TRATAMIENTO Y TRANSMISIÓN DE SEÑALES

SOLUCIÓN PROBLEMAS TEMA 7

TRANSMISIÓN DIGITAL BANDA BASE

1. El ancho de banda del pulso con forma de sinc vale:

$$B_T = \frac{1}{2T_b} = \frac{R_b}{2} = 28 \text{ KHz}$$

El ancho de banda del pulso con forma de coseno alzado viene dado por:

$$B_w = 2B_T - f_1$$

La expresión del factor de roll-off ρ viene dada por:

$$\rho = 1 - \frac{f_1}{B_T}$$

Usando las dos expresiones anteriores y despejando el ancho de banda B_w en función de B_T y ρ se tiene que:

$$B_w = B_T(1 + \rho)$$

a) $B_w = 35$ KHz.

b) $B_w = 42$ KHz.

c) $B_w = 49$ KHz.

d) $B_w = 56$ KHz.

2. Para ocho niveles de amplitud hay que coger los bits de tres en tres ($\log_2 8 = 3$). La tasa en símbolos por segundo será:

$$R = \frac{R_b}{3} = 18{,}67 \text{ Kbps}$$

El ancho de banda del pulso con forma de sinc vale:

$$B_T = \frac{1}{2T} = \frac{R}{2} = 9{,}33 \text{ KHz}$$

Usando la expresión:

$$B_w = B_T(1+\rho)$$

   a) $B_w = 11{,}66$ KHz.

   b) $B_w = 14$ KHz.

   c) $B_w = 16{,}33$ KHz.

   d) $B_w = 18{,}66$ KHz.

3. La tasa binaria es:

$$R_b = \frac{1}{T_b} = 100 \text{ Kbps}$$

El ancho de banda del pulso con forma de sinc vale:

$$B_T = \frac{1}{2T_b} = \frac{R_b}{2} = 50 \text{ KHz}$$

Despejando ρ de la expresión para el pulso con forma de coseno alzado:

$$B_w = B_T(1+\rho)$$

se tiene:

$$\rho = \frac{B_w}{B_T} - 1 = 0{,}5$$

4. La varianza a la salida del filtro del receptor es:

$$\sigma_N^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{R,opt}(f)|^2 \, df$$

La respuesta en amplitud del filtro óptimo del receptor diseñado para minimizar la probabilidad de error viene dado por:

$$|H_{R,opt}(f)|^2 = \frac{C \; |P(f)}{|H_C(f)|}$$

siendo C una constante, $|P(f)|$ el módulo del espectro del pulso con forma de coseno alzado y $|H_C(f)|$ la respuesta en amplitud del canal. Se tiene para $C = 1$ que:

$$|H_{R,opt}(f)|^2 = \frac{P(f)}{H_C(0)}$$

puesto que $P(f)$ es siempre positivo y vale cero fuera de $|f| < B$ y $H_C(f)$ es constante y vale $H_C(0)$ en $|f| < B$ y cero fuera. Entonces la varianza a la salida del filtro del receptor:

$$\sigma_N^2 = \frac{N_0}{2H_C(0)} \int_{-\infty}^{\infty} P(f) \; df = \frac{N_0 \; p(0)}{2H_C(0)}$$

Pero el pulso con forma de coseno alzado siempre se diseña para que en el origen de tiempos valga la unidad:

$$p(0) = 1$$

por lo que:

$$\sigma_N^2 = \frac{N_0}{2H_C(0)}$$

5.

a) El ancho de banda del pulso con forma de sinc vale:

$$B_T = \frac{1}{2T_b} = \frac{R_b}{2} = 2400 \text{ Hz}$$

El valor de ρ para el filtro con forma de coseno alzado viene dado por:

$$\rho = \frac{B_w}{B_T} - 1 = 1$$

La respuesta en amplitud del filtro óptimo del transmisión diseñado para minimizar la probabilidad de error viene dado por:

$$|H_{T,opt}(f)|^2 = \frac{K^2 \ |P(f)}{C|G(f)|^2|H_C(f)|}$$

y la del filtro de recepción:

$$|H_{R,opt}(f)|^2 = \frac{C \ |P(f)}{|H_C(f)|}$$

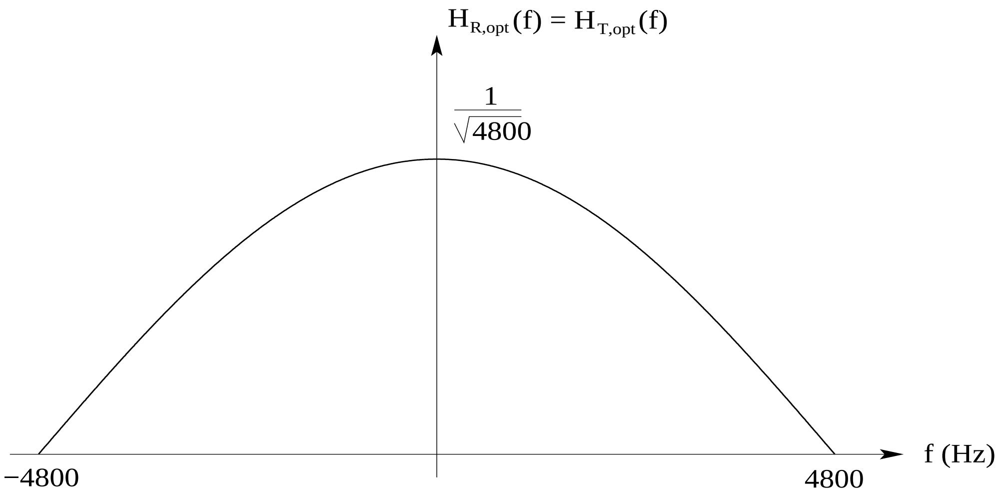
siendo K y C constantes, $|G(f)|$ el módulo del espectro del pulso transmitido, $|P(f)|$ el módulo del espectro del pulso recibido (con forma de coseno alzado para $\rho = 1$ en este caso) y $|H_C(f)|$ es la respuesta en amplitud del canal. Para que los filtros tengan la misma respuesta en amplitud hay que elegir $K = 1$, $C = 1$ y el pulso de transmisión debe tener una duración temporal lo suficientemente corta como para que $|G(f)|$ sea aproximadamente constante en el intervalo frecuencial $|f| < 4800$ Hz. En este caso se puede llegar a que:

$$|H_{T,opt}(f)|^2 = |H_{R,opt}(f)|^2 = P(f)$$

ya que $P(f)$ es positivo y diferente de cero sólo en el intervalo $|f| < 4800$. La fase de los filtros óptimos de transmisión y recepción tiene que ser lineal. En particular puede ser cero, por lo que se tiene que:

$$H_{T,opt}(f) = H_{R,opt}(f) = \sqrt{P(f)} = \frac{1}{\sqrt{4800}} \cos\left(\frac{\pi f}{9600}\right) \Pi\left(\frac{f}{9600}\right)$$

En la siguiente figura se puede ver el espectro tanto del filtro óptimo de transmisión como de recepción (tienen forma de medio coseno):



b) La expresión de la varianza viene dada por:

$$\sigma_N^2 = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H_{R,opt}(f)|^2\, df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} P(f)\ df = \frac{N_0\ p(0)}{2}$$

Como el valor del pulso en el origen de tiempos es unidad, es decir $p(0) = 1$, entonces:

$$\sigma_N^2 = \frac{N_0}{2} = 5 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{W}$$

c) En el caso NRZ polar la expresión para la probabilidad de error media mínima es:

$$P_{e,\text{mín}} = \frac{1}{2}\text{erfc}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{A}{\sigma_N}\right)_{\text{máx}}\right]$$

Utilizando la tabla de la función erfc para que:

$$\text{erfc}(u) = 2 \cdot 10^{-5}$$

aproximadamente $u = 3$. Entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{A}{\sigma_N} = u$$

despejando la potencia de pico A^2 se tiene que:

$$A^2 = u^2\sigma_N^2\sqrt{2} = 9 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{W}$$

6. La expresión de la señal recibida es:

$$m(t) = \sum_n A_n \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - n\right)$$

a una tasa de transmisión de $1/T$ baudios. La expresión en el dominio de la frecuencia de la señal recibida es:

$$M(f) = T\ \Pi(fT) \sum_n A_n \exp(-j2\pi n f T)$$

$M(f)$ tiene un ancho de banda $1/2T$ por lo que pasa sin distorsión a través del filtro paso bajo ideal de ancho de banda $B = 1/2T$. El ruido a la salida de este filtro tiene una varianza de:

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2T}$$

a) Caso binario ($M = 2$). Los niveles recibidos son $A_n = \pm A/2$ y el umbral es 0. El símbolo 0 tiene nivel $A_n = -A/2$ y el 1 $A_n = A/2$.

Si se transmite 1, la variable aleatoria a la entrada del decisor es:

$$X = \frac{A}{2} + N$$

que es una variable Gaussiana con media $A/2$ y varianza σ^2. Se comete error cuando la salida del decisor es un 0. Esto ocurrirá siempre que la variable X sea negativa:

$$P_{e_1} = P(X < 0\ /\ 1) = \int_{-\infty}^{0} f_{X/1}(x)dx = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Si se transmite 0, la variable aleatoria a la entrada del decisor es:

$$X = -\frac{A}{2} + N$$

que es una variable Gaussiana con media $-A/2$ y varianza σ^2. Se comete error cuando la salida del decisor es un 1. Esto ocurrirá siempre que la variable X sea positiva:

$$P_{e_0} = P(X > 0\ /\ 0) = \int_{0}^{\infty} f_{X/0}(x)dx = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

La probabilidad de error medio teniendo en cuenta que los símbolos son equiprobables viene dada por:

$$P_e = P_0 P_{e_0} + P_1 P_{e_1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)\right] = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

b) Caso ternario ($M = 3$). Los niveles recibidos son $A_n = 0, \pm A$ y los umbrales son $\pm A/2$. El símbolo 0 tiene nivel $A_n = -A$, el 1 $A_n = 0$ y el 2 $A_n = A$.

Si se transmite 2, la variable aleatoria a la entrada del decisor es:

$$X = A + N$$

que es una variable Gaussiana con media A y varianza σ^2. Se comete error cuando la salida del decisor es 0 ó 1. Esto ocurrirá siempre que la variable X sea menor que $A/2$:

$$P_{e_2} = P\left(X < \frac{A}{2} \;/\; 2\right) = \int_{-\infty}^{\frac{A}{2}} f_{X/2}(x)dx = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Si se transmite 1, la variable aleatoria a la entrada del decisor es:

$$X = N$$

que es una variable Gaussiana con media 0 y varianza σ^2. Se comete error cuando la salida del decisor es 0 ó 2. Esto ocurrirá siempre que la variable X sea menor que $-A/2$ o mayor que $A/2$:

$$P_{e_1} = P\left(X < -\frac{A}{2} \;/\; 1\right) + P\left(X > \frac{A}{2} \;/\; 1\right) = \int_{-\infty}^{-\frac{A}{2}} f_{X/1}(x)dx + \int_{\frac{A}{2}}^{\infty} f_{X/1}(x)dx$$

operando:

$$P_{e_1} = \text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Si se transmite 0, la variable aleatoria a la entrada del decisor es:

$$X = -A + N$$

que es una variable Gaussiana con media $-A$ y varianza σ^2. Se comete error cuando la salida del decisor es 1 ó 2. Esto ocurrirá siempre que la variable X sea mayor que $-A/2$:

$$P_{e_0} = P\left(X > -\frac{A}{2} \;/\; 0\right) = \int_{-\frac{A}{2}}^{\infty} f_{X/0}(x)dx = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

La probabilidad de error medio teniendo en cuenta que los símbolos son equiprobables viene dada por:

$$P_e = P_0 P_{e_0} + P_1 P_{e_1} + P_2 P_{e_2} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right) + \text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)\right]$$

simplificando:

$$P_e = \frac{2}{3}\text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

c) Caso cuaternario ($M = 4$). Los niveles recibidos son $A_n = \pm A/2, \pm 3A/2$ y los umbrales son $0, \pm A$. El símbolo 0 tiene nivel $A_n = -3A/2$, el 1 $A_n = -A/2$, el 2 $A_n = A/2$ y el 3 $A_n = 3A/2$.
Si se transmite 3, la variable aleatoria a la entrada del decisor es:

$$X = \frac{3A}{2} + N$$

que es una variable Gaussiana con media $3A/2$ y varianza σ^2. Se comete error cuando la salida del decisor es 0, 1 ó 2. Esto ocurrirá siempre que la variable X sea menor que A:

$$P_{e_3} = P(X < A \ / \ 3) = \int_{-\infty}^{A} f_{X/3}(x)dx = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Si se transmite 2, la variable aleatoria a la entrada del decisor es:

$$X = \frac{A}{2} + N$$

que es una variable Gaussiana con media $A/2$ y varianza σ^2. Se comete error cuando la salida del decisor es 0, 1 ó 3. Esto ocurrirá siempre que la variable X sea menor que 0 ó mayor que A:

$$P_{e_2} = P(X < 0 \ / \ 2) + P(X > A \ / \ 2) = \int_{-\infty}^{0} f_{X/2}(x)dx + \int_{A}^{\infty} f_{X/2}(x)dx$$

operando:

$$P_{e_2} = \text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Si se transmite 1, la variable aleatoria a la entrada del decisor es:

$$X = -\frac{A}{2} + N$$

que es una variable Gaussiana con media $-A/2$ y varianza σ^2. Se comete error cuando la salida del decisor es 0, 2 ó 3. Esto ocurrirá siempre que la variable X sea menor que $-A$ o mayor que 0:

$$P_{e_1} = P(X < -A \ / \ 1) + P(X > 0 \ / \ 1) = \int_{-\infty}^{-A} f_{X/1}(x)dx + \int_{0}^{\infty} f_{X/1}(x)dx$$

operando:

$$P_{e_1} = \text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Si se transmite 0, la variable aleatoria a la entrada del decisor es:

$$X = -\frac{3A}{2} + N$$

que es una variable Gaussiana con media $-3A/2$ y varianza σ^2. Se comete error cuando la salida del decisor es 1, 2 ó 3. Esto ocurrirá siempre que la variable X sea mayor que $-A$:

$$P_{e_0} = P(X > -A \ / \ 0) = \int_{-A}^{\infty} f_{X/0}(x)dx = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

La probabilidad de error medio teniendo en cuenta que los símbolos son equiprobables viene dada por:

$$P_e = P_0 P_{e_0} + P_1 P_{e_1} + P_2 P_{e_2} + P_3 P_{e_3}$$

por lo que:

$$P_e = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right) + \text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right) + \text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)\right]$$

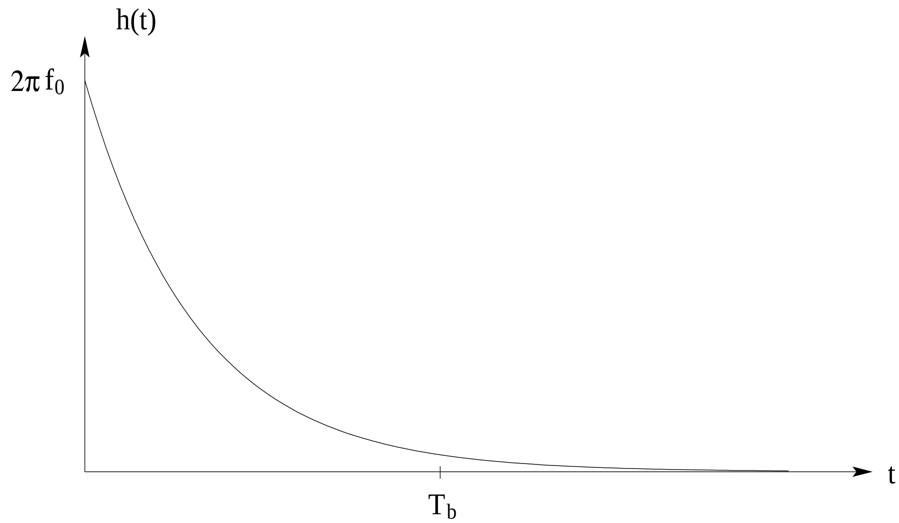
simplificando:

$$P_e = \frac{3}{4}\text{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

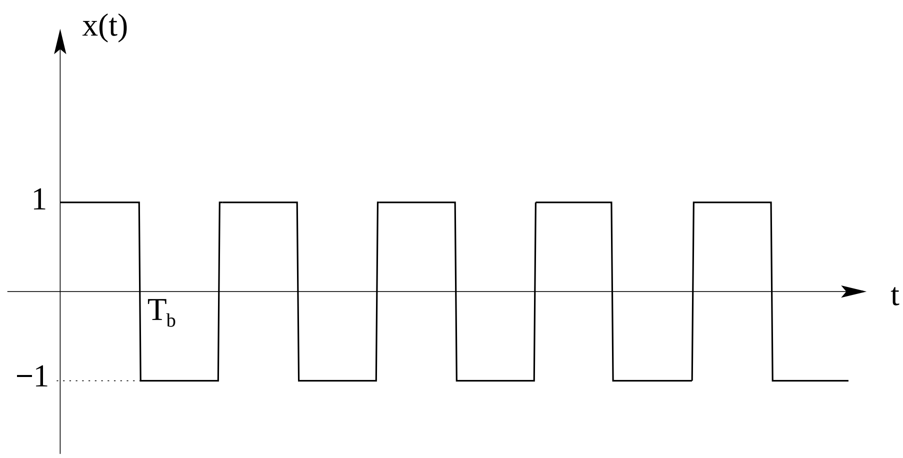
7. La respuesta al impulso del filtro viene dada por:

$$h(t) = 2\pi f_0 \exp(-2\pi f_0 t) u(t)$$

En la siguiente figura se puede ver gráficamente:



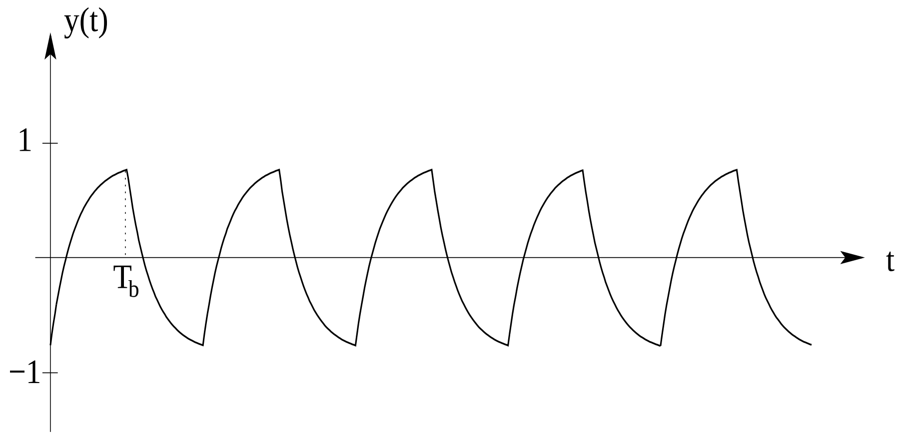
a) En la siguiente figura podemos ver la señal a la entrada del filtro:



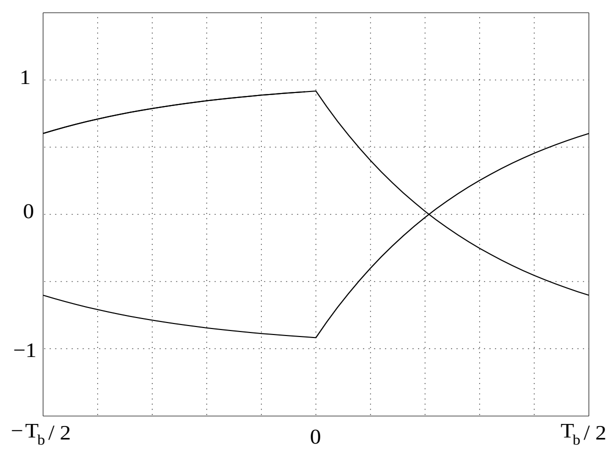
La expresión aproximada para un periodo de la señal a la salida es:

$$y(t) \approx \begin{cases} 1 - 2\exp(-2\pi f_0 t) & 0 < t < T_b \\ 2\exp[-2\pi f_0 (t - T_b)] - 1 & T_b < t < 2T_b \end{cases}$$

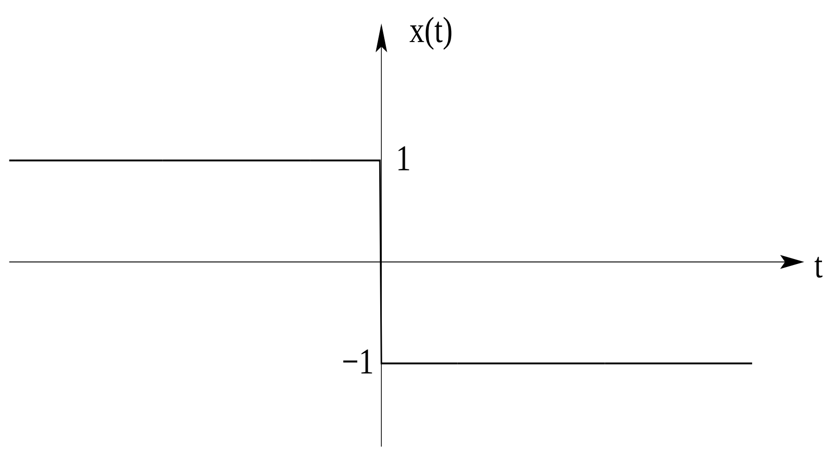
Para determinar esta expresión sólo se ha tenido en cuenta un intervalo de bit a la hora de hacer la integral de convolución. La forma de la señal exacta es la misma pero los valores máximo y mínimo ya no son ± 1 sino valores algo menores. En la siguiente figura podemos ver la señal a la salida exacta:



El diagrama de ojos se puede ver en la siguiente figura:



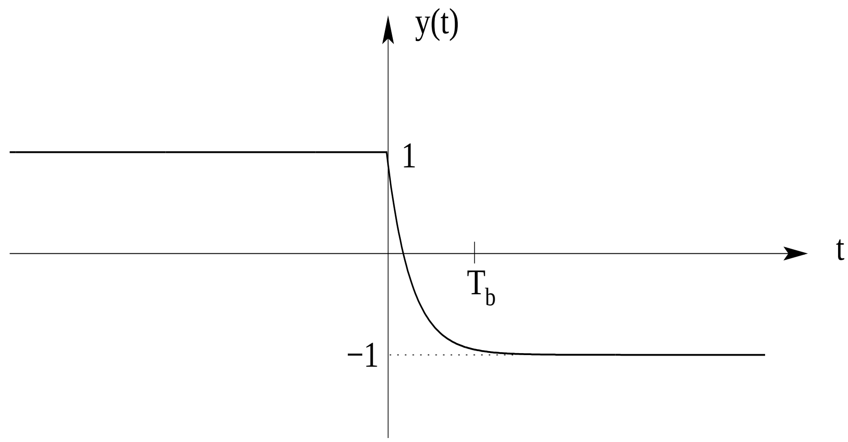
b) En la siguiente figura podemos ver la señal a la entrada del filtro:



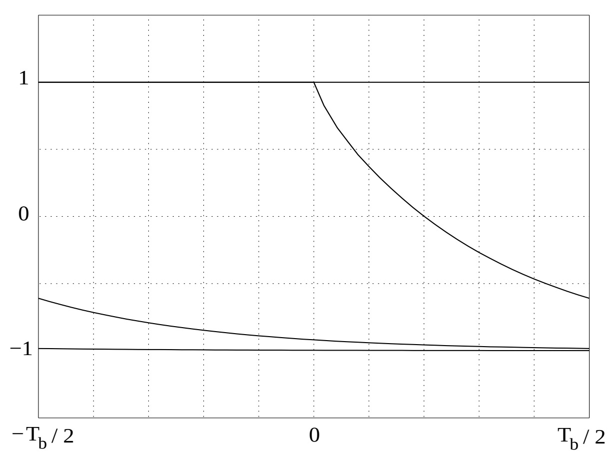
La expresión, en este caso exacta, para la señal de salida es:

$$y(t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 2\exp(-2\pi f_0 t) - 1 & t > 0 \end{cases}$$

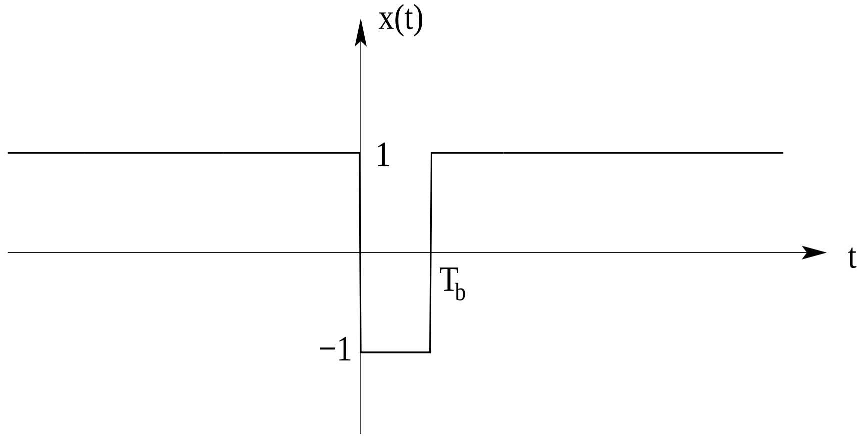
En la siguiente figura podemos ver esta señal a la salida:



El diagrama de ojos se puede ver en la siguiente figura:



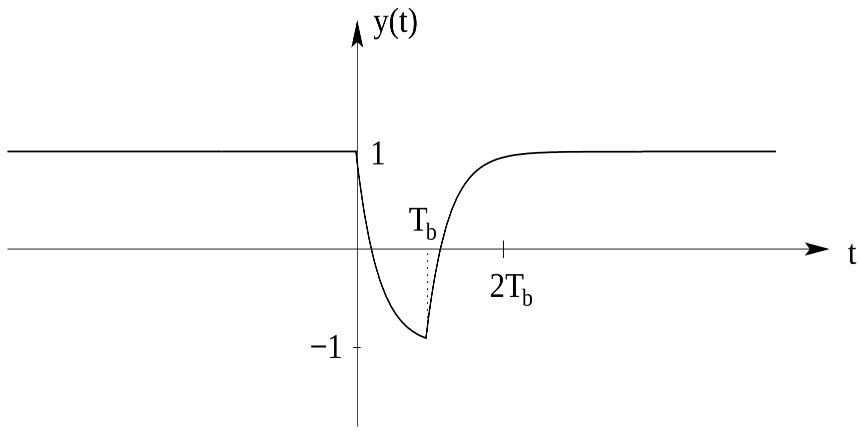
c) En la siguiente figura podemos ver la señal a la entrada del filtro en este caso:



La expresión aproximada de la señal a la salida es:

$$y(t) \approx \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 2\exp(-2\pi f_0 t) - 1 & 0 < t < T_b \\ 1 - 2\exp[-2\pi f_0 (t - T_b)] & t > T_b \end{cases}$$

Para determinar esta expresión sólo se ha tenido en cuenta un intervalo de bit a la hora de hacer la integral de convolución para $0 < t < T_b$. La forma de la señal exacta es la misma pero el valor mínimo ya no es -1 sino un valor algo mayor. En la siguiente figura podemos ver la señal a la salida exacta:



El diagrama de ojos se puede ver en la siguiente figura: