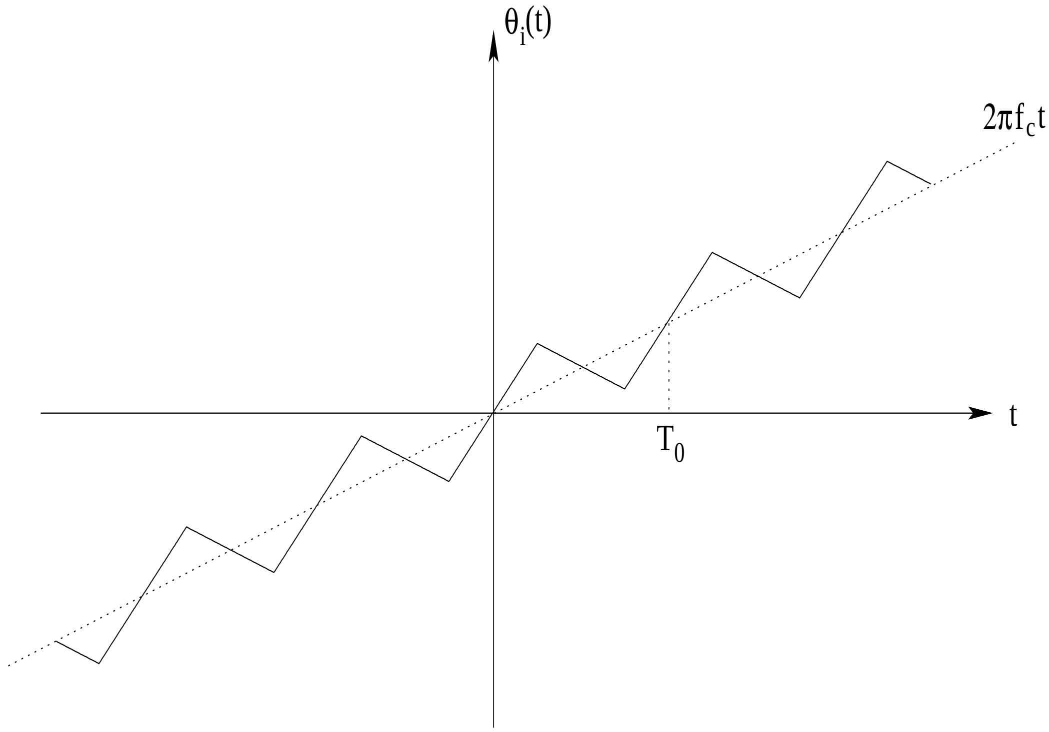
donde:

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int m(t)dt$$

La fase $\phi(t)$ se puede ver gráficamente en la siguiente figura:



y la fase instantánea en la figura:



c) La envolvente compleja es periódica con frecuencia fundamental $f_0 = 1/T_0$ y se puede desarrollar en serie de Fourier según la expresión:

$$\tilde{s}(t) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\text{sinc}\left(\frac{\beta - n}{2}\right) + (-1)^n \text{sinc}\left(\frac{\beta + n}{2}\right) \right] \exp(j2\pi n f_0 t)$$

por lo que la señal modulada se puede poner:

$$s(t) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\text{sinc}\left(\frac{\beta - n}{2}\right) + (-1)^n \text{sinc}\left(\frac{\beta + n}{2}\right) \right] \cos(2\pi f_c t + 2\pi n f_0 t)$$

4.

a) La expresión de la transformada de Fourier es:

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(\beta_1) J_n(\beta_2) [\delta(f + f_c + mf_1 + mf_2) + \delta(f - f_c - mf_1 - mf_2)]$$

En la siguiente tabla (como es simétrica sólo se muestra para $|m| > |n|$) se muestran los valores de amplitudes correspondientes a $J_m(\beta_1)J_n(\beta_2)$ cuyo módulo sea mayor que 0,01 para los diferentes valores de m y n:

$\|m\|$ / $\|n\|$	0	1	2	3	4
0	0,05	0,13	0,08	0,03	-
1		0,33	0,2	0,07	0,02
2			0,12	0,05	0,01
3				0,02	-

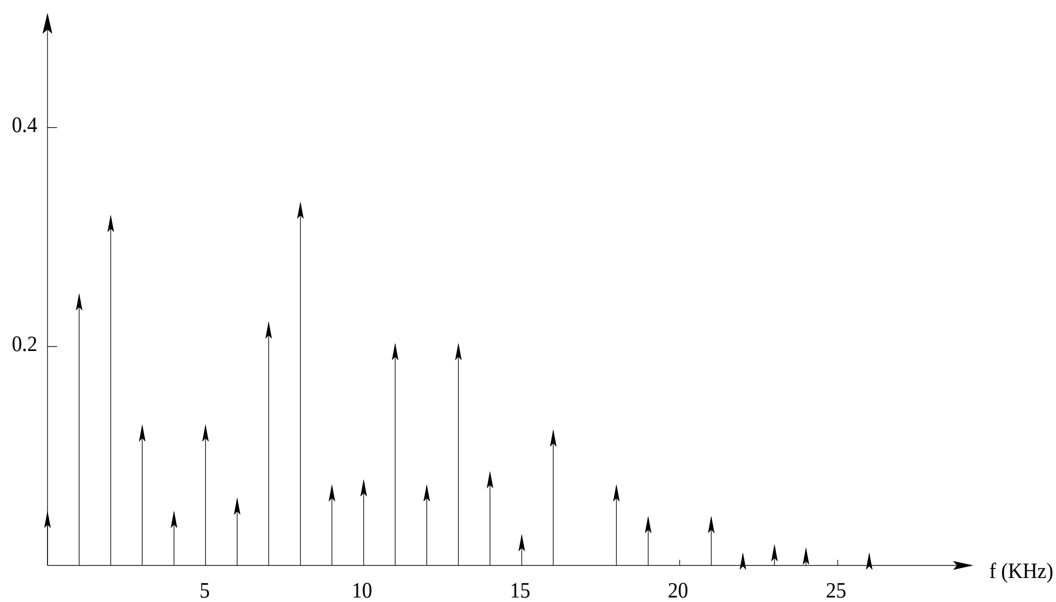
En la siguiente tabla se muestran las frecuencias $mf_1 + nf_2$, en KHz, para diferentes valores de m y n (sólo para cuando $|J_m(\beta_1)J_n(\beta_2)|$ sea mayor que 0,01):

$\|m\|$ / $\|n\|$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	-	-	-22	-17	-	-7	-2	-	-
-3	-	-24	-19	-14	-9	-4	1	6	-
-2	-26	-21	-16	-11	-6	-1	4	9	14
-1	-23	-18	-13	-8	-3	2	7	12	17
0	-	-15	-10	-5	0	5	10	15	-
1	-17	-12	-7	-2	3	8	13	18	23
2	-14	-9	-4	1	6	11	16	21	26
3	-	-6	-1	4	9	14	19	24	-
4	-	-	2	7	-	17	22	-	-

Teniendo en cuenta las dos tablas anteriores y que en la tabla de frecuencias hay valores repetidos, se tiene la siguiente tabla de amplitudes para frecuencias positivas correspondientes a bandas laterales superiores (frecuencias ya ordenadas, en KHz, referidas a la frecuencia portadora):

Frecuencia	Amplitud	Frecuencia	Amplitud	Frecuencia	Amplitud
0	0,05	9	0,08	18	0,07
1	$-0{,}25$	10	0,08	19	0,05
2	$-0{,}32$	11	0,2	20	0
3	0,13	12	$-0{,}07$	21	0,05
4	0,05	13	0,2	22	0,01
5	0,13	14	0,08	23	0,02
6	0,06	15	0,03	24	0,02
7	$-0{,}22$	16	0,12	25	0
8	0,33	17	0	26	0,01

En la siguiente figura se puede ver gráficamente el módulo del espectro correspondiente a las bandas laterales superiores normalizado con respecto a la amplitud de la portadora sin modular (frecuencias referidas a la de la portadora):



b) Sumando los cuadrados de las amplitudes de la primera tabla correspondientes a las frecuencias de la segunda tabla se obtiene un 97,57 %.

5.

a) El ancho de banda según la regla de Carson es:

$$B_T = 1{,}2 \text{ MHz}$$

b) El ancho de banda según la regla del 1 % es:

$$B_T = 1{,}5 \text{ MHz}$$

c) En este caso el ancho de banda según la regla de Carson es:

$$B_T = 2{,}2 \text{ MHz}$$

y según la regla del 1 %

$$B_T = 2{,}75 \text{ MHz}$$

d) En este caso el ancho de banda según la regla de Carson es:

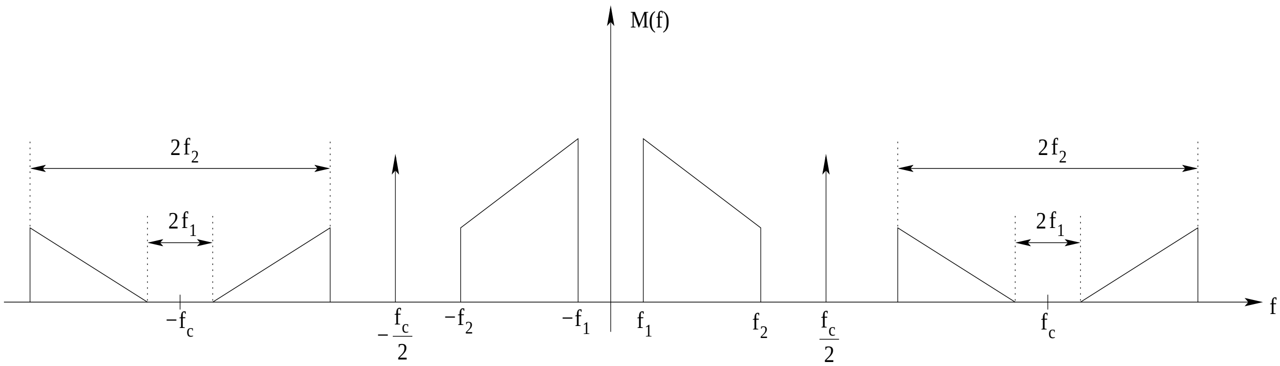
$$B_T = 1{,}4 \text{ MHz}$$

y según la regla del 1 %

$$B_T = 2 \text{ MHz}$$

6.

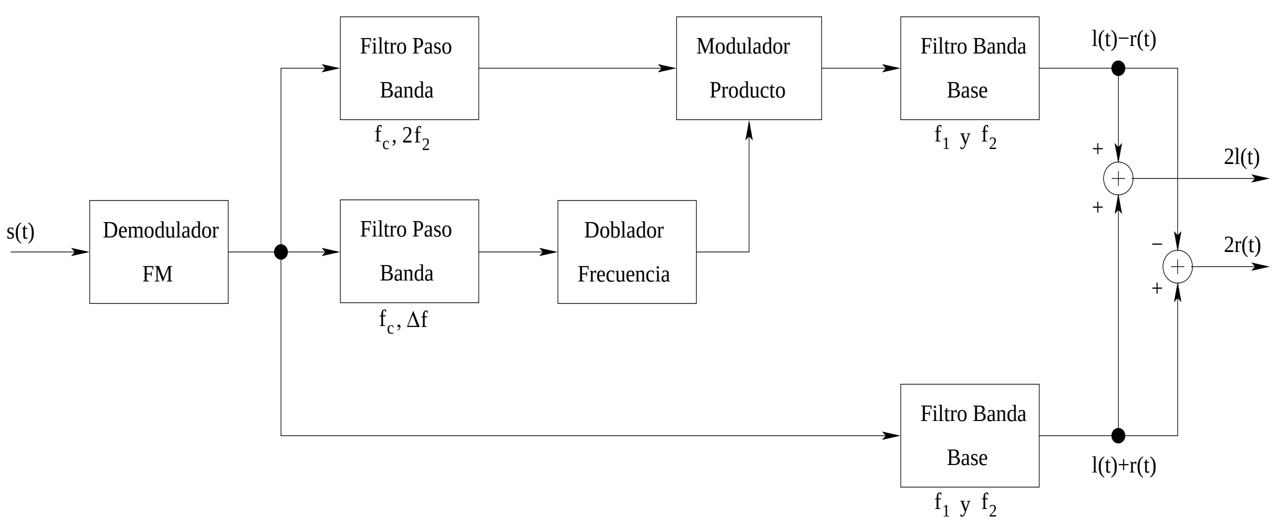
a) En la siguiente figura se puede ver la amplitud del espectro de la señal moduladora $m(t)$:



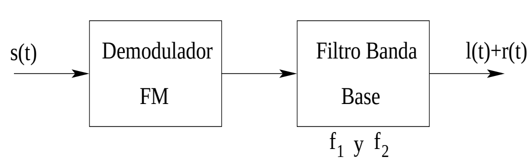
b) Determinando el ancho de banda como el valor medio entre la regla de Carson y la del 1 % se tiene que:

$$B_T = 315 \text{ KHz}$$

c) En la siguiente figura se puede ver el esquema que se debe emplear para demodular la señal FM para obtener los dos canales:



d) En la siguiente figura se puede ver cuál sería el esquema del receptor de FM monofónico:



Como se puede ver la señal a la salida es la suma de ambos canales, $l(t) + r(t)$.

7. La expresión de la señal a la salida de este dispositivo es:

$$v_2(t) = \frac{aA_c^2}{2} + \frac{aA_c^2}{2}\cos\left(4\pi f_c t + 4\pi k_f \int m(t)dt\right)$$

Usando un filtro paso banda con frecuencia central $2f_c$ y de ancho de banda el necesario para que pase la componente FM de la señal $v_2(t)$ se tiene:

$$v_0(t) = \frac{aA_c^2}{2}\cos\left(2\pi f_{c_2} t + 2\pi k_{f_2} \int m(t)dt\right)$$

donde la portadora es $f_{c_2} = 2f_c$ y la sensibilidad en frecuencia $k_{f_2} = 2k_f$. Es decir, la frecuencia portadora es doble, así como la sensibilidad en frecuencia o, equivalentemente, la desviación máxima de frecuencia.

8. Usando la expresión trigonométrica:

$$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

se puede poner la señal a la entrada del detector de envolvente como:

$$v(t) = -2A_c \sin\left[\frac{2\pi f_c(2t-T) + \phi(t) + \phi(t-T)}{2}\right]\sin\left[\frac{2\pi f_c T + \phi(t) - \phi(t-T)}{2}\right]$$

siendo

$$\phi(t) = \beta\sin(2\pi f_m t)$$

La diferencia de fase se puede aproximar por:

$$\phi(t) - \phi(t-T) \approx 2\pi\Delta f T\cos(2\pi f_m t)$$

y entonces:

$$\sin\left[\frac{2\pi f_c T + \phi(t) - \phi(t-T)}{2}\right] \approx \frac{\sqrt{2}}{2}[1 + \pi\Delta f T\cos(2\pi f_m t)]$$

Finalmente, se tiene que la salida del detector de envolvente es:

$$a(t) \approx \sqrt{2}A_c[1 + \pi\Delta f T\cos(2\pi f_m t)]$$

9. Usando un discriminador balanceado, la salida del primer detector de envolvente se puede aproximar por:

$$|\tilde{s}_1(t)| = a\pi B_T a(t) \left[1 + \frac{2k_f m(t)}{B_T}\right]$$

y la del segundo:

$$|\tilde{s}_2(t)| = a\pi B_T a(t) \left[1 - \frac{2k_f m(t)}{B_T}\right]$$

por lo que la salida del discriminador:

$$s_0(t) = 4a\pi k_f m(t) a(t)$$

10.

a) La señal $z(t)$ se puede poner como:

$$z(t) = z_c\left(t + \frac{\phi(t)}{2\pi f_c}\right)$$

siendo

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int m(t) dt$$

y

$$z_c(t) = \mathrm{sgn}[\cos(2\pi f_c t)]$$

La señal $z_c(t)$ es una señal periódica con frecuencia fundamental f_c por lo que se puede representar en serie de Fourier como sigue:

$$z_c(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos[2\pi f_c(2k+1)t]$$

Por lo tanto, la señal $z(t)$ viene dada por la serie:

$$z(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\left[2\pi f_c(2k+1)t + 2\pi k_f(2k+1)\int m(t) dt\right]$$

b) Se puede comprobar que el único término que pasa por el filtro para $f_c \gg B_T$ es el correspondiente a $k = 0$, por lo que:

$$y(t) = \frac{4}{\pi}\cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int m(t) dt\right]$$

Usando ahora un discriminador balanceado se puede obtener a la salida:

$$v_0(t) = 16ak_f m(t)$$