

TRATAMIENTO Y TRANSMISIÓN DE SEÑALES

SOLUCIÓN PROBLEMAS TEMA 6

MODULACIÓN ANALÓGICA Y DIGITAL DE PULSOS

1.

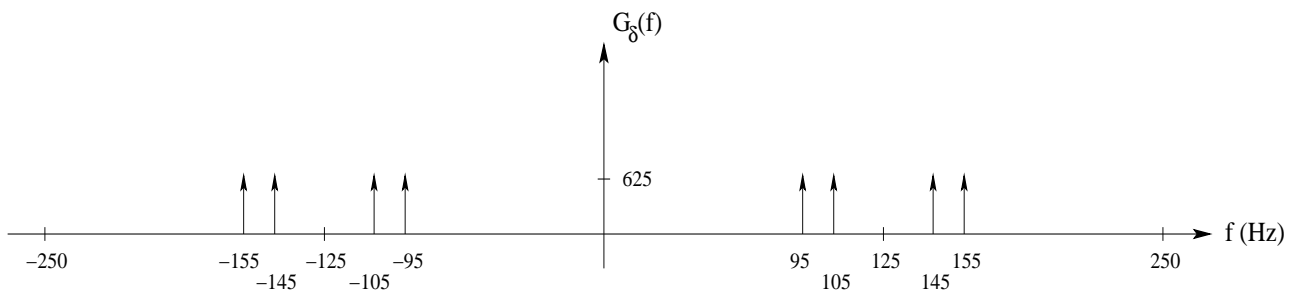
a) La transformada de la señal es:

$$G(f) = \frac{5}{2} [\delta(f - 95) + \delta(f + 95) + \delta(f - 105) + \delta(f + 105)]$$

El espectro de la señal muestreada es:

$$G_{\delta}(f) = 625 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(f - 95 - 250n) + \delta(f + 95 - 250n) + \delta(f - 105 - 250n) + \delta(f + 105 - 250n)]$$

En la siguiente figura puede verse gráficamente:



b) La frecuencia de corte en Hz viene dada por:

$$105 < f_{\text{corte}} < 145$$

c) La tasa de Nyquist es 210 Hz.

d) La frecuencia central es $f_c = 100$ Hz y el ancho de banda es $2W = 10$ Hz, entonces usando:

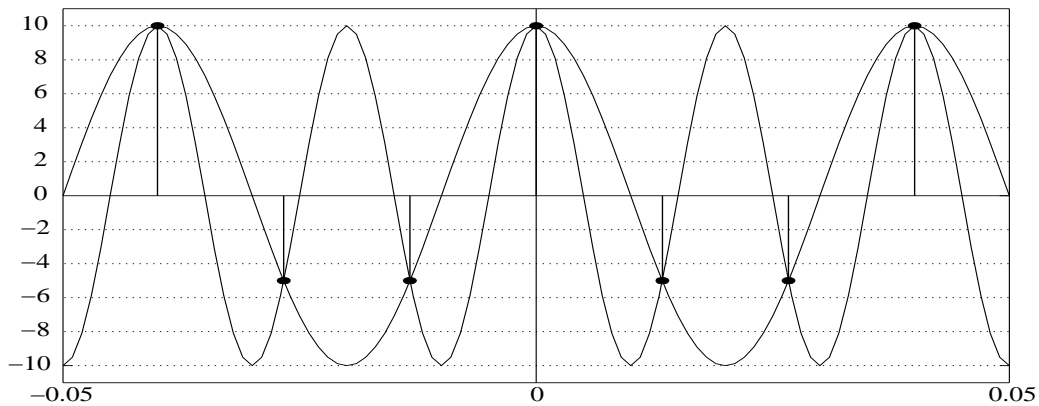
$$r \leq \frac{f_c + W}{2W} < r + 1$$

se obtiene $r = 10$. El nuevo ancho de banda en Hz es:

$$2W' = \frac{f_c + W}{r} = 10,5$$

por lo que la frecuencia de muestreo es $f_s = 4W' = 21$ Hz.

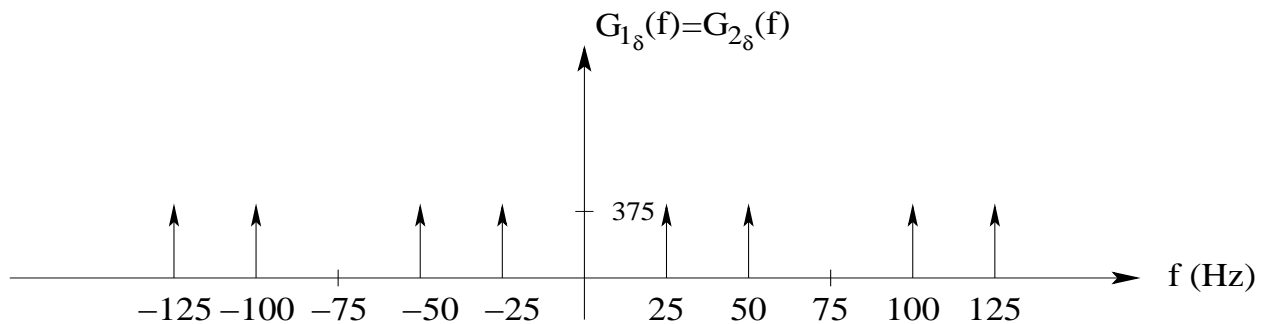
2. El proceso de muestreo en el dominio del tiempo se puede ver gráficamente en la siguiente figura:



Como se puede ver los instantes de muestreo coinciden con los puntos de corte de ambas señales por lo que las muestras son iguales. El espectro de las señales muestreadas es el mismo y viene dado por:

$$G_{1_s}(f) = G_{2_s}(f) = 375 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(f - 25 - 75n) + \delta(f + 25 - 75n)]$$

Este espectro puede verse gráficamente en la siguiente figura:

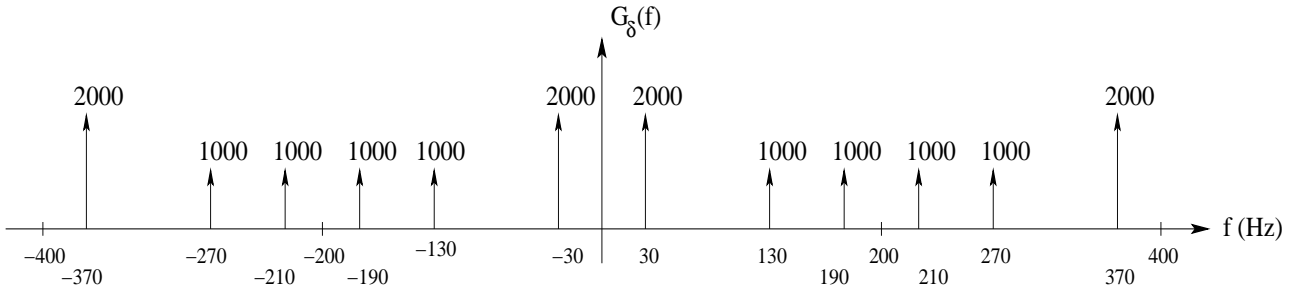


Esto es debido a que en la primera señal tenemos aliasing. La frecuencia mínima de muestreo para evitarlo es de 100 Hz.

3. La señal $g(t)$ se puede expandir:

$$g(t) = 5 \cos(2\pi 30t) + \frac{5}{2} \cos(2\pi 130t) + \frac{5}{2} \cos(2\pi 190t)$$

El espectro de la señal muestreada se puede ver gráficamente en la siguiente figura:



La frecuencia de corte en Hz viene dada por:

$$190 < f_{\text{corte}} < 210$$

4. La energía se puede poner como:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2W}\right) g^*\left(\frac{k}{2W}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2Wt - n) \text{sinc}(2Wt - k) dt$$

Se puede utilizar el teorema de energía de Rayleigh generalizado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(f) G_2^*(f) df$$

Operando para $g_1(t) = \text{sinc}(2Wt - n)$ y $g_2(t) = \text{sinc}(2Wt - k)$ se obtiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2Wt - n) \text{sinc}(2Wt - k) dt = \frac{1}{2W} \text{sinc}(k - n) = \begin{cases} \frac{1}{2W} & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

Por lo que:

$$E = \frac{1}{2W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| g\left(\frac{n}{2W}\right) \right|^2$$

5. El ancho de banda en KHz es:

$$2W = f_2 - f_1 = 5$$

Resulta que:

$$\frac{f_2}{2W} = 200 = r$$

por lo que la frecuencia de muestreo es $f_s = 4W = 10$ KHz.

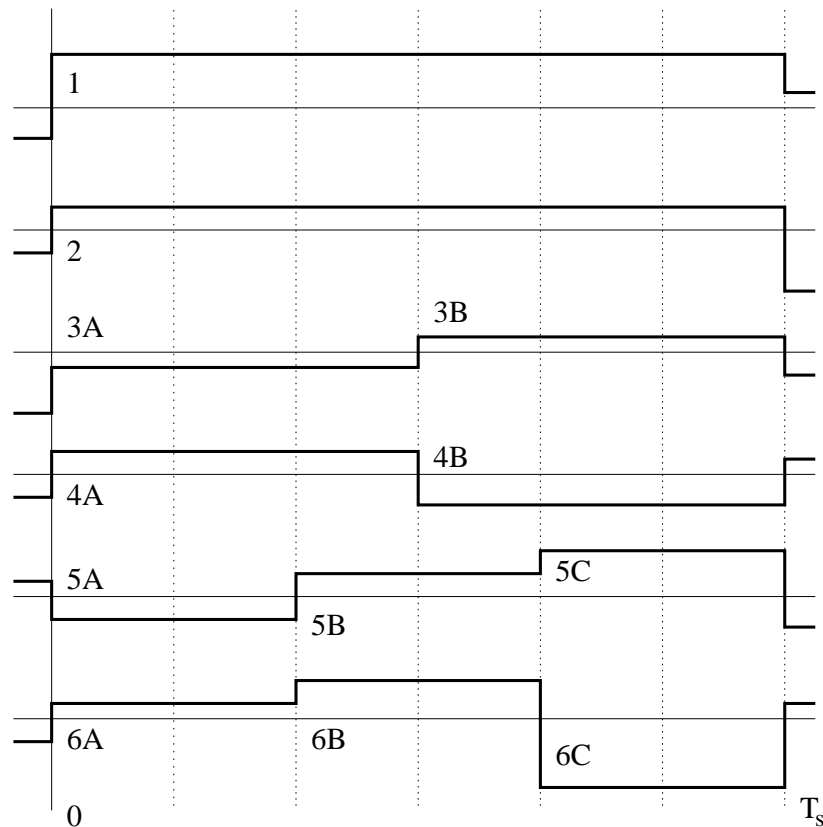
6.

a) En la siguiente tabla se recogen los anchos de banda, las tasas de muestreo y la duración de cada muestra para las seis señales:

Señal	Ancho de banda	Tasa de muestreo	Duración muestra
1	W	$f_{s_1} = 2W$	$T_{s_1} = \frac{1}{2W}$
2	W	$f_{s_2} = 2W$	$T_{s_2} = \frac{1}{2W}$
3	$2W$	$f_{s_3} = 4W$	$T_{s_3} = \frac{1}{4W}$
4	$2W$	$f_{s_4} = 4W$	$T_{s_4} = \frac{1}{4W}$
5	$3W$	$f_{s_5} = 6W$	$T_{s_5} = \frac{1}{6W}$
6	$3W$	$f_{s_6} = 6W$	$T_{s_6} = \frac{1}{6W}$

Si elegimos como duración de la trama $T_s = \frac{1}{2W}$, cada T_s tenemos una muestra del primer canal, una del segundo, dos del tercero, dos del cuarto, tres del quinto y tres del sexto.

En la siguiente figura se puede ver un caso particular de esta situación para las seis señales:



En la figura anterior hemos numerado cada muestra con un número correspondiente al número de señal. Para cuando tenemos varias muestras en T_s (señales tres a seis) hemos añadido una letra para identificar la muestra dentro de las de cada señal. Así la trama de la señal TDM viene dada por:

1	2	3A	4A	5A	6A	5B	6B	3B	4B	5C	6C	S
---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---

donde la última muestra corresponde a la de sincronismo.

b) Como tenemos que transmitir 13 muestras cada T_s la duración de cada una de ellas es:

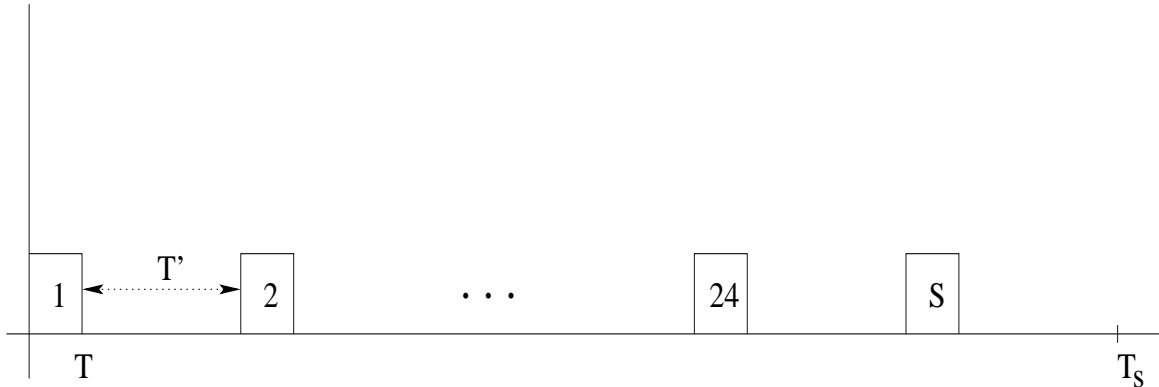
$$T'_s = \frac{T_s}{13} = \frac{1}{26W}$$

por lo que la tasa de muestras por segundo será $f'_s = 26W$. Utilizando el pulso con menor ancho de banda (con forma de sinc) se pueden transmitir 2 muestras por Hz, por lo que el ancho de banda mínimo de transmisión será:

$$B_T = \frac{f'_s}{2} = 13W$$

7.

a) La trama TDM puede verse en la siguiente figura:



donde T es la duración de cada muestra y T' es el periodo de espera entre muestras. Tenemos 25 muestras por trama (24 de señal y una de sincronismo), por lo que:

$$25(T + T') = T_s$$

Despejando T' :

$$T' = \frac{T_s}{25} - T$$

Para $f_s = 8$ KHz, $T_s = 125 \mu s$, por lo que $T' = 4 \mu s$.

b) En este caso $f_s = 6,8$ KHz, $T_s = 147 \mu s$, por lo que $T' = 4,88 \mu s$.

8.

a) La señal PAM $s(t)$ se puede poner como:

$$s(t) = s_{\delta}(t) * g(t)$$

siendo $s_{\delta}(t)$ la señal PAM utilizando muestreo ideal:

$$s_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [1 + k_a m(nT_s)] \delta(t - nT_s)$$

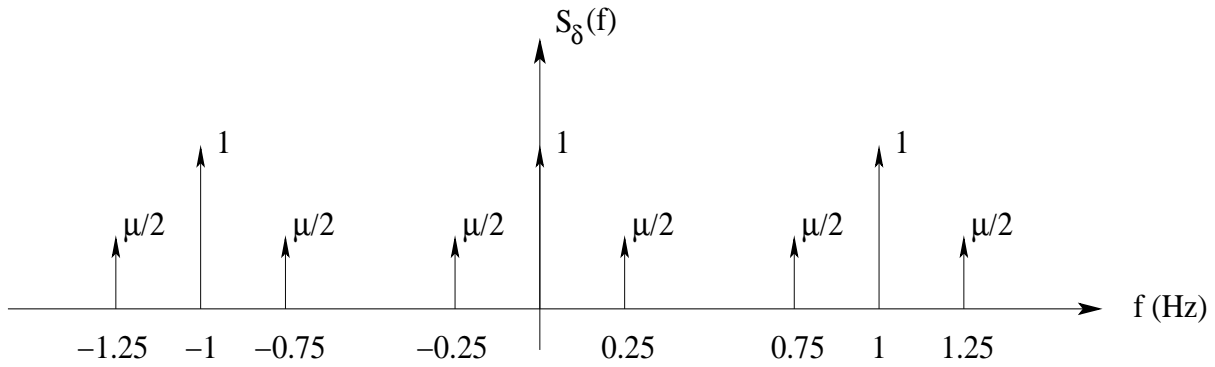
y $g(t)$ la forma de las muestras dada por:

$$g(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

El espectro de la señal PAM con muestreo ideal es:

$$S_{\delta}(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mu}{2} \delta(f - f_m - n f_s) + \delta(f - n f_s) + \frac{\mu}{2} \delta(f + f_m - n f_s) \right]$$

En la siguiente figura se puede ver gráficamente:



El espectro de la forma de las muestras:

$$G(f) = T \text{sinc}(fT) \exp(-j\pi fT)$$

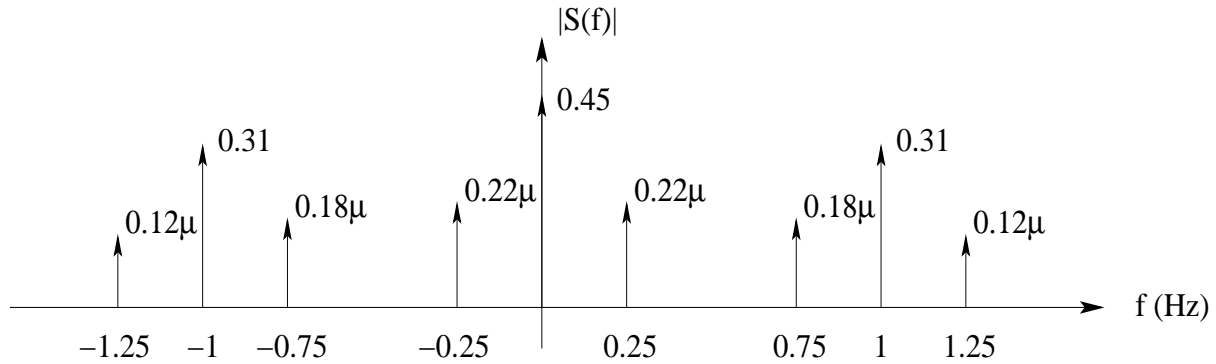
Entonces el espectro de la señal PAM:

$$S(f) = f_s T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(fT) \exp(-j\pi fT) \left[\frac{\mu}{2} \delta(f - f_m - n f_s) + \delta(f - n f_s) + \frac{\mu}{2} \delta(f + f_m - n f_s) \right]$$

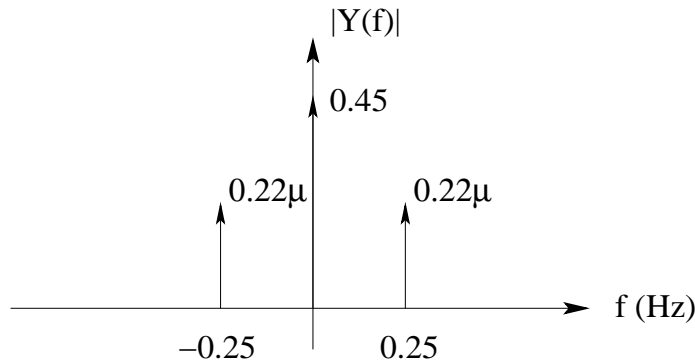
El módulo del espectro sustituyendo los valores numéricos:

$$|S(f)| = 0,45 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\text{sinc}(0,45T)| \left[\frac{\mu}{2} \delta(f - 0,25 - n) + \delta(f - n f_s) + \frac{\mu}{2} \delta(f + 0,25 - n) \right]$$

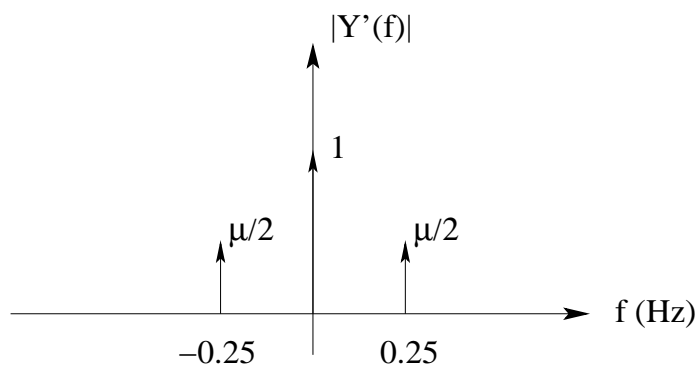
En la siguiente figura se puede ver gráficamente:



b) Tras el filtro de reconstrucción ideal el espectro viene dado gráficamente por:



En caso de que no tengamos efecto de apertura la salida del filtro de reconstrucción viene dada gráficamente por:



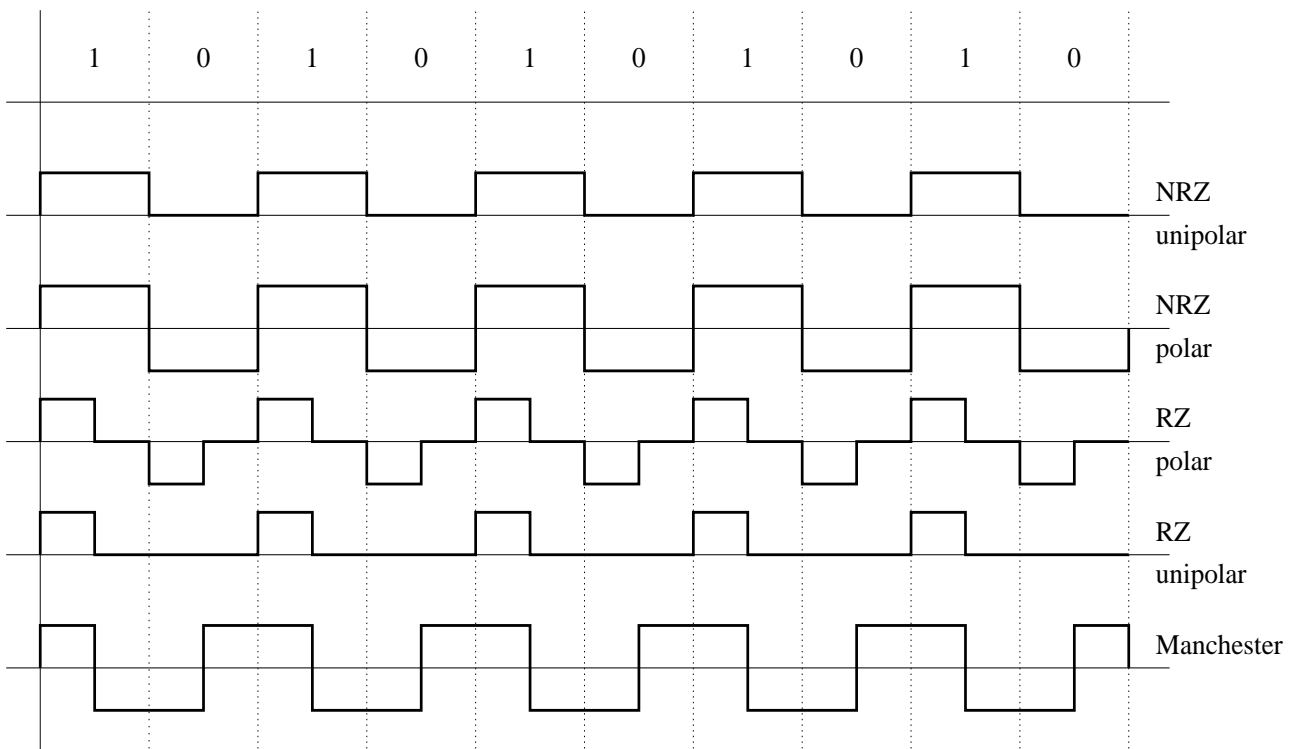
9. En una señal PPM puesto que la posición del flanco de subida y del flanco de bajada siguen a la señal de información (muestreo natural), no es posible recuperar la señal de sincronismo a partir de la señal PPM exclusivamente. En este caso la amplitud de la señal es constante y no lleva información.

En una señal PDM la posición del flanco de subida es constante (muestreo periódico), mientras que la posición del flanco de bajada sigue a la señal de información (muestreo natural). Por lo tanto, ya que los flancos de subida son periódicos, a partir de estos sí es posible recuperar la señal de sincronismo. En este caso la amplitud de la señal es constante y no lleva información.

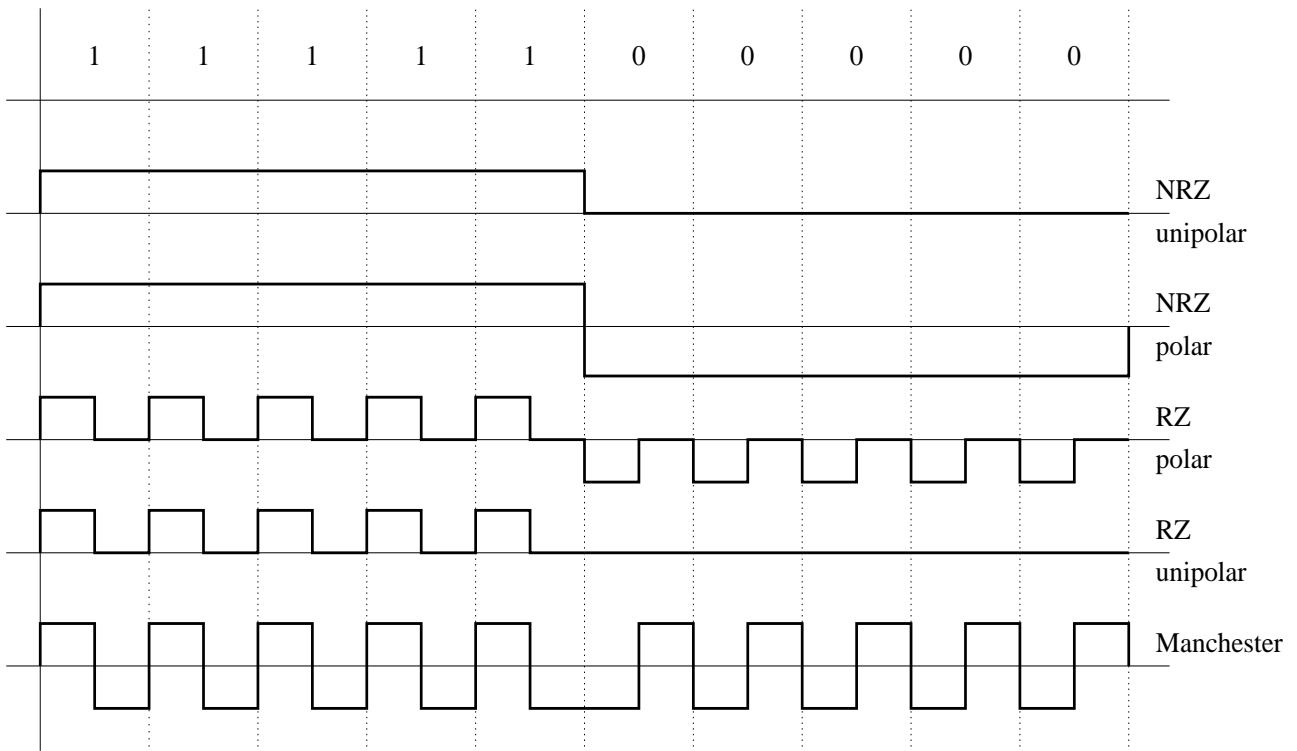
En una señal PAM la posición del flanco de subida y del flanco de bajada es constante (muestreo periódico), por lo que ambos flancos son periódicos de forma que cualquiera de ellos permitirán recuperar la señal de sincronismo. En este caso es la amplitud de la señal PAM la que sigue a la señal de información.

10.

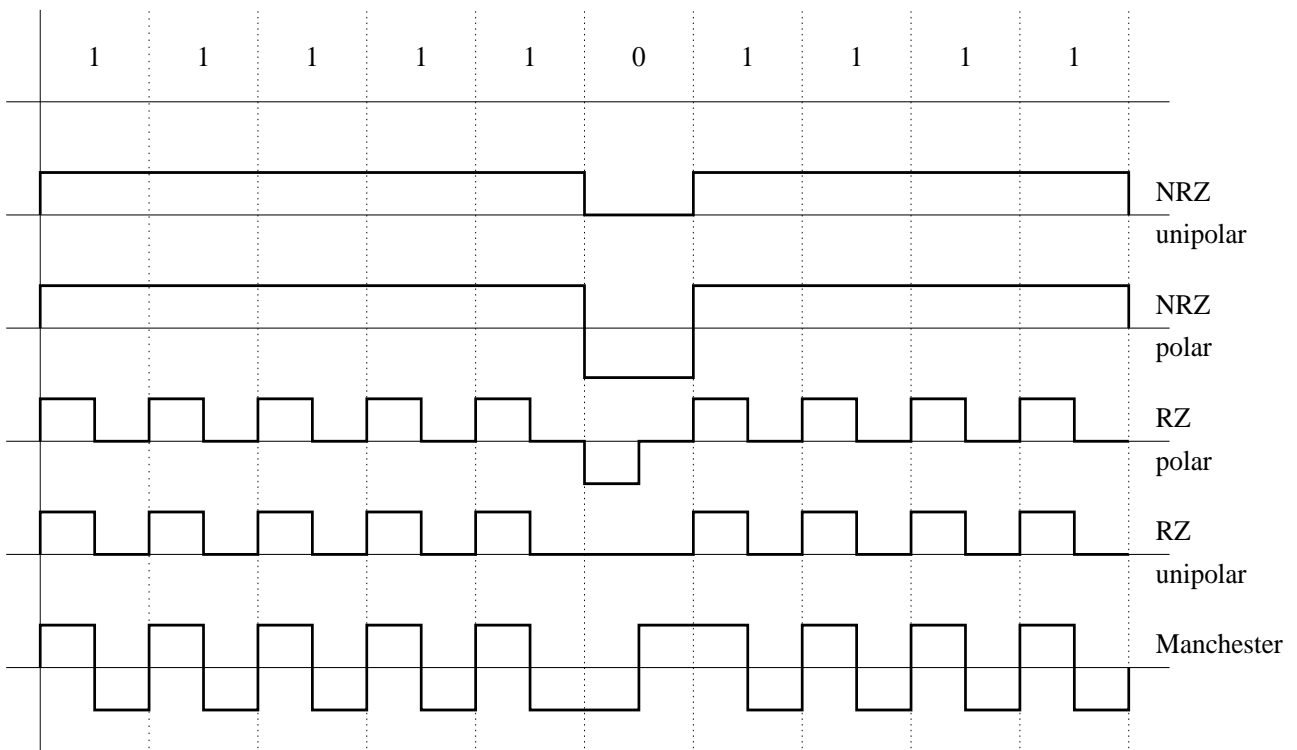
a)



b)



c)



11.

a) Si los símbolos son equiprobables la media de la señal $x(t)$ es $\frac{A}{2}$. Definiendo una señal centrada:

$$x'(t) = x(t) - \frac{A}{2}$$

Ahora el símbolo 1 se representa por una señal $g(t)$ y el símbolo 0 por por la señal $-g(t)$ para la señal $x'(t)$, donde:

$$g(t) = \frac{A}{2} \Pi \left(\frac{t - T_b/2}{T_b} \right)$$

El espectro de $g(t)$ es:

$$G(f) = \frac{AT_b}{2} \text{sinc}(fT_b) \exp(-j\pi fT_b)$$

La densidad espectral de energía de $g(t)$ es:

$$\Psi_g(f) = \frac{A^2T_b^2}{4} \text{sinc}^2(fT_b)$$

La densidad espectral de potencia de la señal $x'(t)$ es:

$$S'_x(f) = \frac{\Psi_g(f)}{T_b} = \frac{A^2T_b}{4} \text{sinc}^2(fT_b)$$

La densidad espectral de potencia de la señal original $x(t)$ será igual a:

$$S_x(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f) + \frac{A^2T_b}{4} \text{sinc}^2(fT_b)$$

Tomando transformada inversa de Fourier la autocorrelación de la señal $x(t)$ es:

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} \Lambda \left(\frac{\tau}{T_b} \right) = \begin{cases} \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{4} \frac{|\tau|}{T_b} & |\tau| \leq T_b \\ \frac{A^2}{4} & |\tau| > T_b \end{cases}$$

- b) En este caso, como la media es cero, el símbolo 1 se representa por una señal $g(t)$ y el símbolo 0 por la señal $-g(t)$ para la señal $x(t)$, donde:

$$g(t) = A\Pi\left(\frac{t - T_b/2}{T_b}\right)$$

El espectro de $g(t)$ es:

$$G(f) = AT_b \text{sinc}(fT_b) \exp(-j\pi fT_b)$$

La densidad espectral de energía de $g(t)$ es:

$$\Psi_g(f) = A^2 T_b^2 \text{sinc}^2(fT_b)$$

La densidad espectral de potencia de la señal $x(t)$ es:

$$S_x(f) = \frac{\Psi_g(f)}{T_b} = A^2 T_b \text{sinc}^2(fT_b)$$

Tomando transformada inversa de Fourier la autocorrelación de la señal $x(t)$ es:

$$R_x(\tau) = A^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b}\right) = \begin{cases} A^2 - A^2 \frac{|\tau|}{T_b} & |\tau| \leq T_b \\ 0 & |\tau| > T_b \end{cases}$$

- c) En este caso, como la media también es cero, el símbolo 1 se representa por una señal $g(t)$ y el símbolo 0 por la señal $-g(t)$ para la señal $x(t)$, donde:

$$g(t) = A\Pi\left(\frac{t - T_b/4}{T_b/2}\right) - A\Pi\left(\frac{t - 3T_b/4}{T_b/2}\right)$$

El espectro de $g(t)$ simplificado es:

$$G(f) = \frac{A}{\pi f} [1 - \cos(\pi f T_b)] \exp(-j\pi f T_b)$$

La densidad espectral de energía de $g(t)$ es:

$$\Psi_g(f) = \frac{A^2}{\pi^2 f^2} [1 - \cos(\pi f T_b)]^2$$

La densidad espectral de potencia de la señal $x(t)$ es:

$$S_x(f) = \frac{\Psi_g(f)}{T_b} = \frac{A^2}{\pi^2 f^2 T_b} [1 - \cos(\pi f T_b)]^2$$

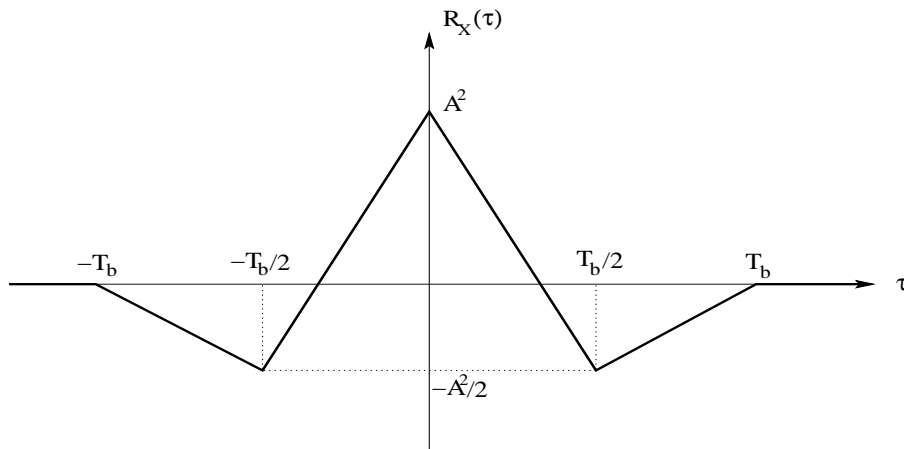
Para poder hacer la transformada inversa de Fourier la expresión anterior se puede poner también como:

$$S_x(f) = \frac{A^2 T_b}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{f T_b}{2}\right) - \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{f T_b}{2}\right) [\exp(j\pi f T_b) + \exp(-j\pi f T_b)]$$

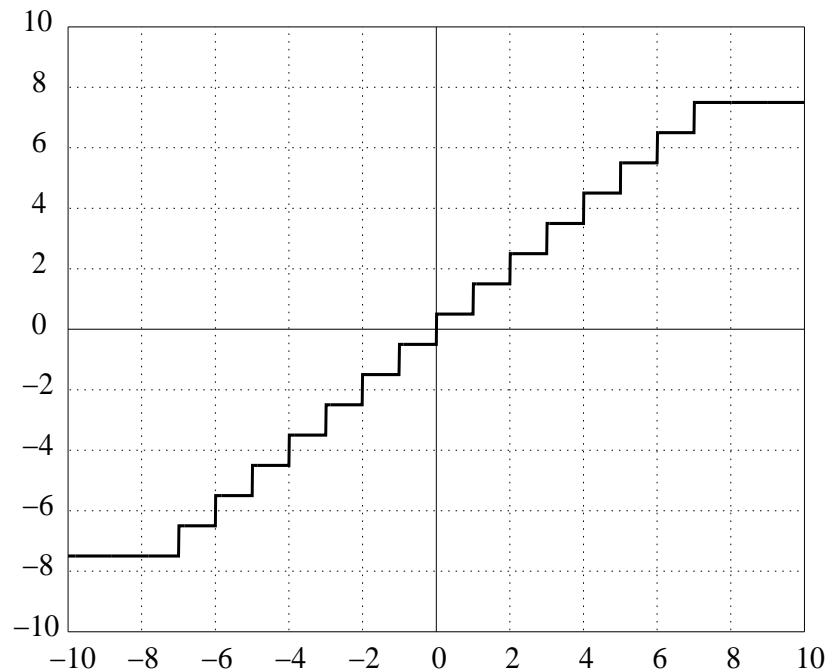
Ahora haciendo la transformada inversa de Fourier:

$$R_x(\tau) = A^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b/2}\right) - \frac{A^2}{2} \Lambda\left(\frac{\tau + T_b/2}{T_b/2}\right) - \frac{A^2}{2} \Lambda\left(\frac{\tau - T_b/2}{T_b/2}\right)$$

Esta autocorrelación puede verse gráficamente en la siguiente figura:



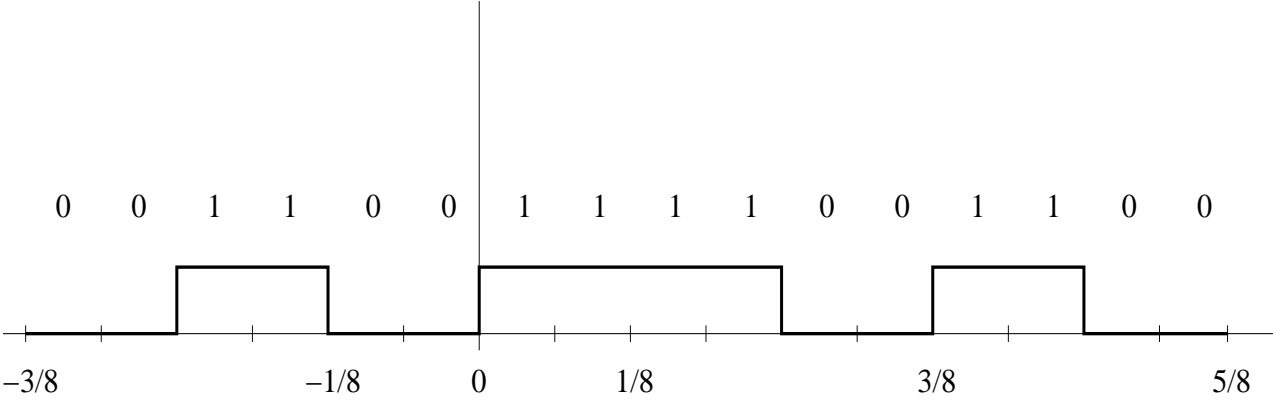
12. En la siguiente figura se puede ver la característica entrada/salida del cuantificador:



En la siguiente tabla se puede ver los valores para los instantes de muestreo, el valor de las muestras, el número de escalón y el código binario correspondiente:

$t = nT_s$	$m(nT_s)$	Número de escalón	Código binario
$-\frac{3}{8}$	$-3\sqrt{2} = -4,24$	3	0011
$-\frac{1}{8}$	$-3\sqrt{2} = -4,24$	3	0011
$\frac{1}{8}$	$3\sqrt{2} = 4,24$	12	1100
$\frac{3}{8}$	$3\sqrt{2} = 4,24$	12	1100

En la siguiente figura se puede ver la señal PCM usando código de línea NRZ unipolar



13.

a) La ganancia de compansión viene dada por:

$$C = 10 \log_{10} \left[\frac{d|v_2|}{d|v_1|} \Big|_{|v_1|=0} \right]$$

siendo v_1 la señal de entrada y v_2 la de salida. En el caso de ley μ se obtiene:

$$C = 10 \log_{10} \left[\frac{\mu}{\ln(1 + \mu)} \right]$$

b) Para $\mu = 255$ sustituyendo se obtiene $C = 33$ dB.

c) Utilizando compansión con $n = 8$ bits se tiene que:

$$\text{SNR} = k + 6n + C = k + 81 \text{ dB}$$

donde k es una constante que depende de las características de la señal de entrada. Si se utiliza cuantificación lineal sin compansión:

$$\text{SNR} = k + 6n \text{ dB}$$

Igualando, despejando n y tomando el siguiente entero se obtiene $n = 14$ bits.

14. Para NRZ unipolar la probabilidad media de error es:

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \right)$$

siendo γ la SNR de pico. Para una probabilidad de error $P_e = 10^{-6}$ se puede usar la aproximación:

$$\text{erfc}(u) \approx \frac{\exp(-u^2)}{\sqrt{\pi}u}$$

obteniéndose $u \approx 3,35$, por lo que $\gamma = 8u^2 = 90$. Si ahora el ancho de banda se duplica tenemos el doble de potencia de ruido, por lo que la nueva SNR de pico γ' se reduce a la mitad:

$$\gamma' = \frac{\gamma}{2} = 45$$

De esta forma la nueva probabilidad de error media será:

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma'}{2}} \right) = 4,3 \cdot 10^{-4}$$

15. La varianza del ruido es:

$$\sigma^2 = N_0 B$$

Sea y_k la variable aleatoria a la entrada del decisor para el bit k . Esta variable es Gaussiana con varianza σ^2 y con media A cuando se transmite 1 y $-A$ cuando se transmite 0, por lo tanto se puede escribir:

$$f_{Y_k/1}(y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y_k - A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$f_{Y_k/0}(y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y_k + A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

La probabilidad de error cuando se ha transmitido 1 es:

$$P_{e_1} = \int_{-\infty}^0 f_{Y_k/1}(y_k) dy_k = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

La probabilidad de error cuando se ha transmitido 0 es:

$$P_{e_0} = \int_0^{\infty} f_{Y_k/0}(y_k) dy_k = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Como son iguales el canal es simétrico. La probabilidad de error medio será, para bits equiprobables:

$$P_e = p_0 P_{e_0} + p_1 P_{e_1} = \frac{1}{2} P_{e_0} + \frac{1}{2} P_{e_1} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Si llamamos γ a la SNR de pico dada por:

$$\gamma = \frac{A^2}{\sigma^2}$$

entonces:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right)$$

16.

a) La probabilidad de error cuando se ha transmitido 1 es:

$$P_{e_1} = \int_{-\infty}^{\eta} f_{X/1}(x) dx$$

La probabilidad de error cuando se ha transmitido 0 es:

$$P_{e_0} = \int_{\eta}^{\infty} f_{X/0}(x) dx$$

La probabilidad de error medio será:

$$P_e = p_0 P_{e_0} + p_1 P_{e_1}$$

Hay que minimizar esta probabilidad con respecto al umbral η . Derivando e igualando a cero se obtiene como umbral óptimo η_{opt} aquel que satisfaga la ecuación:

$$\frac{f_{X/1}(\eta_{\text{opt}})}{f_{X/0}(\eta_{\text{opt}})} = \frac{p_0}{p_1}$$

b) En este caso las funciones de densidad son Gaussianas dadas por:

$$f_{X/1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{\left(x - \frac{A}{2}\right)^2}{2\sigma^2} \right]$$
$$f_{X/0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{\left(x + \frac{A}{2}\right)^2}{2\sigma^2} \right]$$

Sustituyendo en la ecuación para calcular η_{opt} y operando se obtiene:

$$\eta_{\text{opt}} = \frac{\sigma^2}{A} \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right)$$

c) En este caso las funciones de densidad son Gaussianas dadas por:

$$f_{X/1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x - A)^2}{2\sigma^2} \right]$$
$$f_{X/0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right]$$

Sustituyendo en la ecuación para calcular η_{opt} y operando se obtiene:

$$\eta_{\text{opt}} = \frac{A}{2} + \frac{\sigma^2}{A} \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right)$$