TRATAMIENTO Y TRANSMISIÓN DE SEÑALES

SOLUCIÓN PROBLEMAS TEMA 5

RUIDO EN MODULACIONES ANALÓGICAS

1. La función de transferencia del filtro es:

$$H(f) = \frac{R}{R + j2\pi f L + \frac{1}{j2\pi f C}} = \frac{1}{1 + jQ\left[\frac{f}{f_c} - \frac{f_c}{f}\right]}$$

donde Q es el factor de calidad del filtro dado por:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{2\pi f_c L}{R}$$

y f_c es la frecuencia de sintonización dada por:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Si el factor de calidad Q es grande comparado con la unidad, entonces:

$$H(f) \approx \begin{cases} \frac{1}{1+j2Q\frac{f-f_c}{f_c}} & f > 0 \\ \\ \frac{1}{1+j2Q\frac{f+f_c}{f_c}} & f \leq 0 \end{cases}$$

Operando se obtiene para la SNR a la salida:

$$\text{SNR}_O = \frac{A_c^2 Q}{\pi N_0 f_c}$$

2.

a) La señal a la entrada del modulador producto tras el filtro IF equivalente viene dada por:

$$x(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) + n_c(t)\cos(2\pi f_c t) - n_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

La señal a la salida del filtro de postdetección:

$$y(t) = \frac{A_c m(t)}{2}\cos[\theta(t)] + \frac{n_c(t)}{2}\cos[\theta(t)] + \frac{n_s(t)}{2}\sin[\theta(t)]$$

La señal error es:

$$e(t) = y(t) - \frac{A_c m(t)}{2}$$

Operando, el error cuadrático medio viene dado por:

$$\varepsilon = E[e^2(t)] = \frac{A_c^2 P}{4}E[(1-\cos[\theta(t)])^2] + \frac{\sigma_N^2}{4}$$

siendo P la potencia de la señal moduladora y σ_N^2 la varianza (potencia) del ruido a tras el filtro IF equivalente dada por:

$$\sigma_N^2 = 2WN_0$$

Desarrollando en serie de Taylor el coseno y para valores pequeños de $\theta(t)$, el error cuadrático medio se puede aproximar por:

$$\varepsilon \approx \frac{A_c^2 P}{16}E[\theta^4(t)] + \frac{\sigma_N^2}{4}$$

Además, ya que $\theta(t)$ es un proceso Gaussiano con media cero y varianza σ_θ^2, se tiene que:

$$E[\theta^4(t)] = 3\sigma_\theta^4$$

por lo que finalmente:

$$\varepsilon \approx \frac{3A_c^2 P\sigma_\theta^4}{16} + \frac{N_0 W}{2}$$

b) La señal a la entrada del modulador producto tras el filtro IF equivalente viene dada por:

$$x(t) = \frac{A_c}{2} m(t)\cos(2\pi f_c t) - \frac{A_c}{2}\hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t)$$
$$+n_c(t)\cos\left[2\pi\left(f_c + \frac{W}{2}\right)t\right] - n_s(t)\sin\left[2\pi\left(f_c + \frac{W}{2}\right)t\right]$$

La señal a la salida del filtro de postdetección:

$$y(t) = \frac{A_c m(t)}{4}\cos[\theta(t)] + \frac{A_c \hat{m}(t)}{4}\sin[\theta(t)] + \frac{n_c(t)}{2}\cos[\pi W t - \theta(t)] - \frac{n_s(t)}{2}\sin[\pi W t - \theta(t)]$$

La señal error es:

$$e(t) = y(t) - \frac{A_c m(t)}{4}$$

Operando, el error cuadrático medio viene dado por:

$$\varepsilon = E[e^2(t)] = \frac{A_c^2 P}{8} E[1 - \cos[\theta(t)]] + \frac{\sigma_N^2}{4}$$

siendo P la potencia de la señal moduladora y σ_N^2 la varianza (potencia) del ruido a tras el filtro IF equivalente dada por:

$$\sigma_N^2 = W N_0$$

Desarrollando en serie de Taylor el coseno y para valores pequeños de $\theta(t)$ el error cuadrático medio se puede aproximar por:

$$\varepsilon \approx \frac{A_c^2 P}{16} E[\theta^2(t)] + \frac{\sigma_N^2}{4}$$

por lo que finalmente:

$$\varepsilon \approx \frac{A_c^2 P \sigma_\theta^2}{16} + \frac{N_0 W}{4}$$

3. Tras el filtro paso banda con frecuencia central nf_c y ancho de banda Δf se tiene el piloto portador y un ruido de banda estrecha centrado en nf_c y de ancho de banda Δf por lo que la señal tras este filtro se puede poner como:

$$y(t) = A_c \cos(2\pi n f_c t) + n_c(t)\cos(2\pi n f_c t) - n_s(t)\sin(2\pi n f_c t)$$

Como Δf es muy pequeño, la potencia del ruido tras el filtro también, por lo que la envolvente natural de $y(t)$ se puede aproximar por:

$$a(t) = \sqrt{[A_c + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)} \approx A_c$$

y la fase:

$$\theta(t) = \text{atan}\left(\frac{n_s(t)}{A_c + n_c(t)}\right) \approx \frac{n_s(t)}{A_c}$$

Entonces:

$$y(t) \approx A_c \cos\left[2\pi n f_c t + \frac{n_s(t)}{A_c}\right]$$

Tras el divisor de frecuencia:

$$z(t) \approx A_c \cos\left[2\pi f_c t + \frac{n_s(t)}{nA_c}\right]$$

El error de fase viene dado por:

$$\phi(t) \approx \frac{n_s(t)}{nA_c}$$

y su densidad espectral:

$$S_\phi(f) = \frac{1}{n^2 A_c^2} S_{N_s}(f)$$

Integrando se tiene finalmente que la potencia (varianza) del error de fase viene dada por:

$$P_\phi = \sigma_\phi^2 = \frac{\Delta f N_0}{n^2 A_c^2}$$

4. La expresión de la señal a la salida del filtro IF equivalente viene dada por:

$$x(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \cos(2\pi f_c t) - \frac{A_c}{2} \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t)$$
$$+ n_c(t) \cos\left[2\pi\left(f_c + \frac{W}{2}\right)t\right] - n_s(t) \sin\left[2\pi\left(f_c + \frac{W}{2}\right)t\right]$$

La potencia de señal modulada viene dada por:

$$P_S = \frac{A_c^2 P}{4} = 10 \text{ W}$$

La señal a la salida del receptor viene dada por:

$$y(t) = \frac{A_c}{4} m(t) + \frac{1}{2} n_c(t) \cos(\pi W t) - \frac{1}{2} n_s(t) \sin(\pi W t)$$

La potencia de la componente de señal a la salida es:

$$P_{S_O} = \frac{A_c^2 P}{16} = \frac{P_S}{4} = 2{,}5 \text{ W}$$

y la potencia de la componente de ruido a la salida es:

$$P_{N_O} = 99 \cdot 10^{-5} \text{ W}$$

por lo que la SNR a la salida es:

$$\text{SNR}_O = 2530$$

es decir 34 dB.

5. Se tiene que:

$$\text{SNR}_C = 44 \text{ dB} \qquad \text{SNR}_I = 41 \text{ dB}$$

Para DSB:

$$\text{FOM} = 0 \text{ dB} \qquad \text{SNR}_O = \text{SNR}_C = 44 \text{ dB}$$

Para AM:

$$\text{FOM} = -7 \text{ dB} \qquad \text{SNR}_O = 37 \text{ dB}$$

Se puede decir que AM tiene una SNR a la salida de 7 dB menos que DSB.

6.

a) La expresión de la señal PM es:

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)]$$

donde

$$\phi(t) = k_p m(t)$$

La expresión del ruido tras el filtro IF equivalente con frecuencia central f_c y ancho de banda B_T viene dada por:

$$n(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_c t) - n_s(t)\sin(2\pi f_c t) = r(t)\cos[2\pi f_c t + \psi(t)]$$

La fase de la señal suma $x(t) = s(t) + n(t)$ viene dada por:

$$\theta(t) = \phi(t) + \mathrm{atan}\left(\frac{r(t)\sin[\psi(t) - \phi(t)]}{A_c + r(t)\cos[\psi(t) - \phi(t)]}\right)$$

En el caso en el que el valor de CNR sea elevado la expresión anterior se puede aproximar por:

$$\theta(t) \approx \phi(t) + \frac{n_s(t)}{A_c} = k_p m(t) + \frac{n_s(t)}{A_c}$$

Tras el filtro de postdetección:

$$y(t) \approx k_p m(t) + \frac{1}{A_c} n_0(t)$$

siendo $n_0(t)$ el ruido a la salida del filtro de postdetección para cuando la señal a la entrada es $n_s(t)$.
La potencia de la componente de señal a la salida es:

$$P_{S_O} = k_p^2 P$$

siendo P la potencia de la señal moduladora. La potencia de ruido a la salida es:

$$P_{N_O} = \frac{2N_0 W}{A_c^2}$$

por lo que la SNR a la salida viene dada por:

$$\mathrm{SNR}_O = \frac{K_p^2 P A_c^2}{2N_0 W}$$

b) La SNR del canal viene dada por:

$$\mathrm{SNR}_C = \frac{A_c^2}{2N_0 W}$$

por lo que el valor de FOM es:

$$\mathrm{FOM} = k_p^2 P$$

Si la señal moduladora es sinusoidal según:

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

su potencia es:

$$P = \frac{A_m^2}{2}$$

por lo que el valor FOM es:

$$\mathrm{FOM} = \frac{1}{2}\beta_p^2$$

siendo:

$$\beta_p = A_m k_p$$

el índice de modulación en PM. Para FM el valor de FOM era:

$$\mathrm{FOM} = \frac{3}{2}\beta^2$$

siendo β el índice de modulación en FM. Por lo tanto, para el mismo valor del índice de modulación, FM tiene tres veces mejor calidad frente al ruido que PM.

7. La expresión de la señal a la entrada del receptor de FM es:

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c}{A} \cos[2\pi(f_c + \Delta f)t]$$

siendo A la atenuación de la componente interferente.

La fase de la señal $s(t)$ viene dada por:

$$\theta(t) = \mathrm{atan}\left[\frac{\sin(2\pi\Delta f t)}{A + \cos(2\pi\Delta f t)}\right]$$

derivando y dividiendo entre 2π se puede obtener la frecuencia (salida del demodulador de FM) que viene dada por:

$$f(t) = \Delta f \frac{A\cos(2\pi\Delta f t) + 1}{A^2 + 2A\cos(2\pi\Delta f t) + 1}$$

La señal de salida viene dada por:

$$y(t) = k\Delta f \frac{A\cos(2\pi\Delta f t) + 1}{A^2 + 2A\cos(2\pi\Delta f t) + 1}$$

donde k es la sensibilidad del demodulador. Si suponemos que la atenuación A de la componente interferente es grande, la señal a la salida se puede aproximar por:

$$y(t) \approx \frac{k\Delta f}{A} \cos(2\pi\Delta f t)$$

La expresión numérica es:

$$y(t) = \frac{30\cos(2\pi 15000t) + 3}{100 + 20\cos(2\pi 15000t) + 1} \approx 0{,}3\cos(2\pi 15000t)$$

8. La SNR del canal viene dada por:

$$\mathrm{SNR}_C = \frac{A_c^2}{2N_0(f_2 - f_1)}$$

la SNR a la salida es:

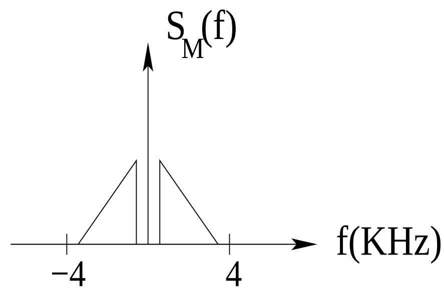
$$\mathrm{SNR}_O = \frac{3A_c^2 k_f^2 P}{2N_0(f_2^3 - f_1^3)}$$

y el valor de FOM:

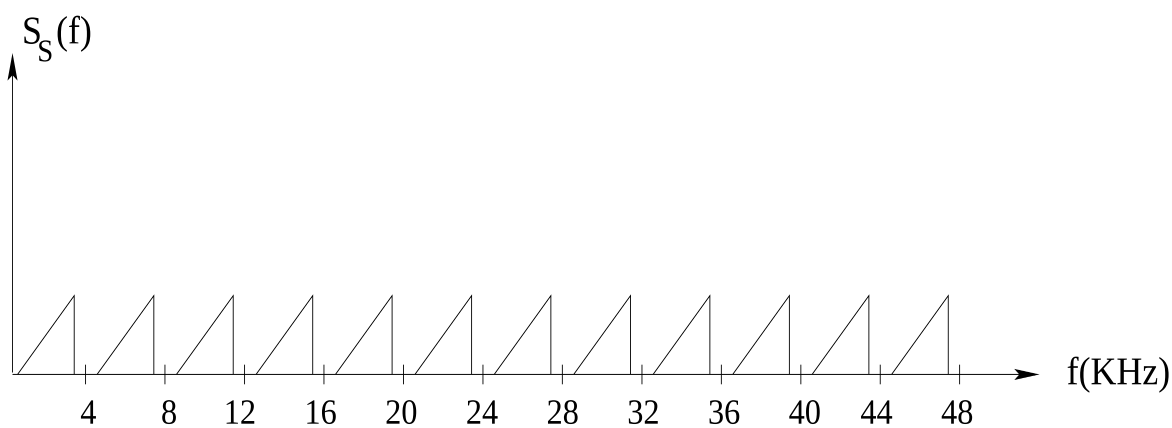
$$\mathrm{FOM} = \frac{3k_f^2 P(f_2 - f_1)}{f_2^3 - f_1^3}$$

9.

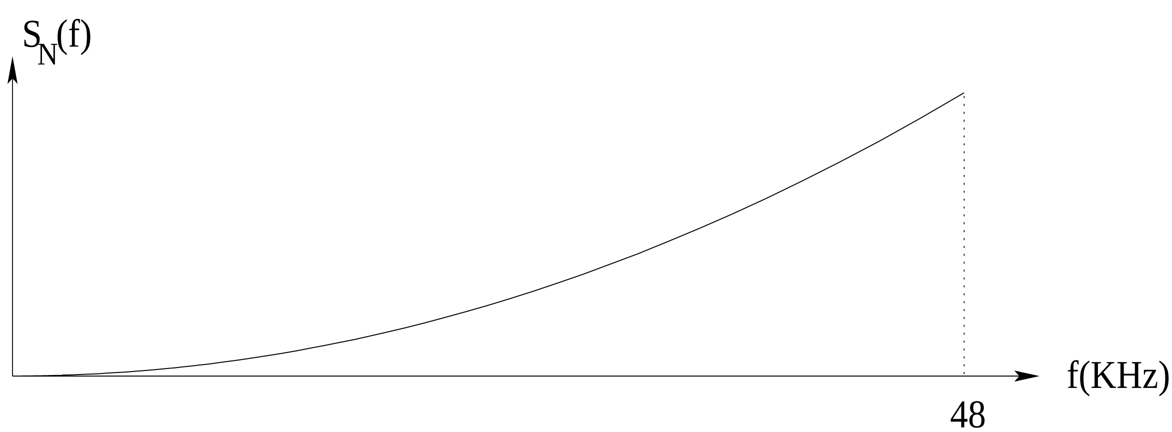
a) Si la densidad espectral de potencia de la señal moduladora viene dada gráficamente por:



la densidad espectral de potencia (para frecuencias positivas) de la componente de señal a la salida del discriminador de frecuencias viene dada gráficamente por:



y la componente de ruido por:



b) La expresión de la señal SSB número k, con $1 \leq k \leq 12$ viene dada por:

$$s_k(t) = \frac{A_k}{2} m(t) \cos(2\pi k f_0 t) + \frac{A_k}{2} \hat{m}(t) \sin(2\pi k f_0 t)$$

con $f_0 = 4$ KHz. Ocupa la banda de frecuencias $(k-1)f_0 \leq |f| \leq k f_0$ y tiene una potencia de:

$$P_{S_k} = \frac{A_k^2 P}{4}$$

La potencia de ruido en el ancho de banda $(k-1)f_0 \leq |f| \leq k f_0$ viene dada por:

$$P_{N_k} = \frac{2N_0 f_0^3}{3A_c^2}(3k^2 - 3k + 1)$$

por lo que la SNR para la señal k viene dada por:

$$\text{SNR}_k = \frac{8A_c^2 A_k^2 k_f^2 P}{8N_0 f_0^3 (3k^2 - 3k + 1)}$$

Para que todas las SNR sean iguales se tiene que cumplir que:

$$A_k^2 = C(3k^2 - 3k + 1)$$

siendo C una constante que no dependa de k.

10. Para bajas frecuencias, $f \ll f_0$, por lo que se tiene la aproximación:

$$H_{pe}(f) = 1 + \frac{jf}{f_0} = 1 + j2\pi rCf \approx 1$$

por lo que tras el filtro la señal a la salida es igual a la señal de entrada. En este caso, la señal transmitida es una señal FM.

Para las altas frecuencias, $f \gg f_0$, por lo que se tiene la aproximación:

$$H_{pe}(f) \approx j2\pi rCf = \frac{j2\pi f}{2\pi f_0}$$

por lo que en el dominio del tiempo la salida del filtro es:

$$y(t) \approx \frac{1}{2\pi f_0}\frac{dx(t)}{dt} = rC\frac{dx(t)}{dt}$$

por lo que la señal transmitida es una señal PM ya que es una señal FM modulada por la derivada de la señal moduladora.

11.

a) La potencia de la señal moduladora sin pre-énfasis viene dada por:

$$P_M = 2S_0 f_0 \operatorname{atan}\left(\frac{W}{f_0}\right)$$

y la potencia de la señal moduladora con pre-énfasis viene dada por:

$$P_E = 2Wk^2 S_0$$

por lo que igualando y despejando k se tiene:

$$k = \sqrt{\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{W}{f_0}\right)}{\frac{W}{f_0}}}$$

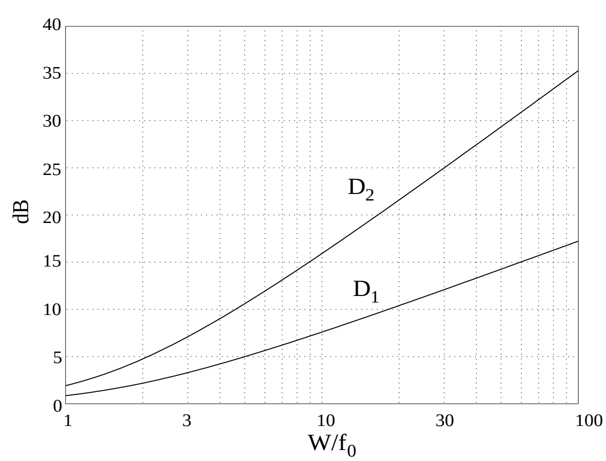
b) El factor de mejora usando el valor de k ya calculado viene dado por:

$$D_1 = \frac{\left(\frac{W}{f_0}\right)^2 \operatorname{atan}\left(\frac{W}{f_0}\right)}{3\left[\left(\frac{W}{f_0}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{W}{f_0}\right)\right]}$$

El factor de mejora sin la restricción impuesta por k viene dada por:

$$D_2 = \frac{\left(\frac{W}{f_0}\right)^3}{3\left[\left(\frac{W}{f_0}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{W}{f_0}\right)\right]}$$

En la siguiente figura podemos ver gráficamente ambos factores de mejora como función de la relación W/f_0:



12. La señal a la salida del demodulador de fase antes del filtro de postdetección para CNR elevado se puede aproximar por:

$$\theta(t) \approx k_p m(t) + \frac{n_s(t)}{A_c}$$

La potencia de ruido sin de-énfasis a la salida del filtro de postdetección viene dada por:

$$P_{N_0} = \frac{2N_0W}{A_c^2}$$

y con de-énfasis:

$$P_{N_{de}} = \frac{N_0}{A_c^2}\int_{-W}^{W} |H_{de}(f)|^2 df$$

por lo que se puede obtener como factor de mejora:

$$D = \frac{2W}{\int_{-W}^{W} |H_{de}(f)|^2 df} = \frac{\left(\frac{W}{f_0}\right)}{\operatorname{atan}\left(\frac{W}{f_0}\right)}$$

Para $W = 15$ KHz y $f_0 = 2{,}1$ KHz este factor es:

$$D \approx 5 \quad (7 \text{ dB})$$

En FM vale:

$$D \approx 21{,}2 \quad (13 \text{ dB})$$