

SEÑALES Y SISTEMAS DE COMUNICACIÓN

Marcos Martín Fernández
E. T. S. de Ingenieros de Telecomunicación
Universidad de Valladolid

22 de octubre de 2013

Índice general

1. Caracterización de Señales en el Dominio del Tiempo	1
1.1. Definición de Señal	1
1.2. Clasificación de las Señales	1
1.2.1. Continua, Discreta y Digital	1
1.2.2. Periódica y no Periódica	3
1.2.3. Determinista y Aleatoria	3
1.2.4. De Potencia y de Energía	3
1.3. Unidades Logarítmicas	4
2. Caracterización de Señales en el Dominio de la Frecuencia	6
2.1. Series de Fourier	6
2.2. Definición de Transformada de Fourier	8
2.3. Propiedades de la Transformada de Fourier	9
2.3.1. Linealidad	9
2.3.2. Escalado en el Tiempo	9
2.3.3. Dualidad	10
2.3.4. Desplazamiento en el Tiempo	10
2.3.5. Desplazamiento en Frecuencia	11
2.3.6. Área Temporal	11
2.3.7. Área Frecuencial	11
2.3.8. Diferenciación en el Dominio del Tiempo	11
2.3.9. Integración en el Dominio del Tiempo	12
2.3.10. Funciones Conjugadas	12
2.3.11. Multiplicación en el Dominio del Tiempo	13
2.3.12. Convolución en el Dominio del Tiempo	13
2.4. Función Delta de Dirac	14
2.4.1. Aplicaciones del Impulso Unidad	16
2.5. Transformada de Fourier de Señales Periódicas	18
2.6. Transformadas de Fourier Inmediatas	20
2.7. Primera Definición de Ancho de Banda	21
3. Caracterización de los Sistemas	22
3.1. Definición de Sistema	22
3.2. Propiedades Deseables de los Sistemas	22
3.2.1. Linealidad	22
3.2.2. Invarianza Temporal	22
3.2.3. Estabilidad	22
3.2.4. Memoria	23
3.2.5. Causalidad	23
3.3. Clasificación de los Sistemas	23
3.3.1. Sistema Continuo Continuo	23
3.3.2. Sistema Discreto Discreto	23
3.3.3. Sistema Digital Digital	23
3.3.4. Sistema Continuo Discreto	24
3.3.5. Sistema Discreto Digital	24
3.3.6. Sistema Continuo Digital	24

3.3.7. Sistema Discreto Continuo	24
3.3.8. Sistema Digital Continuo	25
3.4. Respuesta al Impulso de un Sistema	25
3.5. Respuesta en Frecuencia de un Sistema	27
3.6. Transmisión sin Distorsión	29
3.7. Filtros Ideales	31
3.8. Modelo de un Sistema de Comunicaciones	32
3.8.1. Caso Analógico	32
3.8.2. Caso Digital	33
4. Densidad Espectral y Correlación	36
4.1. Producto Escalar, Norma y Ortogonalidad	36
4.2. Funciones de Correlación	37
4.3. Densidad Espectral de Energía	38
4.4. Densidad Espectral de Potencia para Señales Periódicas	39
4.5. Autocorrelación de Señales de Energía	40
4.6. Autocorrelación de Señales Periódicas	41
4.7. Correlación Cruzada de Señales de Energía	42
4.8. Correlación Cruzada de Señales Periódicas	43
4.9. Densidades Espectrales a la Entrada y Salida de un Sistema	44
4.10. Correlaciones a la Entrada y Salida de un Sistema	44
5. Transformada de Hilbert	45
5.1. Definición	45
5.2. Propiedades de la Transformada de Hilbert	46
5.2.1. Propiedad 1	46
5.2.2. Propiedad 2	46
5.2.3. Propiedad 3	46
5.2.4. Propiedad 4	47
5.3. Transformadas de Hilbert Inmediatas	47
5.4. Señal Analítica	47
5.5. Señales Paso Banda	49
5.6. Sistemas Paso Banda	51
5.7. Retardo de Fase y de Grupo	54

Capítulo 1

Caracterización de Señales en el Dominio del Tiempo

1.1. Definición de Señal

Se define una señal como una función del tiempo t que toma un único valor en cada punto y que representa una información. La variable tiempo es la variable independiente, mientras que el valor que toma dicha señal en ese instante de tiempo es la variable dependiente.

La variable independiente va a tomar siempre valores reales, mientras que la variable dependiente puede ser tanto real como compleja. Por lo tanto una señal se puede ver como un proceso de mapeo de una variable real en una variable compleja, puesto que una variable real no deja de ser un caso particular de una variable compleja. Una señal de este tipo puede representar diferentes tipos de información:

- Voz
- Imagen (2 dimensiones)
- Tensión o corriente
- Un conjunto de símbolos

1.2. Clasificación de las Señales

1.2.1. Continua, Discreta y Digital

- Si la señal puede tomar cualquier valor en cualquier instante de tiempo, es decir, si es una función continua en el tiempo y continua en amplitud, se dice que la señal es **continua** o **analógica** como puede verse en la figura 1.1. La variable tiempo se representa mediante la letra t y la señal mediante $x(t)$.
- Si la señal está definida únicamente en instantes enteros del tiempo, pero puede tomar cualquier valor real o complejo, se dice que la señal es **discreta**, como puede verse en la figura 1.2. En este caso

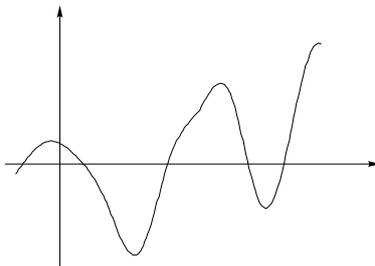


Figura 1.1: Ejemplo de señal Continua.

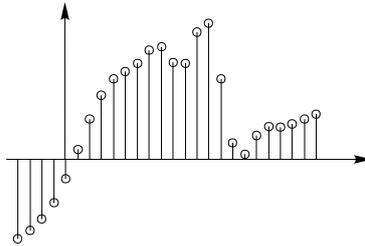


Figura 1.2: Ejemplo de señal Discreta.

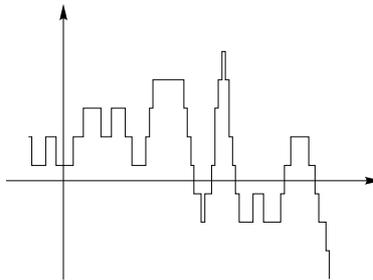


Figura 1.3: Ejemplo de señal Discreta en Amplitud.

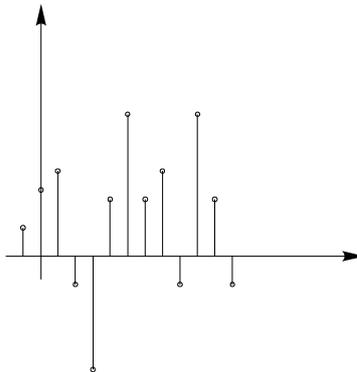


Figura 1.4: Ejemplo de señal Digital.

tendríamos un mapeo de una variable real en otra compleja. La variable independiente se representa con la letra n y la señal mediante $x[n]$.

- Si la señal es continua en el tiempo y discreta en amplitud, es decir, la señal está definida en todo instante de tiempo t , pero únicamente puede tomar ciertos valores de amplitud prefijados, que no tienen por que ser reales, como puede verse en la figura 1.3. Se representa de igual forma que la señal continua, es decir mediante $x(t)$.
- Si la señal es discreta tanto en la variable tiempo como en amplitud, se dice que la señal es **digital** como puede verse en la figura 1.4. Se representa igual que la señal discreta $x[n]$. Mientras que la variable tiempo puede tomar únicamente valores enteros, la amplitud toma valores discretos, pero que no tienen por que ser enteros. Normalmente esta señal digital se ve sometida a un proceso de codificación.

Una señal analógica es la que se toma por ejemplo con un micrófono, $x(t)$. Mediante un proceso denominado **muestreo** se convierte esa señal continua en una señal discreta $x[n]$. Si ahora mediante otro proceso denominado **cuantificación** se discretiza la amplitud y se codifica se obtiene la señal digital $\hat{x}[n]$. El conjunto de todo el proceso como puede verse en la figura 1.5, se denomina **digitalización**.

A partir de ahora salvo que se indique lo contrario nos centraremos en señales continuas.

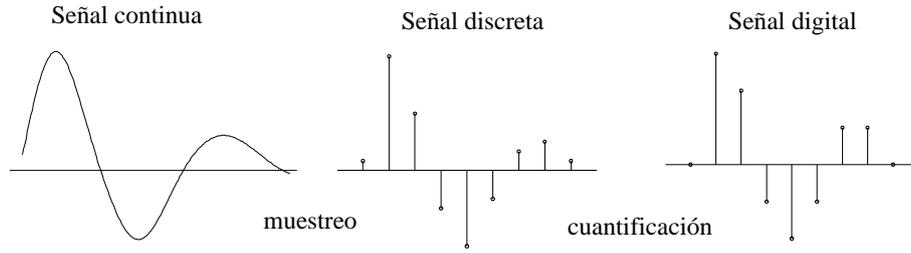


Figura 1.5: Ejemplo del proceso de Digitalización.

1.2.2. Periódica y no Periódica

Una señal **periódica** es aquella que satisface la condición

$$g(t) = g(t + T_0) \quad \forall t \quad \text{con } T_0 \text{ constante.} \quad (1.1)$$

El menor valor de T_0 que satisface esta condición se denomina **período** de $g(t)$. El período T_0 define un ciclo completo de $g(t)$. Cualquier otra señal que no satisfaga la condición dada por la ecuación (1.1) es **no periódica**.

1.2.3. Determinista y Aleatoria

Una señal **determinista** es aquella que sabemos a priori su valor en cualquier instante de tiempo. Se especifica completamente como una función del tiempo.

Una señal **aleatoria** es cuando tenemos incertidumbre en el valor que toma esa señal en cada instante de tiempo. Se puede considerar dicha señal como perteneciente a un conjunto infinito de señales de modo que no sabemos cual de ellas es la que realmente define nuestra señal. Esta señal se puede denominar también proceso estocástico.

1.2.4. De Potencia y de Energía

En los sistemas eléctricos una señal representa a una tensión o a una corriente. Si consideramos la corriente $i(t)$ que pasa a través de una resistencia R , la tensión en bornas de esa resistencia será $v(t) = Ri(t)$. La potencia instantánea disipada por dicha resistencia vendrá definida por

$$p(t) = \frac{|v(t)|^2}{R} \quad (1.2)$$

o equivalentemente por

$$p(t) = R|i(t)|^2. \quad (1.3)$$

En cualquier caso la potencia instantánea es proporcional al cuadrado de la amplitud de la señal. En el caso de que $R = 1\Omega$ las ecuaciones (1.2) y (1.3) se reducen al cuadrado de la amplitud de la señal. En general en el análisis de señales $g(t)$ va a representar tanto una señal de tensión como una señal de corriente puesto que se eligen por convenio cargas normalizadas de 1Ω . Entonces, la expresión de la **potencia instantánea** será

$$p(t) = |g(t)|^2. \quad (1.4)$$

Por lo tanto la **energía** total de una señal vendrá definida por

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt. \quad (1.5)$$

Además podemos definir la **potencia media** o **potencia promedio** de esa señal mediante

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt. \quad (1.6)$$

Se dice que una señal es de **energía** si y sólo si satisface la condición

$$0 < E < \infty. \quad (1.7)$$

Se dice que una señal es de **potencia** si y sólo si satisface la condición

$$0 < P < \infty. \quad (1.8)$$

Las señales de potencia y energía son por lo tanto mutuamente excluyentes. En particular una señal de energía tiene potencia media cero y una señal de potencia tiene energía infinita.

En general tanto las señales periódicas como las aleatorias van a ser señales de potencia, mientras que las señales deterministas y no periódicas suelen ser de energía.

1.3. Unidades Logarítmicas

Las representaciones logarítmicas son comparaciones entre magnitudes del mismo tipo. Por lo tanto son **relativas** y **adimensionales**. Se utilizan mucho en ingeniería por razones prácticas: los productos y cocientes se convierten en sumas y restas, simplificando notaciones y además las respuestas de nuestros sentidos son proporcionales a los logaritmos de las excitaciones.

Estas indicaciones logarítmicas tienen la forma general

$$k \log_n \frac{g_2}{g_1}. \quad (1.9)$$

En esa ecuación n es la base de los logaritmos empleados que suele ser 10, salvo en algún caso en el que se utilizan logaritmos neperianos. k es un factor de proporcionalidad, vale 10 o 20 para base 10 y 1 o 0,5 para base e . g_1 y g_2 son dos valores de magnitudes físicas a las que se refiere la indicación logarítmica, expresados en las mismas unidades.

Los valores de g_1 y g_2 pueden ser:

- Valores de la magnitud que se considere en dos puntos diferentes. Por ejemplo la potencia a la entrada y la potencia a la salida de cierto dispositivo.
- Que g_2 sea el valor de una magnitud y g_1 otro valor de dicha magnitud fijado como referencia. Esta indicación logarítmica se denomina **nivel** y caracteriza a dicha magnitud.

Cuando la base es 10, tenemos la indicación logarítmica más utilizada denominada **decibelio** o **dB**. Por ejemplo si g_1 y g_2 son potencias expresadas en las mismas unidades se tiene que

$$A = 10 \log \frac{P_2}{P_1} \text{ dB}. \quad (1.10)$$

Cuando el valor de A de la ecuación (1.10) es positivo, se dice que es **ganancia en potencia**. Si A es negativo se dice que hay una **atenuación en potencia** o **pérdida**.

Si P_1 y P_2 son potencias desarrolladas en unas resistencias de valor R , cuya tensión eficaz aplicada en sus bornas es V_1 y V_2 , y pasa una corriente I_1 e I_2 respectivamente, la ecuación (1.10) puede ponerse de forma totalmente equivalente según

$$A = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \log \frac{\frac{V_2^2}{R}}{\frac{V_1^2}{R}} = 20 \log \frac{V_2}{V_1} = 20 \log \frac{I_2}{I_1} \text{ dB}. \quad (1.11)$$

Por lo tanto la relación entre magnitudes de señales puede darse tanto como relación de potencias, como relación de tensiones o como relación de corrientes, viniendo multiplicado el logaritmo en estos dos últimos casos por 20 en lugar de por 10.

Si se comparan potencias en dos cargas de distinto valor vemos que la ecuación (1.11) viene a ser

$$\begin{aligned} A &= 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \log \frac{\frac{V_2^2}{R_2}}{\frac{V_1^2}{R_1}} = 20 \log \frac{V_2}{V_1} + 10 \log \frac{R_1}{R_2} \text{ dB} \\ &= 10 \log \frac{I_2^2 R_2}{I_1^2 R_1} = 20 \log \frac{I_2}{I_1} + 10 \log \frac{R_2}{R_1} \text{ dB}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

En este caso la indicación en dB no es la misma cuando se refiere a corrientes, tensiones o potencias, debiendo aparecer el término de corrección debido a las diferentes impedancias.

El **neper** o **N** es otra medida logarítmica mucho menos utilizada que el dB. Equivale simplemente a un cambio de escala respecto al dB según

$$\begin{aligned} A &= \ln \frac{V_2}{V_1} \text{ N} \\ A &= \ln \frac{I_2}{I_1} \text{ N} \\ A &= \frac{1}{2} \ln \frac{P_2}{P_1} \text{ N}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

suponiendo impedancias iguales. Como se cumple que

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{\log \frac{V_2}{V_1}}{\log e} \quad (1.14)$$

se puede llegar a que

$$20 \log \frac{V_2}{V_1} = 20 \log e \ln \frac{V_2}{V_1} = 8,7 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (1.15)$$

Por lo tanto de la ecuación (1.15) se pueden deducir la relación entre dB y N según

$$\begin{aligned} A(\text{dB}) &= 8,7A(\text{N}) \\ 1 \text{ N} &= 8,7 \text{ dB} \\ 1 \text{ dB} &= 0,115 \text{ N}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Se denominan niveles a los valores logarítmicos que toma una magnitud en un punto, es decir, cuando g_2 es el valor de una magnitud en un punto y g_1 es un valor de referencia de dicha magnitud en las mismas unidades, en ese caso la ecuación (1.9) se puede poner

$$L = k \log \frac{g_2}{g_1} \text{ dBx}. \quad (1.17)$$

El valor L de la ecuación (1.17) se denomina nivel absoluto de g_2 y se representa con dBx, donde x va a indicar la unidad utilizada. Las dos unidades más utilizadas en sistemas de comunicaciones son:

dBm: Indicación muy utilizada para el nivel absoluto de potencias. En este caso la potencia de referencia es $P_1 = 1\text{mW}$. Luego el nivel $L(\text{dBm})$ asociado a $P(\text{mW})$ viene dado por

$$L(\text{dBm}) = 10 \log P(\text{mW}). \quad (1.18)$$

dBW: La potencia de referencia es $P_1 = 1\text{W}$, luego el nivel $L(\text{dBW})$ para una potencia $P(\text{W})$ viene dado por

$$L(\text{dBW}) = 10 \log P(\text{W}). \quad (1.19)$$

La expresión

$$L(\text{dbm}) = 10 \log P(\text{mW}) = 10 \log [10^3 P(\text{W})] = 10 \log P(\text{W}) + 10 \log 1000 = L(\text{dBW}) + 30 \quad (1.20)$$

permite pasar un nivel en dBm a dBW y viceversa.

Capítulo 2

Caracterización de Señales en el Dominio de la Frecuencia

2.1. Series de Fourier

Sea $g_p(t)$ una señal periódica con período T_0 . Utilizando la **expansión en series de Fourier** se puede representar la señal como una suma infinita de senos y cosenos según

$$g_p(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) \right] \quad (2.1)$$

donde a_n y b_n son las amplitudes desconocidas de los términos de la serie. La cantidad $\frac{n}{T_0}$ representa el **armónico n** de la **frecuencia fundamental** $f_0 = \frac{1}{T_0}$. Las funciones $\cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right)$ y $\sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right)$ se denominan **funciones básicas**. Estas funciones básicas forman un **conjunto ortogonal** en el intervalo T_0 y cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos\left(\frac{2\pi mt}{T_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt &= \begin{cases} \frac{T_0}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \\ \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos\left(\frac{2\pi mt}{T_0}\right) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt &= 0 \quad \forall m, n \\ \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sin\left(\frac{2\pi mt}{T_0}\right) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt &= \begin{cases} \frac{T_0}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Para determinar el coeficiente a_0 es necesario integrar en T_0 en ambos lados de la ecuación (2.1) y simplificar, dando como resultado

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p(t) dt \quad (2.3)$$

que corresponde a la **media temporal**. Para determinar a_n antes de integrar multiplicamos por $\cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right)$ y para determinar b_n multiplicamos por $\sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right)$, obteniéndose como resultado

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para que una señal pueda representarse mediante serie de Fourier se tienen que cumplir las siguientes **condiciones**:

- La función $g_p(t)$ tome para cada instante t un **valor único** en un intervalo T_0 dado.
- La función $g_p(t)$ tenga un **número finito de discontinuidades** en un intervalo T_0 dado.
- La función $g_p(t)$ tenga un **número finito de máximos y mínimos** en un intervalo T_0 dado.
- La función $g_p(t)$ sea **absolutamente integrable** en T_0 , es decir, se tiene que cumplir

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |g_p(t)| dt < \infty. \quad (2.5)$$

Estas condiciones se denominan **condiciones de Dirichlet** y normalmente las señales con las se suele trabajar las cumplen.

La expansión en series de Fourier se puede poner de una forma más simple y elegante utilizando para ello las funciones exponenciales complejas. Para ello hay que tener en cuenta las relaciones

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) &= \frac{1}{2} \left[\exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) + \exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) \right] \\ \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) &= \frac{1}{2j} \left[\exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) - \exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Sustituyendo las relaciones dadas por la ecuación (2.6) en la ecuación (2.1) se obtiene

$$g_p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n - jb_n) \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) + (a_n + jb_n) \exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) \right]. \quad (2.7)$$

Si ahora llamamos c_n al coeficiente complejo

$$c_n = \begin{cases} a_n - jb_n & n > 0 \\ a_0 & n = 0 \\ a_{-n} + jb_{-n} & n < 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

entonces la expresión de $g_p(t)$ viene dada por

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) \quad (2.9)$$

y la de c_n por

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p(t) \exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.10)$$

Esta expansión se suele denominar **serie de Fourier exponencial compleja**. Donde c_n son los **coeficientes exponenciales complejos**. Las expresiones dadas por las ecuaciones (2.9) y (2.10) son equivalentes. Así dada una señal $g_p(t)$ con la ecuación (2.10) se pueden calcular los coeficientes de la serie compleja de Fourier c_n y dados estos con la ecuación (2.9) se puede volver a recuperar la señal original $g_p(t)$.

La representación de una señal en una serie de Fourier es equivalente a dividirla en sus componentes frecuenciales discretas $0, \pm f_0, \pm 2f_0, \pm 3f_0, \dots$. Este tipo de representación de señales se denomina **espectro discreto**. De este modo $g_p(t)$ definiría la señal en el **dominio del tiempo**, mientras que c_n la definiría en el **dominio de la frecuencia**.

Los coeficientes c_n en general van a ser números complejos, por lo tanto van a poder ponerse según

$$c_n = |c_n| e^{j\angle c_n}. \quad (2.11)$$

donde $|c_n|$ representa la amplitud del armónico n . La representación de $|c_n|$ en función de la frecuencia se denomina **amplitud discreta del espectro**. Por otro lado $\angle c_n$ es la fase de cada armónico n . La representación de $\angle c_n$ en función de la frecuencia se denomina la **fase discreta del espectro**.

En el caso de que $g_p(t)$ sea real, de la ecuación (2.10) se deduce que la amplitud discreta del espectro es una función par, mientras que la fase discreta del espectro es una función impar según

$$c_{-n} = c_n^* \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |c_n| = |c_{-n}| & \text{par} \\ \angle c_n = -\angle c_{-n} & \text{impar.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Esta propiedad se denomina **simetría conjugada**.

2.2. Definición de Transformada de Fourier

Vamos a intentar desarrollar una representación similar para una señal no periódica $g(t)$ en términos de señales exponenciales. Primero se construye una señal $g_p(t)$ de período T_0 de modo que $g(t)$ define un ciclo de la función periódica. En ese caso la relación entre $g(t)$ y $g_p(t)$ viene dada por

$$g(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} g_p(t). \quad (2.13)$$

Si ahora consideramos la representación en serie de Fourier de $g_p(t)$ dada por la ecuación (2.9) y su expresión equivalente, la ecuación (2.10), y se definen los parámetros Δf , f_n y $G(f_n)$ según

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{T_0} \\ f_n &= \frac{n}{T_0} \\ G(f_n) &= c_n T_0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

para el intervalo $-\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2}$, la ecuación (2.9) pasa a ser

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f_n) \exp(j2\pi f_n t) \Delta f, \quad (2.15)$$

y la ecuación (2.10) se puede poner como

$$G(f_n) = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p(t) \exp(-j2\pi f_n t) dt. \quad (2.16)$$

Suponiendo ahora que $T_0 \rightarrow \infty$ o lo que es lo mismo que $\Delta f \rightarrow 0$, la frecuencia discreta f_n tenderá a una frecuencia continua que la vamos a representar mediante f . Entonces el sumatorio se convierte en una integral que nos da el área debajo de la curva $G(f) \exp(j2\pi ft)$. Según $T_0 \rightarrow \infty$, $g_p(t) \rightarrow g(t)$, transformándose las ecuaciones (2.15) y (2.16) respectivamente en

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (2.17)$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j2\pi ft) dt. \quad (2.18)$$

Según la ecuación (2.17) podemos calcular $g(t)$ a partir de $G(f)$, mientras que según la ecuación (2.18) podemos calcular $G(f)$ a partir de $g(t)$, por lo tanto las ecuaciones (2.17) y (2.18) son dos representaciones equivalentes de una señal dada. $G(f)$ se denomina **transformada de Fourier** de $g(t)$, mientras que $g(t)$ sería la **transformada inversa de Fourier** de $G(f)$. $g(t)$ y $G(f)$ se dicen que forman un **par transformado de Fourier**. Por lo tanto hemos conseguido nuestro objetivo que era obtener una representación de una señal no periódica en términos de exponenciales complejas. $g(t)$ sería la representación de la señal en el dominio del tiempo, mientras que $G(f)$ sería la representación en el dominio de la frecuencia.

Para que una función $g(t)$ tenga transformada de Fourier es suficiente con que se cumplan las condiciones de Dirichlet, que en este caso son:

- Que $g(t)$ sea una función con un **único valor** en cada instante de tiempo t .

- Que $g(t)$ tenga un **número finito de discontinuidades** en cualquier intervalo finito.
- Que $g(t)$ tenga un **número finito de máximos y mínimos** en cualquier intervalo finito.
- Que $g(t)$ sea absolutamente integrable, es decir, que debe cumplir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty. \quad (2.19)$$

Esta condición incluye a todas las señales de energía para las cuales se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.20)$$

El par transformado de Fourier se puede representar según

$$\begin{aligned} g(t) &\iff G(f) \\ F[g(t)] &= G(f) \\ F^{-1}[G(f)] &= g(t). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Una señal de energía la hemos descompuesto en una suma continua de exponenciales complejas. La amplitud de la componente a la frecuencia f es infinitesimal pero proporcional a $G(f)$. Para cualquier frecuencia f , $\exp(j2\pi ft)$ está multiplicado por $G(f)df$ que es la contribución de $G(f)$ para el intervalo infinitesimal df centrado en f . En definitiva se puede decir que $G(f)$ define la representación de $g(t)$ en el dominio de la frecuencia.

En general $G(f)$ va a ser una función compleja, por lo tanto se puede representar según

$$G(f) = |G(f)| e^{j\angle G(f)}. \quad (2.22)$$

$G(f)$ se denomina también el **espectro continuo** de $g(t)$. Por su parte $|G(f)|$ será la **amplitud del espectro continuo** y $\angle G(f)$ la **fase del espectro continuo** de $g(t)$, respectivamente.

Además, si $g(t)$ es una función real del tiempo, la amplitud del espectro continuo es una función par y la fase del espectro continuo una función impar de la frecuencia

$$G(f) = G^*(-f) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |G(f)| = |G(-f)| & \text{par} \\ \angle G(f) = -\angle G(-f) & \text{impar.} \end{cases} \quad (2.23)$$

Una función $G(f)$ que cumpla la ecuación (2.23) se dice que cumple la **propiedad de simetría conjugada**. Por lo tanto se puede decir que la transformada de Fourier de una señal real cumple la propiedad de simetría conjugada.

2.3. Propiedades de la Transformada de Fourier

2.3.1. Linealidad

Si $G_1(f)$ es la transformada de Fourier de $g_1(t)$, $G_2(f)$ es la transformada de Fourier de $g_2(t)$ y a, b son dos constantes complejas, entonces por la **propiedad de linealidad** la transformada de Fourier cumple

$$ag_1(t) + bg_2(t) \iff aG_1(f) + bG_2(f). \quad (2.24)$$

La prueba es inmediata a partir de la propiedad de linealidad de las integrales.

2.3.2. Escalado en el Tiempo

Si $G(f)$ es la transformada de Fourier de $g(t)$ entonces la transformada de Fourier por la **propiedad de escalado en el tiempo** se cumple que

$$g(at) \iff \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right). \quad (2.25)$$

Para probar esta propiedad si hacemos la transformada de Fourier de $g(at)$ según

$$F[g(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(at) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (2.26)$$

y hacemos el cambio de variable $\tau = at$ con $a > 0$ tendremos que

$$F[g(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \exp\left[-j2\pi \left(\frac{f}{a}\right) \tau\right] d\tau = \frac{1}{a} G\left(\frac{f}{a}\right). \quad (2.27)$$

En el caso de que $a < 0$ los límites de la integral en la ecuación (2.27) se intercambian obteniéndose

$$F[g(at)] = -\frac{1}{a} G\left(\frac{f}{a}\right), \quad (2.28)$$

por lo que para cualquier valor de a se tiene ya la ecuación (2.25) como se quería demostrar.

Para $|a| > 1$, $g(at)$ representa una compresión en el dominio del tiempo, mientras que su transformada $G\left(\frac{f}{a}\right)$ representa una expansión en el dominio de la frecuencia. Para el caso $|a| < 1$ ocurriría justamente al contrario. Según esta propiedad se ve que una compresión en el dominio del tiempo va a ser equivalente a una expansión en el dominio de la frecuencia y viceversa.

2.3.3. Dualidad

Si $G(f)$ es la transformada de Fourier de $g(t)$ entonces la transformada de Fourier por la **propiedad de dualidad** cumple

$$G(t) \iff g(-f). \quad (2.29)$$

Según la ecuación (2.17) una expresión para $g(-t)$ sería

$$g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp(-j2\pi ft) df. \quad (2.30)$$

Ahora haciendo el cambio de las variables independientes t y f se obtiene finalmente

$$g(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) \exp(-j2\pi ft) dt, \quad (2.31)$$

que es otra forma de expresar la ecuación (2.29), como se quería demostrar.

2.3.4. Desplazamiento en el Tiempo

Si $G(f)$ es la transformada de Fourier de $g(t)$ y t_0 es una constante real, entonces la transformada de Fourier por la **propiedad de desplazamiento en el tiempo** cumple

$$g(t - t_0) \iff G(f) \exp(-j2\pi ft_0). \quad (2.32)$$

Para probar esta propiedad se calcula la transformada de Fourier de $g(t - t_0)$ según

$$F[g(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t_0) \exp(-j2\pi ft) dt. \quad (2.33)$$

Haciendo ahora el cambio de variable $\tau = t - t_0$ se tiene

$$F[g(t - t_0)] = \exp(-j2\pi ft_0) \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = \exp(-j2\pi ft_0) G(f), \quad (2.34)$$

demostrando finalmente la ecuación (2.32).

El desplazar en el tiempo t_0 implica multiplicar en el dominio de la frecuencia por $\exp(-j2\pi ft_0)$ por lo que la respuesta en amplitud no se ve modificada por el desplazamiento en el tiempo. No así la fase, que cambia un valor $-2\pi ft_0$.

2.3.5. Desplazamiento en Frecuencia

Si $G(f)$ es la transformada de Fourier de $g(t)$ y f_0 es una constante real, entonces la transformada de Fourier por la **propiedad de desplazamiento en frecuencia** cumple

$$\exp(j2\pi f_0 t)g(t) \iff G(f - f_0). \quad (2.35)$$

Para probar esta propiedad, habrá que hacer la transformada de Fourier de $\exp(j2\pi f_0 t)g(t)$ según

$$F[\exp(j2\pi f_0 t)g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp[-j2\pi(f - f_0)t] dt = G(f - f_0), \quad (2.36)$$

dando directamente la ecuación (2.35) como se quería demostrar.

La multiplicación en el tiempo de $g(t)$ por $\exp(j2\pi f_0 t)$ equivale a un desplazamiento en frecuencia dado por f_0 . Esta propiedad se denomina **teorema de modulación**.

2.3.6. Área Temporal

Si $G(f)$ es la transformada de Fourier de $g(t)$ entonces la transformada de Fourier por esta propiedad cumple que

$$G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt. \quad (2.37)$$

Es decir el valor de $G(f)$ en el origen es igual al área de la curva $g(t)$ en el intervalo temporal $-\infty < t < \infty$.

La prueba de esta propiedad es inmediata. Para ello basta con sustituir $f = 0$ en la ecuación (2.18).

2.3.7. Área Frecuencial

Si $G(f)$ es la transformada de Fourier de $g(t)$ entonces la transformada de Fourier por esta propiedad cumple que

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) df. \quad (2.38)$$

Es decir el valor de $g(t)$ en el origen es igual al área de la curva $G(f)$ en el intervalo de frecuencias $-\infty < f < \infty$.

La prueba de esta propiedad es inmediata. Para ello basta con sustituir $t = 0$ en la ecuación (2.17).

2.3.8. Diferenciación en el Dominio del Tiempo

Si $G(f)$ es la transformada de Fourier de $g(t)$ y suponiendo que $g(t)$ sea derivable, entonces la transformada de Fourier por la **propiedad de diferenciación en el dominio del tiempo** cumple

$$\frac{dg(t)}{dt} \iff j2\pi f G(f). \quad (2.39)$$

La diferenciación en el dominio del tiempo es equivalente a multiplicar en el dominio de la frecuencia por $j2\pi f$.

La demostración es inmediata y para ello basta con derivar respecto al tiempo la ecuación (2.17). La ecuación (2.39) se puede generalizar para el caso de que $g(t)$ sea derivable n veces, en este caso se tendrá que

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \iff (j2\pi f)^n G(f). \quad (2.40)$$

Además si ahora tenemos en cuenta la propiedad de dualidad del apartado 2.3.3 se puede obtener la versión dual de la ecuación (2.40) dando lugar a

$$(-j2\pi t)^n g(t) \iff \frac{d^n G(f)}{df^n}. \quad (2.41)$$

2.3.9. Integración en el Dominio del Tiempo

Si $G(f)$ es la transformada de Fourier de $g(t)$ y si $G(0) = 0$ entonces la transformada de Fourier por la **propiedad de integración en el dominio del tiempo** cumple

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \iff \frac{1}{j2\pi f} G(f). \quad (2.42)$$

La integración en el dominio del tiempo de $g(t)$ equivale a dividir por el factor $j2\pi f$ suponiendo que $G(0)$ sea cero.

Para probar esta propiedad hay que tener en cuenta que el operador derivada y el operador integral son inversos y que por lo tanto se cumple que

$$g(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \right]. \quad (2.43)$$

Si ahora se aplica la propiedad de diferenciación en el dominio del tiempo se obtiene

$$G(f) = j2\pi f F \left[\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \right], \quad (2.44)$$

que es equivalente a la ecuación (2.42) como se quería demostrar.

En el caso de que $G(0)$ sea diferente de cero la ecuación (2.42) se transformará en

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \iff \frac{1}{j2\pi f} G(f) + \frac{G(0)}{2} \delta(f). \quad (2.45)$$

En esta expresión aparece la función $\delta(f)$ o **función delta de Dirac** que se tratará con mayor profundidad en el apartado 2.4.

2.3.10. Funciones Conjugadas

Si $G(f)$ es la transformada de Fourier de $g(t)$, entonces la transformada de Fourier por la **propiedad de funciones conjugadas** cumple

$$g^*(t) \iff G^*(-f). \quad (2.46)$$

Para probar esta propiedad, a partir de la ecuación (2.17) y tomando conjugados se obtiene

$$g^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(f) \exp(-j2\pi ft) df. \quad (2.47)$$

Si ahora en la ecuación (2.47) se reemplaza f por $-f$ se obtiene

$$g^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(-f) \exp(j2\pi ft) df, \quad (2.48)$$

que es equivalente a la ecuación (2.46) como se quería demostrar.

$g(t)$ y $g^*(t)$ se pueden poner según

$$\begin{aligned} g(t) &= \Re[g(t)] + j\Im[g(t)] \\ g^*(t) &= \Re[g(t)] - j\Im[g(t)], \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde el operador \Re toma la parte real del operando y \Im la parte imaginaria. Si ahora se suman y se restan las dos expresiones de la ecuación (2.49) se obtiene

$$\begin{aligned} \Re[g(t)] &= \frac{1}{2} [g(t) + g^*(t)] \\ \Im[g(t)] &= \frac{1}{2j} [g(t) - g^*(t)]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

De las ecuaciones (2.46) y (2.50) se deduce que

$$\begin{aligned}\Re[g(t)] &\iff \frac{1}{2} [G(f) + G^*(-f)] \\ \Im[g(t)] &\iff \frac{1}{2j} [G(f) - G^*(-f)],\end{aligned}\tag{2.51}$$

donde se da una expresión para calcular la transformada de Fourier de la parte real e imaginaria de una señal $g(t)$, respectivamente.

En el caso de que la señal $g(t)$ sea real a partir de la segunda expresión de la ecuación (2.51) se deduce la propiedad de simetría conjugada de la transformada de Fourier de una señal real, ya deducida en la ecuación (2.23) del apartado 2.2.

2.3.11. Multiplicación en el Dominio del Tiempo

Si $G_1(f)$ es la transformada de Fourier de $g_1(t)$ y $G_2(f)$ es la transformada de Fourier de $g_2(t)$, entonces la transformada de Fourier por la **propiedad de multiplicación en el dominio del tiempo** cumple

$$g_1(t)g_2(t) \iff \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\lambda)G_2(f-\lambda)d\lambda.\tag{2.52}$$

Para probar esta propiedad vamos a llamar $G_{12}(f)$ a la transformada de Fourier de $g_1(t)g_2(t)$ según

$$G_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t) \exp(-j2\pi ft)dt.\tag{2.53}$$

Ahora vamos a sustituir $g_2(t)$ según la ecuación (2.17) en la ecuación (2.53), dando lugar a

$$G_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)G_2(f') \exp[-j2\pi(f-f')t] df' dt.\tag{2.54}$$

Definiendo $\lambda = f - f'$ e intercambiando el orden de integración se obtiene

$$G_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda G_2(f-\lambda) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) \exp(-j2\pi\lambda t)dt}_{G_1(\lambda)},\tag{2.55}$$

que es equivalente a la ecuación (2.52) como se quería demostrar.

La integral de la ecuación (2.52) se denomina **integral de convolución** en el dominio de la frecuencia. Por lo tanto, la multiplicación en el dominio del tiempo equivale a la convolución en el dominio de la frecuencia según

$$g_1(t)g_2(t) \iff G_1(f) * G_2(f).\tag{2.56}$$

Esta propiedad se denomina también **teorema de multiplicación**.

2.3.12. Convolución en el Dominio del Tiempo

Si $G_1(f)$ es la transformada de Fourier de $g_1(t)$ y $G_2(f)$ es la de $g_2(t)$, entonces la transformada de Fourier por la **propiedad de convolución en el dominio del tiempo** cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau)g_2(t-\tau)d\tau \iff G_1(f)G_2(f).\tag{2.57}$$

La prueba de esta propiedad se sigue directamente de la propiedad de multiplicación en el dominio del tiempo y de la propiedad de dualidad. La integral de la ecuación (2.57) se denomina **convolución en el dominio del tiempo**. Por lo tanto la convolución en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación en el dominio de la frecuencia según

$$g_1(t) * g_2(t) \iff G_1(f)G_2(f).\tag{2.58}$$

2.4. Función Delta de Dirac

Estrictamente hablando la teoría de Fourier vista hasta ahora sólo es aplicable a aquellas señales que cumplen las condiciones de Dirichlet. Estas señales incluyen a las señales de energía. Es deseable extender la transformada de Fourier de dos modos:

- Combinar las series de Fourier y la transformada de Fourier de modo que la serie de Fourier pueda considerarse como un caso especial de transformada de Fourier.
- Incluir las señales de potencia entre aquellas que podemos calcular su transformada de Fourier.

Los dos objetivos anteriores se consiguen introduciendo la **función delta de Dirac** o impulso unidad. Esta función se suele denotar con $\delta(t)$. Se caracteriza por tener amplitud cero en todos los instantes de tiempo excepto en el origen donde la amplitud es muy grande, de modo que el área en el intervalo $-\infty < t < \infty$ sea unidad. Ambas propiedades de la función impulso unidad se resumen en

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0 & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Si consideramos la integral de la función impulso unidad multiplicada por otra señal continua en el origen $g(t)$, obtenemos el valor de esa función en el origen $g(0)$ según

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t)dt = g(0). \quad (2.60)$$

Esta propiedad del impulso unidad se denomina **propiedad de extracción**. En el caso de que queramos extraer el valor en un instante de tiempo t_0 distinto del origen se puede partir de una versión desplazada del impulso unidad $\delta(t - t_0)$ según

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t - t_0)dt = g(t_0). \quad (2.61)$$

La función impulso unidad cumple también que el producto de una señal $g(t)$ con una versión desplazada del impulso unidad $\delta(t - t_0)$ es igual al valor de esa señal en t_0 multiplicada por la misma función impulso

$$g(t)\delta(t - t_0) = g(t_0)\delta(t - t_0). \quad (2.62)$$

Además el impulso unidad es la función identidad en el operador convolución, es decir, la convolución de cualquier señal $g(t)$ con el impulso unidad es esa misma señal $g(t)$ según

$$\delta(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = g(t). \quad (2.63)$$

Esta propiedad se denomina **propiedad de replicación** del impulso unidad. En el caso de que la convolución de una señal cualquiera $g(t)$ sea con una versión desplazada del impulso unidad $\delta(t - t_0)$, dará como resultado una versión desplazada t_0 de la señal original

$$\delta(t - t_0) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\delta(t - t_0 - \tau)d\tau = g(t - t_0). \quad (2.64)$$

Si ahora pretendemos calcular la transformada de Fourier del impulso unidad, utilizando las ecuaciones (2.18) y (2.60), tendremos el desarrollo

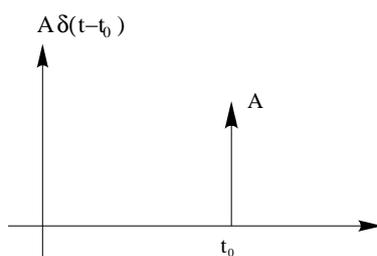
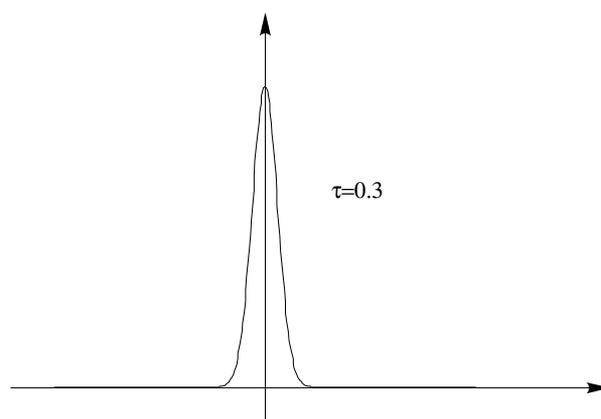
$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j2\pi ft)dt = \exp(-j2\pi f0) = 1, \quad (2.65)$$

es decir tendríamos el par transformado de Fourier $\delta(t) \iff 1$ y por lo tanto el impulso unidad está uniformemente distribuido a lo largo de todas las frecuencias en el rango $-\infty < f < \infty$.

A partir de las ecuaciones (2.65) y (2.17) se puede obtener una expresión útil en algunos casos

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi ft)df. \quad (2.66)$$

Una señal $A\delta(t - t_0)$, centrada en t_0 y con área total A , se suele representar mediante una flecha colocada en t_0 y de amplitud A , como puede verse en la figura 2.1.

Figura 2.1: Representación de la señal impulso $A\delta(t - t_0)$.Figura 2.2: Definición de $\delta(t)$ a partir de una Gaussiana.

La función delta de Dirac se puede definir también como el límite de otras funciones. Por ejemplo tres **definiciones límite** podrían ser:

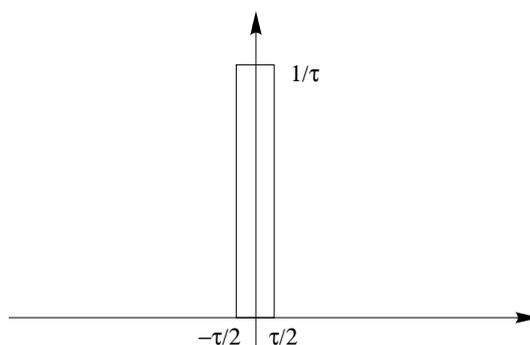
- A partir de una función Gaussiana según

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{\pi t^2}{\tau^2}\right). \quad (2.67)$$

Una representación para un valor de $\tau \rightarrow 0$ podría ser la de la figura 2.2.

- A partir de la **función rectangular**, según

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right). \quad (2.68)$$

Figura 2.3: Definición de $\delta(t)$ a partir de la función rectangular.

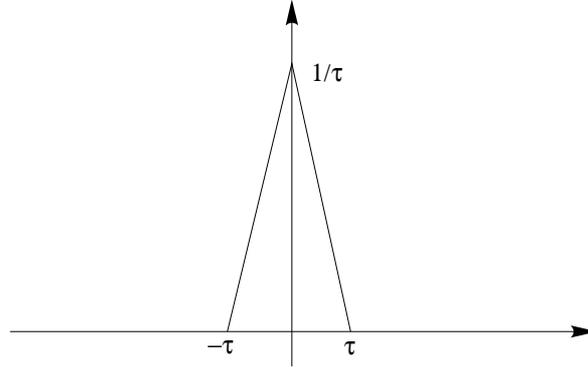


Figura 2.4: Definición de $\delta(t)$ a partir de la función triangular.

La definición de la función rectangular $\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$ es

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2}. \end{cases} \quad (2.69)$$

Una representación para un valor de $\tau \rightarrow 0$ podría ser la de la figura 2.3.

- A partir de la **función triangular** según

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right). \quad (2.70)$$

La definición de la función triangular $\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$ es

$$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau} & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases} \quad (2.71)$$

Una representación para un valor de $\tau \rightarrow 0$ podría ser la de la figura 2.4.

2.4.1. Aplicaciones del Impulso Unidad

1. A partir de la propiedad de dualidad del apartado 2.3.3 se deduce que

$$1 \iff \delta(f). \quad (2.72)$$

De las ecuaciones (2.72) y (2.18) se puede deducir una expresión útil en algunos casos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi ft) dt = \delta(f). \quad (2.73)$$

2. A partir de la propiedad de desplazamiento en frecuencia del apartado 2.3.5 se deduce que

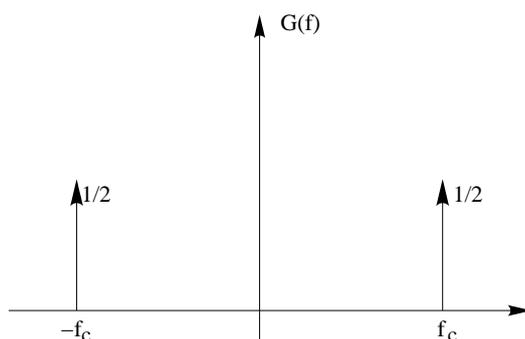
$$\exp(j2\pi f_c t) \iff \delta(f - f_c). \quad (2.74)$$

3. A partir de la propiedad de desplazamiento en el tiempo del apartado 2.3.4 se deduce

$$\delta(t - t_0) \iff \exp(-j2\pi f t_0). \quad (2.75)$$

4. En el caso de señales sinusoidales, si $g(t) = \cos(2\pi f_c t)$ teniendo en cuenta

$$g(t) = \cos(2\pi f_c t) = \frac{1}{2} [\exp(j2\pi f_c t) + \exp(-j2\pi f_c t)] \quad (2.76)$$

Figura 2.5: Transformada de Fourier de la señal $\cos(2\pi f_c t)$.

y la ecuación (2.74) se puede obtener la transformada de Fourier de esa señal $g(t)$ según

$$\cos(2\pi f_c t) \iff \frac{1}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]. \quad (2.77)$$

La transformada de Fourier de $g(t)$ en este caso puede verse gráficamente en la figura 2.5. En el caso de que la señal sea $g(t) = \sin(2\pi f_c t)$ teniendo en cuenta

$$g(t) = \sin(2\pi f_c t) = \frac{1}{2j} [\exp(j2\pi f_c t) - \exp(-j2\pi f_c t)] \quad (2.78)$$

y la ecuación (2.74) se puede obtener la transformada de Fourier de esa señal $g(t)$ según

$$\sin(2\pi f_c t) \iff \frac{1}{2j} [\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)]. \quad (2.79)$$

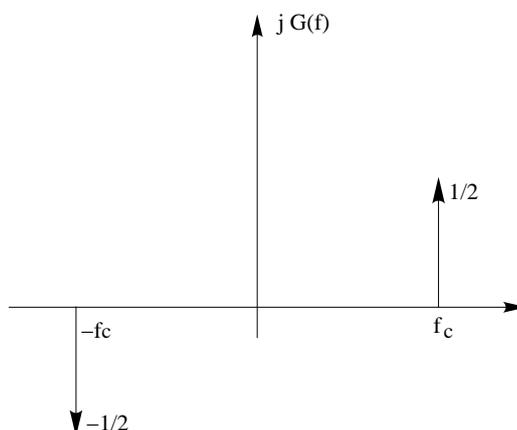
La transformada de Fourier de $g(t)$ en este caso puede verse gráficamente en la figura 2.6.

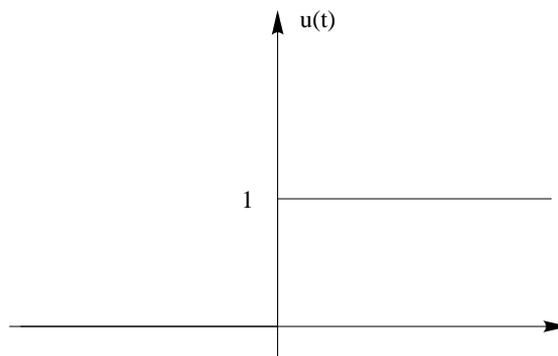
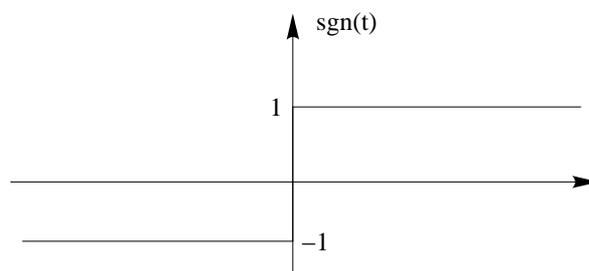
5. Si se aplica la ecuación (2.45) del apartado 2.3.9 a la función $\delta(t)$ se tiene que

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \iff \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}. \quad (2.80)$$

La integral de la función $\delta(t)$ se denomina **escalón unidad**, se representa mediante $u(t)$, viene dada por

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0. \end{cases} \quad (2.81)$$

Figura 2.6: Transformada de Fourier de la señal $\sin(2\pi f_c t)$.

Figura 2.7: Función escalón unidad, $u(t)$.Figura 2.8: Función signo, $\text{sng}(t)$.

y puede verse gráficamente en la figura 2.7. Por lo tanto juntando las ecuaciones (2.80) y (2.81) se tiene finalmente que

$$u(t) \iff \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}. \quad (2.82)$$

6. La **función signo** denotada por $\text{sng}(t)$ se define mediante

$$\text{sng}(t) = 2u(t) - 1 = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (2.83)$$

y puede verse gráficamente en la figura 2.8. Usando las ecuaciones (2.82) y (2.83) se puede calcular la transformada de Fourier de $\text{sng}(t)$ según

$$\text{sng}(t) \iff \frac{1}{j\pi f}. \quad (2.84)$$

Aplicando ahora la ecuación (2.29) del apartado 2.3.3 a la ecuación (2.84) se puede obtener

$$\frac{1}{\pi t} \iff -j\text{sng}(f), \quad (2.85)$$

es decir, la versión dual de la ecuación (2.84).

2.5. Transformada de Fourier de Señales Periódicas

Una señal periódica $g_p(t)$ se podía poner mediante la expansión en serie de Fourier como la suma de exponenciales complejas. De igual forma se sabe que bajo ciertos límites se puede definir la transformada de Fourier de exponenciales complejas. Por lo tanto parece razonable que una señal periódica se pueda representar mediante la transformada de Fourier.

Una señal $g_p(t)$ con período T_0 se puede expresar en términos de su serie de Fourier compleja según la ecuación (2.9), siendo c_n los coeficientes complejos de la serie de Fourier que venían dados por la ecuación (2.10), como se vio en el apartado 2.1.

Sea $g(t)$ una señal que sea un período de $g_p(t)$, es decir, $g(t)$ se podría poner según

$$g(t) = \begin{cases} g_p(t) & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{para el resto.} \end{cases} \quad (2.86)$$

La señal $g_p(t)$ se puede reconstruir a partir de la señal $g(t)$ según

$$g_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT_0), \quad (2.87)$$

por lo que puede verse a $g(t)$ como una función generadora de $g_p(t)$.

La señal $g(t)$ es de energía por lo tanto va a tener transformada de Fourier, $G(f)$. Puesto que $g(t)$ y $g_p(t)$ son iguales en el intervalo $-\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2}$, la ecuación (2.10) se puede transformar en

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) dt = \frac{1}{T_0} G\left(\frac{n}{T_0}\right), \quad (2.88)$$

que nos relaciona los coeficientes complejos c_n de la serie de Fourier de $g_p(t)$ con la transformada de Fourier de $g(t)$ evaluada en las frecuencias discretas $\frac{n}{T_0}$. Por lo tanto la ecuación (2.9) para $g_p(t)$ se puede volver a escribir utilizando la ecuación (2.88) según

$$g_p(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{T_0}\right) \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right). \quad (2.89)$$

A partir de las ecuaciones (2.87) y (2.89) se obtiene

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{T_0}\right) \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) \quad (2.90)$$

que se denomina **suma de Poisson**. Teniendo ahora en cuenta que la transformada de Fourier de las exponenciales complejas se puede poner según

$$\exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) \iff \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right), \quad (2.91)$$

entonces la transformada de Fourier de una señal periódica $g_p(t)$ con período T_0 viene dada por

$$g_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT_0) \iff \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right). \quad (2.92)$$

La ecuación (2.92) indica que la transformada de Fourier de una señal periódica es un tren de deltas a las frecuencias $0, \pm f_0, \pm 2f_0, \dots$, donde $f_0 = \frac{1}{T_0}$ es la frecuencia fundamental de $g_p(t)$. La amplitud de cada una de las deltas según las ecuaciones (2.88) y (2.92) es proporcional a c_n que son los coeficientes complejos de la serie de Fourier de $g_p(t)$. Se puede decir entonces que la periodicidad en el dominio del tiempo va a dar lugar a una discretización en el dominio de la frecuencia.

De la suma de Poisson dada por la ecuación (2.90) y sustituyendo $g(t)$ por $\delta(t)$ se puede llegar a que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right). \quad (2.93)$$

Si ahora utilizamos la propiedad de dualidad dada en la ecuación (2.29) del apartado 2.3.3, podemos obtener la versión dual de la ecuación (2.93) según

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi m f T_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right). \quad (2.94)$$

$g(t)$	$G(f)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$\delta(t - t_0)$	$\exp(-j2\pi f t_0)$
$\exp(j2\pi f_0 t)$	$\delta(f - f_0)$
$\exp(-a t), a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$
$\exp\left[-\pi\left(\frac{t}{T}\right)^2\right]$	$T \exp[-\pi(fT)^2]$
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\exp(-at)u(t), a > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$t \exp(-at)u(t), a > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$
$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \text{sinc}(fT)$
$\cos(2\pi f_0 t)\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{T}{2} \{\text{sinc}[(f - f_0)T] + \text{sinc}[(f + f_0)T]\}$
$W \text{sinc}(Wt)$	$\Pi\left(\frac{f}{W}\right)$
$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \text{sinc}^2(fT)$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_0)$	$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$

Tabla 2.1: Pares Transformados de Fourier más comunes.

2.6. Transformadas de Fourier Inmediatas

Teniendo en cuenta la definición de la **función sinc**, denotada por $\text{sinc}(t)$ según

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \quad (2.95)$$

en la tabla 2.1 pueden verse los pares transformados de Fourier inmediatos más comúnmente utilizados.

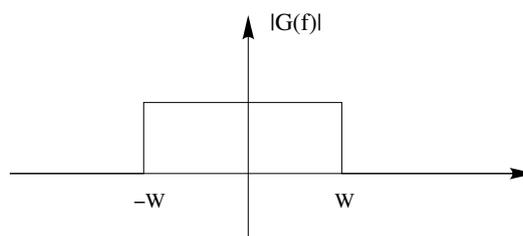


Figura 2.9: Ejemplo de Señal Paso Bajo.

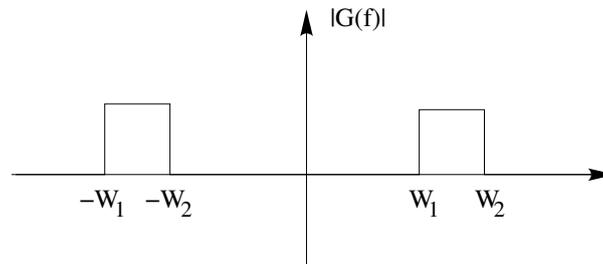


Figura 2.10: Ejemplo de Señal Paso Banda.

2.7. Primera Definición de Ancho de Banda

Una señal se dice que es **banda base** cuando se puede considerar que su transformada de Fourier está limitada a la banda de frecuencias $-W \leq f \leq W$, es decir, que fuera de ese intervalo vale cero o que su valor no es relevante. En ese caso el ancho de banda se define como W .

Una señal se dice que es **paso banda** cuando se puede considerar que su transformada de Fourier está limitada a las bandas $-W_2 \leq f \leq -W_1$ y $W_1 \leq f \leq W_2$. En este caso se puede definir el ancho de banda como $W_2 - W_1$.

En la figura 2.9 se puede ver un ejemplo de una señal paso bajo, mientras que en la figura 2.10 puede verse un ejemplo de una señal paso banda.

Capítulo 3

Caracterización de los Sistemas

3.1. Definición de Sistema

Un sistema viene referido a un dispositivo físico que proporciona una señal de salida a partir de una señal de entrada. La señal de entrada a menudo se denomina **excitación** mientras que la señal de salida se denomina **respuesta**.

Un sistema implica la transformación o mapeo de una señal de entrada $x(t)$ en una señal de salida $y(t)$. Se suele representar normalmente mediante una caja negra como puede verse en la figura 3.1. El operador $T[\cdot]$ es el que realiza el mapeo entre la señal de entrada y la de salida. Dicha operación se puede poner

$$y(t) = T[x(t)]. \quad (3.1)$$

3.2. Propiedades Deseables de los Sistemas

3.2.1. Linealidad

Se dice que un sistema es lineal si dados a y b números complejos; $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ señales complejas; e $y_1(t) = T[x_1(t)]$ e $y_2(t) = T[x_2(t)]$ son las salidas del sistema para las entradas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ respectivamente; se cumple

$$ay_1(t) + by_2(t) = T[ax_1(t) + bx_2(t)]. \quad (3.2)$$

3.2.2. Invarianza Temporal

Se dice que un sistema es invariante en el tiempo si dado t_0 número real; $x(t)$ e $y(t)$ señales complejas; e $y(t) = T[x(t)]$ es la salida del sistema para la entrada $x(t)$; se cumple

$$y(t - t_0) = T[x(t - t_0)]. \quad (3.3)$$

3.2.3. Estabilidad

Se dice que un sistema es estable si la respuesta a cualquier señal compleja de entrada acotada, $|x(t)| < M$ está también acotada, es decir, la salida del sistema debe cumplir

$$y(t) = T[x(t)] \quad \text{con} \quad |y(t)| < N. \quad (3.4)$$

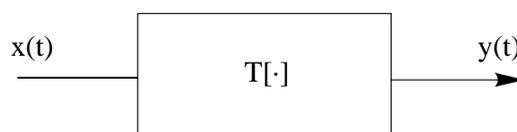


Figura 3.1: Representación de un Sistema como una Caja Negra.

3.2.4. Memoria

Se dice que un sistema no tiene memoria o es sin memoria si la salida en el instante t_0 real, $y(t_0)$ sólo depende de la entrada al sistema en ese mismo instante t_0 , $x(t_0)$, siendo $y(t) = T[x(t)]$ la salida del sistema cuando la entrada es $x(t)$. Se tiene que cumplir por lo tanto

$$y(t_0) = f[x(t_0)]. \quad (3.5)$$

3.2.5. Causalidad

Se dice que un sistema es causal si la salida de dicho sistema en el instante t_0 real, $y(t_0)$, sólo depende del pasado y del presente de la señal de entrada $x(t)$, siendo $y(t) = T[x(t)]$ la señal de salida del sistema cuando la entrada es $x(t)$. Se tiene que cumplir entonces

$$y(t_0) = f[x(\tau)] \quad \text{para } \tau \leq t_0. \quad (3.6)$$

3.3. Clasificación de los Sistemas

Cada propiedad de las del apartado 3.2 nos da un tipo de sistema. Así hay sistemas lineales, invariantes en el tiempo, causales y estables. Además un sistema puede cumplir dos o más de estas propiedades. En general los sistemas con los que se trabaja normalmente son lineales e invariantes en el tiempo (LTI) y además suelen cumplir las propiedades de causalidad y estabilidad.

Sin embargo se puede hacer otra clasificación dependiendo del tipo de señal presente a la entrada y a la salida del sistema como se verá a continuación.

3.3.1. Sistema Continuo Continuo

Es un sistema que mapea una señal continua en otra continua. Es el sistema que normalmente se utiliza en sistemas de comunicaciones. Una representación del mismo puede verse en la figura 3.2.

3.3.2. Sistema Discreto Discreto

Es un sistema que mapea una señal discreta en otra discreta. Este sistema se utiliza para tratamiento discreto de señal. Una representación del mismo puede verse en la figura 3.3.

3.3.3. Sistema Digital Digital

Es un sistema que mapea una señal digital en otra digital. Este sistema se utiliza para tratamiento digital de señal. Una representación del mismo puede verse en la figura 3.4.

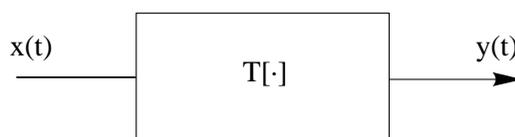


Figura 3.2: Sistema Continuo Continuo.

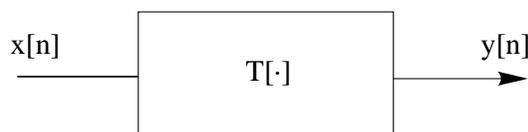


Figura 3.3: Sistema Discreto Discreto.

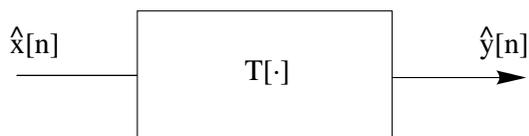


Figura 3.4: Sistema Digital Digital.

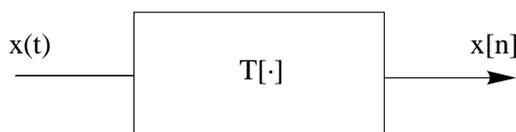


Figura 3.5: Sistema Continuo Discreto: Muestreador o Conversor C/D.

3.3.4. Sistema Continuo Discreto

Es un sistema que mapea una señal continua en una discreta. Este sistema se denomina **muestreador** o **conversor C/D**. Sirve para discretizar una señal continua. Una representación del mismo puede verse en la figura 3.5.

3.3.5. Sistema Discreto Digital

Es un sistema que mapea una señal discreta en una digital. Este sistema se denomina **cuantificador**. Sirve para digitalizar una señal discreta, es decir, discretizar su amplitud. Suele venir acompañado de un codificador. Una representación del mismo puede verse en la figura 3.6.

3.3.6. Sistema Continuo Digital

Es un sistema que mapea una señal continua en una digital. Este sistema esta formado por un muestreador, un cuantificador y normalmente un codificador. Sirve por lo tanto para digitalizar una señal continua. El sistema en conjunto se suele denominar **digitalizador** o **conversor A/D**. Una representación del mismo puede verse en la figura 3.7.

3.3.7. Sistema Discreto Continuo

Es un sistema que mapea una señal discreta en una continua. Este sistema se denomina **interpolador** o **conversor D/C**. Es el sistema inverso al conversor C/D. Sirve para convertir una señal discretizada de nuevo a continua. Una representación del mismo puede verse en la figura 3.8.

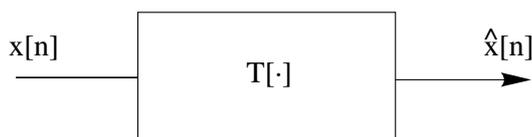


Figura 3.6: Sistema Discreto Digital: Cuantificador.

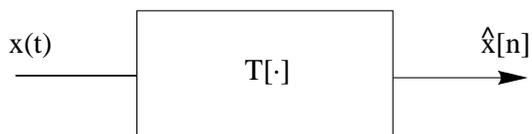


Figura 3.7: Sistema Continuo Digital: Digitalizador o Conversor A/D.

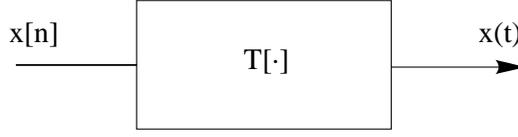


Figura 3.8: Sistema Discreto Continuo: Conversor D/C o interpolador.

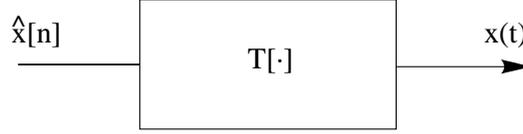


Figura 3.9: Sistema Digital Continuo: Conversor D/A.

3.3.8. Sistema Digital Continuo

Es un sistema que mapea una señal digital en una continua. Este sistema se denomina **conversor D/A**. Es el sistema inverso al conversor A/D, si bien la señal recuperada tiene pérdida de calidad respecto a la continua original. Sirve para convertir una señal digitalizada de nuevo a continua. En términos generales es el mismo sistema que el conversor D/C, pero viene precedido por un decodificador. Una representación del mismo puede verse en la figura 3.9.

No existe un sistema que mapee una señal digital a una discreta, puesto que el proceso de cuantificación no es invertible, ya que significa una pérdida de calidad a cambio de una menor cantidad de información.

3.4. Respuesta al Impulso de un Sistema

Cualquier señal $x(t)$ se puede poner como combinación lineal de una base de funciones. Si la base es el conjunto infinito de $\delta(t - \tau)$, para cada τ , $x(t)$ se puede construir según

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta\tau) \delta(t - k\Delta\tau) \Delta\tau, \quad (3.7)$$

es decir, como combinación lineal de los elementos de la base $\delta(t - k\Delta\tau)$ cuya amplitud de cada componente es $x(k\Delta\tau) \Delta\tau$.

Si ahora llamamos $h_\tau(t)$ a las funciones que son respuesta de un sistema $T[\cdot]$ a los elementos de la base $\delta(t - \tau)$ y suponemos que dicho sistema es lineal, es decir, si se cumple que

$$h_\tau(t) = T[\delta(t - \tau)], \quad (3.8)$$

superponiendo las entradas, la salida para $x(t)$ viene dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= T \left[\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta\tau) \delta(t - k\Delta\tau) \Delta\tau \right] = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta\tau) T[\delta(t - k\Delta\tau)] \Delta\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) T[\delta(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_\tau(t) d\tau. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Como se puede ver en la ecuación (3.9) la salida en el caso de que el sistema sea lineal se puede poner como la misma combinación lineal que la señal de entrada en la base $\delta(t - \tau)$, pero ahora en la base que es la respuesta de dicho sistema a cada elemento de esa base, es decir, en la base $h_\tau(t)$.

Si además el sistema es invariante en el tiempo la respuesta al sistema para los elementos de la base $\delta(t - \tau)$ puede ponerse según

$$T[\delta(t - \tau)] = h(t - \tau), \quad (3.10)$$

es decir la salida del sistema para esos elementos de la base de la señal de entrada es $h_\tau(t) = h(t - \tau)$. Ahora sabiendo únicamente $h(t) = T[\delta(t)]$, se puede determinar la salida según

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_\tau(t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t). \quad (3.11)$$

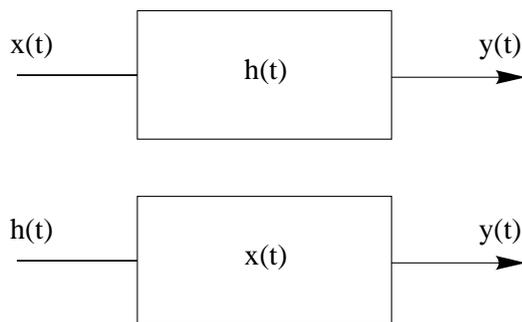


Figura 3.10: Conmutatividad de los Sistemas LTI.

A $h(t)$ se le denomina **respuesta al impulso del sistema** y permite calcular la salida de un sistema LTI convolucionando la respuesta al impulso con la señal de entrada como se indica en la ecuación (3.11). Puesto que la convolución cumple la propiedad conmutativa dada por

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t), \quad (3.12)$$

la propiedad asociativa dada por

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \quad (3.13)$$

y la propiedad distributiva respecto de la suma dada por

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t); \quad (3.14)$$

los sistemas, puesto que su salida se calcula mediante una convolución, también van a cumplir dichas propiedades. Así por la propiedad conmutativa de la convolución, los dos sistemas de la figura 3.10 son equivalentes, es decir, la salida es la misma si se intercambian la respuesta al impulso del sistema con la entrada. A partir de la propiedad asociativa de la convolución las tres conexiones de sistemas de la figura 3.11 son equivalentes. Las dos primeras conexiones se denominan **conexión en serie de dos sistemas**, puesto que la salida del primer sistema constituye la entrada del segundo. Por esta propiedad los dos sistemas se pueden intercambiar, permaneciendo la salida del segundo sin modificar. Además la conexión en serie se puede sustituir por un único sistema cuya respuesta al impulso es la convolución de las respuestas al impulso de los sistemas de la conexión en serie. Por último a partir de la propiedad conmutativa respecto a la suma de la convolución las dos conexiones de sistemas de la figura 3.12 son equivalentes. Esta conexión de sistemas se denomina **conexión en paralelo de dos sistemas**, puesto que la señal pasa independientemente por

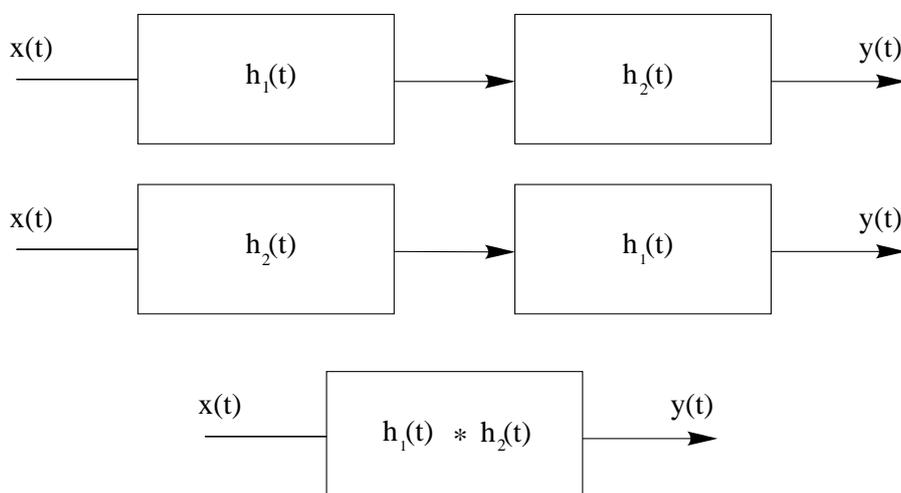


Figura 3.11: Asociatividad de la Conexión en Serie de Sistemas LTI.

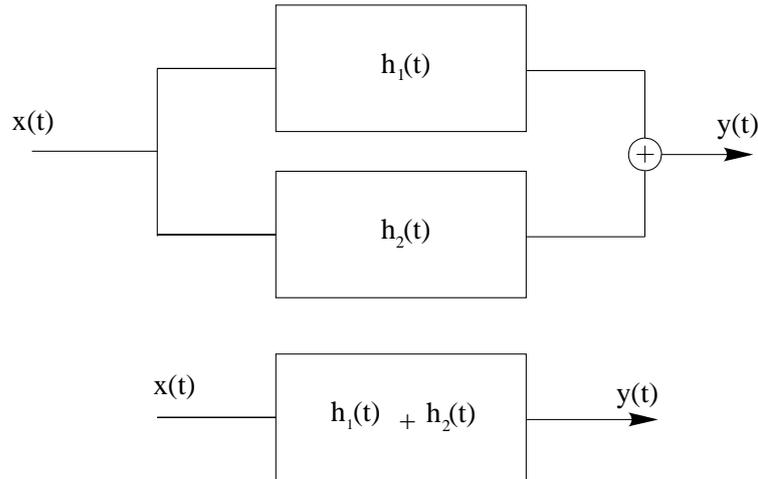


Figura 3.12: Distributividad de la Conexión en Paralelo de Sistemas LTI.

cada uno de ellos y luego se suman las salidas. Dicha interconexión se puede sustituir por un único sistema cuya respuesta al impulso sea la suma de las respuestas al impulso de los dos sistemas en paralelo.

La convolución de una señal con $\delta(t)$ es la misma señal, es decir se tiene que

$$x(t) * \delta(t) = x(t), \quad (3.15)$$

por lo tanto si $h(t) = \delta(t)$ ese sistema es el **sistema identidad**, cuya salida es igual a la entrada, $y(t) = x(t)$.

Si un sistema LTI además es causal, se debe cumplir entonces

$$h(t) = 0 \quad t < 0, \quad (3.16)$$

es decir, la respuesta al impulso es cero para instantes negativos del tiempo. Puesto que la salida se calcula según

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (3.17)$$

sólo debe depender de $x(\tau)$ para $\tau \leq t$, por lo tanto $h(t - \tau)$ tiene que ser cero para $\tau > t$, o lo que es lo mismo, tiene que ser cero para $t - \tau < 0$, por lo tanto de aquí se deduce directamente la ecuación (3.16).

Si un sistema LTI además es estable, se debe cumplir que para cualquier entrada acotada $|x(t)| \leq M$, la salida sea acotada. Entonces tras el desarrollo

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t - \tau)|d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|Md\tau = M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau, \quad (3.18)$$

se llega a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty, \quad (3.19)$$

es decir, que para que un sistema sea estable, la respuesta al impulso debe ser absolutamente integrable.

3.5. Respuesta en Frecuencia de un Sistema

Sea un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h(t)$ y cuya entrada sea una exponencial compleja de amplitud unidad y frecuencia f según

$$x(t) = \exp(j2\pi ft). \quad (3.20)$$

La salida vendrá dada por la convolución de dicha entrada con la respuesta al impulso $h(t)$, por lo tanto, se va a tener el desarrollo

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp[j2\pi f(t - \tau)] d\tau = \exp(j2\pi ft) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \quad (3.21)$$

Si ahora se define $H(f)$ según

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau, \quad (3.22)$$

se puede obtener la salida según

$$y(t) = H(f) \exp(j2\pi ft). \quad (3.23)$$

La respuesta de un sistema LTI a una exponencial compleja de frecuencia f y amplitud unidad es la misma exponencial compleja cuya amplitud viene multiplicada por un coeficiente constante $H(f)$ dado por la ecuación (3.22). Por lo tanto se puede decir que una exponencial compleja es una **autofunción** del sistema siendo su **autovalor** asociado $H(f)$. $H(f)$ se denomina **función de transferencia** o **respuesta en frecuencia** del sistema. La respuesta al impulso de un sistema y su función de transferencia forman un par transformado de Fourier, es decir se cumple

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (3.24)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(j2\pi ft) df. \quad (3.25)$$

Una definición alternativa de $H(f)$ es la dada por

$$H(f) = \left. \frac{y(t)}{x(t)} \right|_{x(t)=\exp(j2\pi ft)}. \quad (3.26)$$

Vamos a considerar ahora una señal arbitraria $x(t)$ que se aplica al sistema. Esa señal se puede poner en términos de su transformada de Fourier según

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (3.27)$$

o de forma equivalente en el límite

$$x(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta f) \exp(j2\pi k\Delta ft) \Delta f. \quad (3.28)$$

Por lo tanto la señal de entrada puede verse como una superposición de exponenciales complejas de amplitud incremental. Debido a que el sistema es lineal, la respuesta a la superposición de exponenciales complejas a la entrada se puede desarrollar según

$$y(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(k\Delta f) X(k\Delta f) \exp(j2\pi k\Delta ft) \Delta f = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) X(f) \exp(j2\pi ft) df, \quad (3.29)$$

que comparándola con la expresión para la transformada de Fourier de la salida, resulta finalmente que

$$Y(f) = H(f) X(f). \quad (3.30)$$

Se puede describir de forma sencilla un sistema LTI en el dominio de la frecuencia, pues según la ecuación (3.30), la transformada de Fourier de la salida es igual al producto de la transformada de Fourier de la entrada por la función de transferencia del sistema. De aquí se deduce también que la convolución en el dominio del tiempo equivale a la multiplicación en el dominio de la frecuencia.

La función de transferencia de un sistema LTI va a ser una función compleja de la frecuencia y se va a poder poner como módulo y fase según

$$H(f) = |H(f)| \exp[j\beta(f)], \quad (3.31)$$

donde $|H(f)|$ se denomina **respuesta en amplitud** y $\beta(f)$ **respuesta en fase** del sistema. Si la respuesta al impulso $h(t)$ es real, la función de transferencia cumple la propiedad de simetría conjugada y por lo tanto la respuesta en amplitud es una función par, mientras que la respuesta en fase es una función impar de la frecuencia. Esto se resume en

$$H(f) = H^*(-f) \implies \begin{cases} |H(f)| = |H(-f)| & \text{función par} \\ \beta(f) = -\beta(-f) & \text{función impar.} \end{cases} \quad (3.32)$$

En algunas ocasiones es más útil trabajar con unidades logarítmicas que con unidades naturales. Así, se puede hacer

$$\ln H(f) = \alpha(f) + j\beta(f), \quad (3.33)$$

donde $\alpha(f)$ se denomina **ganancia del sistema**, se mide en nepers (N) y viene dada por

$$\alpha(f) = \ln |H(f)|. \quad (3.34)$$

$\beta(f)$ es la respuesta el fase del sistema y se mide en radianes. Como puede verse en la ecuación (3.33), a partir del logaritmo de la función de transferencia del sistema la ganancia es directamente la parte real, mientras que la fase es la parte imaginaria. La ganancia también puede expresarse en dB según

$$\alpha'(f) = 20 \log |H(f)|, \quad (3.35)$$

y teniendo en cuenta que $1N = 8,7dB$, la relación entre la ganancia dada en N y en dB viene dada por

$$\alpha'(f) = 8,7\alpha(f). \quad (3.36)$$

Se define el ancho de banda de un sistema como el ancho de banda de la función de transferencia $H(f)$. Un sistema se dice que es banda base cuando se puede considerar que la función de transferencia vale cero o su valor no es relevante fuera del intervalo de frecuencias $-W \leq f \leq W$. En ese caso el sistema banda base tiene un ancho de banda de W . Un sistema se dice que es paso banda cuando se puede considerar que la función de transferencia vale cero o su valor no es relevante fuera de los intervalos de frecuencias $-W_2 \leq f \leq -W_1$ y $W_1 \leq f \leq W_2$. En ese caso el sistema paso banda tiene un ancho de banda de $W_2 - W_1$.

3.6. Transmisión sin Distorsión

Se entiende por transmisión sin distorsión a través de un sistema de comunicaciones cuando la señal de salida es una réplica exacta de la señal de entrada, excepto por un factor de escala y por un retardo constante, es decir, la señal de salida debería poderse poner según

$$y(t) = Kx(t - t_0). \quad (3.37)$$

K tiene en cuenta el cambio de amplitud y t_0 el retardo temporal. Si $X(f)$ e $Y(f)$ son las transformadas de Fourier de la entrada y la salida del sistema respectivamente, entonces la ecuación (3.37) en el dominio de la frecuencia es

$$Y(f) = KX(f) \exp(-j2\pi ft_0), \quad (3.38)$$

por lo que la función de transferencia de un sistema sin distorsión vendrá dada por

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = K \exp(-j2\pi ft_0). \quad (3.39)$$

Una expresión algo más general para la función de transferencia sin distorsión es

$$H(f) = K \exp(-j2\pi ft_0 \pm jn\pi) \quad (3.40)$$

Si n es par $\exp(\pm jn\pi) = 1$ y si n es impar $\exp(\pm jn\pi) = -1$, de modo que la condición de no distorsión se mantiene.

La ecuación (3.40) indica que para lograr una transmisión sin distorsión por un canal de comunicaciones, la función de transferencia debe cumplir dos condiciones:

1. La amplitud de la función de transferencia debe ser constante para todas las frecuencias, es decir, se tiene que cumplir

$$|H(f)| = K. \quad (3.41)$$

2. La fase de la función de transferencia tiene que ser lineal con la frecuencia, pasando por el origen o por un múltiplo de π para frecuencia cero, se decir, se tiene que cumplir

$$\beta(f) = -2\pi ft_0 \pm n\pi. \quad (3.42)$$

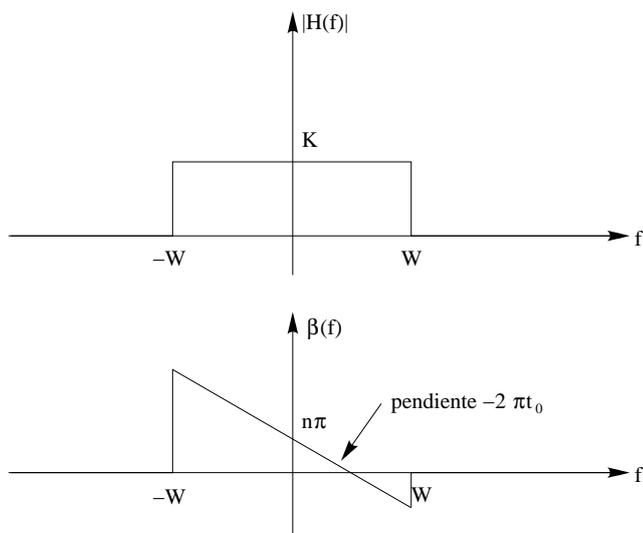


Figura 3.13: Sistema Banda Base sin Distorsión.

Si por otra parte el espectro de la señal a transmitir está limitado a una banda de frecuencias, las condiciones anteriores deben satisfacerse únicamente en esas bandas. Para un sistema banda base con ancho de banda W las dos condiciones anteriores pueden verse gráficamente en la figura 3.13. Para un sistema paso banda con ancho de banda W las dos condiciones anteriores pueden verse gráficamente en la figura 3.14. En el caso paso banda el valor de la fase en la frecuencia f_c puede ser cualquiera, pero en el origen debe ser un múltiplo entero de π .

En la práctica las condiciones de transmisión sin distorsión sólo pueden cumplirse de forma aproximada, es decir, siempre habrá una cierta cantidad de distorsión presente en la señal de salida. Se dice entonces que el **canal es dispersivo**. Se distinguen dos formas de distorsión o dispersión del canal:

1. Cuando la respuesta en amplitud no es constante en la banda de interés. Las diferentes frecuencias componentes de la señal son transmitidas con distinta ganancia o atenuación. Este efecto se conoce

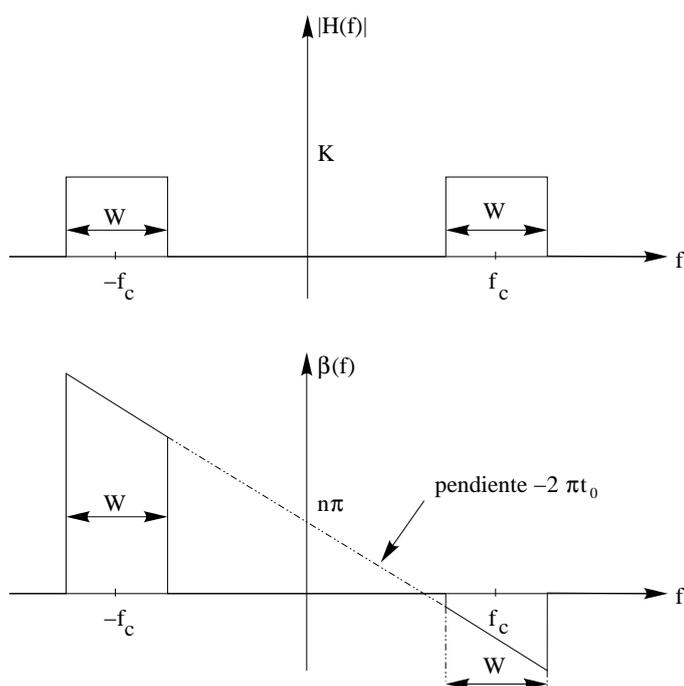


Figura 3.14: Sistema Paso Banda sin Distorsión.

como **distorsión en amplitud**. El caso más común de distorsión en amplitud se produce en los extremos de la banda de interés.

2. La respuesta en fase no es lineal con la frecuencia. Cada componente frecuencial de la señal de entrada sufre un retardo diferente al pasar a través del sistema, por lo que la señal de salida será diferente de la señal de entrada. Este tipo de distorsión se denomina **distorsión de fase**.

3.7. Filtros Ideales

Filtro es un dispositivo selectivo en frecuencia que se utiliza para limitar el espectro de una señal a unas bandas específicas en frecuencia. Su respuesta en frecuencia se caracteriza por **bandas de paso** y **bandas eliminadas**. Las frecuencias dentro de las bandas de paso se transmiten a través del sistema con ninguna o con una pequeña distorsión, mientras que las frecuencias dentro de las bandas eliminadas son rechazadas por el sistema.

Un filtro ideal se caracteriza porque la respuesta en frecuencia del sistema dentro de las bandas de paso vale la unidad, mientras que en las bandas eliminadas vale cero. Un filtro ideal es irrealizable temporalmente puesto que su respuesta al impulso tiene duración infinita, pero en muchos casos el suponer filtros ideales simplifica en gran medida los cálculos, mientras que el error cometido no es muy grande puesto que los filtros utilizados en la práctica son casi ideales.

Existen cuatro tipos importantes de filtros ideales:

Paso Bajo Ideal: Es un sistema que únicamente deja pasar las bajas frecuencias. Es un caso particular de sistema banda base. Una representación gráfica del mismo puede verse en la figura 3.15.

Paso Alto Ideal: Es un sistema que únicamente deja pasar las altas frecuencias. Una representación gráfica del mismo puede verse en la figura 3.16.

Paso Banda Ideal: Es un sistema que únicamente deja pasar las frecuencias comprendidas dentro de un intervalo dado. Una representación gráfica del mismo puede verse en la figura 3.17.

Banda Eliminada Ideal: Es un sistema que deja pasar todas las frecuencias excepto las frecuencias comprendidas dentro de un intervalo dado. Una representación gráfica del mismo puede verse en la figura 3.18.

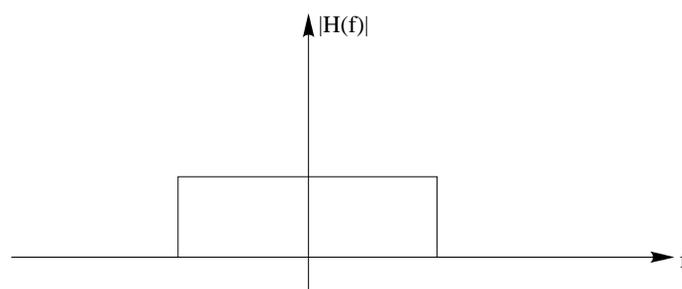


Figura 3.15: Filtro Paso Bajo Ideal.

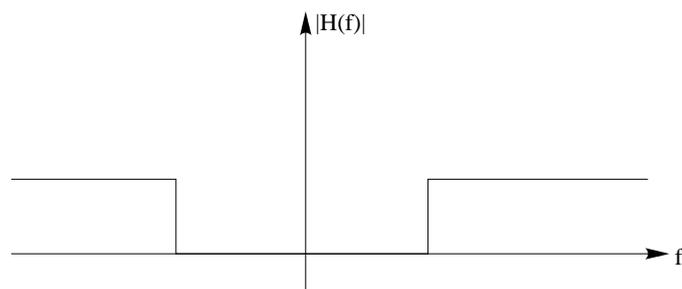


Figura 3.16: Filtro Paso Alto Ideal.

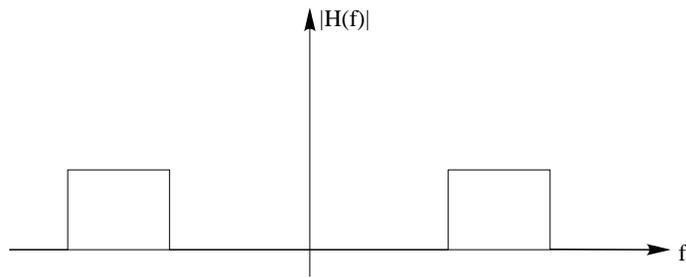


Figura 3.17: Filtro Paso Banda Ideal.

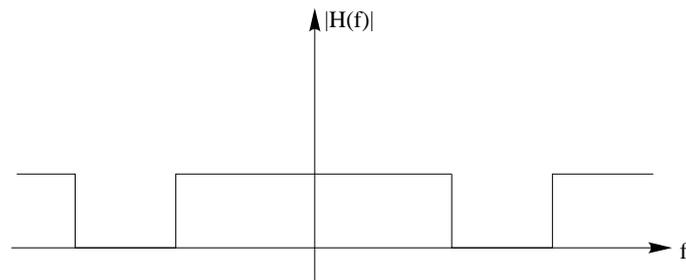


Figura 3.18: Filtro Banda Eliminada Ideal.

3.8. Modelo de un Sistema de Comunicaciones

3.8.1. Caso Analógico

El propósito de un sistema de comunicaciones es transmitir señales de información desde una **fente** localizada en un punto del espacio hasta un **destino** localizado en otro punto diferente. El caso analógico es aquel en el que las señales transmitidas son continuas. Un esquema general de un sistema de comunicaciones analógico puede verse en la figura 3.19.

Como regla general la señal producida por la fuente no es eléctrica y debe ser convertida a señal eléctrica mediante un **transductor**. En recepción la señal eléctrica deberá ser convertida de nuevo al formato original mediante otro transductor que realice la función inversa del transductor de la fuente.

El **transmisor** modifica la señal de forma que sea adecuada para transmitirla por el **canal de comunicación**. Esto se suele hacer mediante un proceso denominado **modulación** que consiste en variar algún parámetro de una señal sinusoidal de referencia denominada **portadora** según la información a transmitir.

El canal de comunicaciones es el medio físico por donde va a ir la información desde el origen al destino. Puede ser de diferentes tipos: línea de transmisión, fibra óptica, enlace de radio, etc. A lo largo del canal de transmisión la señal se degrada y distorsiona debido a **no linealidades** de la respuesta en frecuencia del canal de comunicación. Otras fuentes de degradación en el canal son el **ruido** y las **interferencias**. El ruido es debido a las variaciones aleatorias de los electrones en el medio, mientras que las interferencias son debidas a la presencia de otros canales de comunicación cercanos. La distorsión y el ruido son los principales problemas en los sistemas de comunicaciones. El transmisor y el **receptor** deben estar diseñados para minimizar estos problemas introducidos por el canal de comunicaciones.

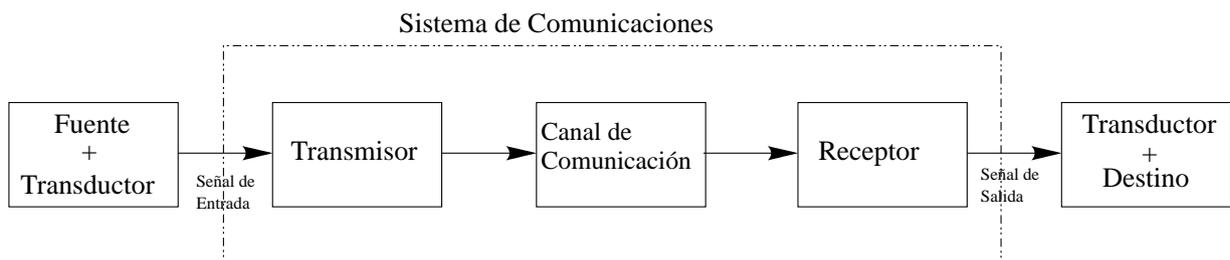


Figura 3.19: Modelo de un Sistema de Comunicaciones Analógico.

El receptor debe regenerar la señal en el formato eléctrico original, probablemente con cierta degradación residual. El proceso realizado por el receptor se denomina **demodulación** y es el proceso inverso a la modulación realizada en el transmisor. Entonces debido principalmente a la presencia de ruido y distorsión en el canal de comunicaciones, la señal recuperada no va ser exacta a la original. Dependiendo del esquema de modulación elegido, el efecto global de la distorsión y el ruido puede ser despreciable.

En todo sistema de comunicaciones hay que intentar ahorrar **potencia transmitida** y **ancho de banda ocupado**, puesto que son bienes escasos que implican, en caso de mal uso, incremento del coste del sistema. Dependiendo del sistema, uno de los parámetros puede ser más importante que el otro. Así podemos tener dos tipos de sistemas:

- Sistemas limitados por potencia transmitida, como por ejemplo los sistemas vía satélite.
- Sistemas limitados por ancho de banda, como por ejemplo el canal telefónico.

3.8.2. Caso Digital

Por qué son mejores los sistemas digitales. Existe mayor facilidad a la hora de recuperar las señales degradadas que en el caso analógico. Los efectos como distorsión, ruido o interferencia degradan la señal transmitida. En el caso analógico la única operación que se puede realizar a lo largo del canal es amplificar la señal atenuada para que llegue a su destino, sin embargo no se eliminan los efectos del canal como ruido y distorsión. En el caso digital existen los denominados **repetidores regeneradores** que recuperan completamente la señal original como puede verse gráficamente en la figura 3.20.

Los circuitos digitales están menos afectados por la degradación puesto que solo hay dos niveles 1 y 0. La degradación tiene que ser muy grande para que se cambie de nivel.

En el caso digital la señal puede tomar formas muy diversas y no siempre se puede eliminar la degradación de forma tan sencilla como se ha dicho de forma muy simplificada. No siempre se puede recuperar totalmente la señal original y por ello se añaden **técnicas de detección y corrección de errores** que hacen que la probabilidad de error extremo a extremo se mantenga muy baja. En la figura 3.21 puede verse un esquema completo de un sistema de comunicaciones digital.

En la cadena transmisora son obligatorios únicamente el **formateador**, el modulador y el transmisor, mientras que en la cadena receptora el receptor, el demodulador y el **deformateador**.

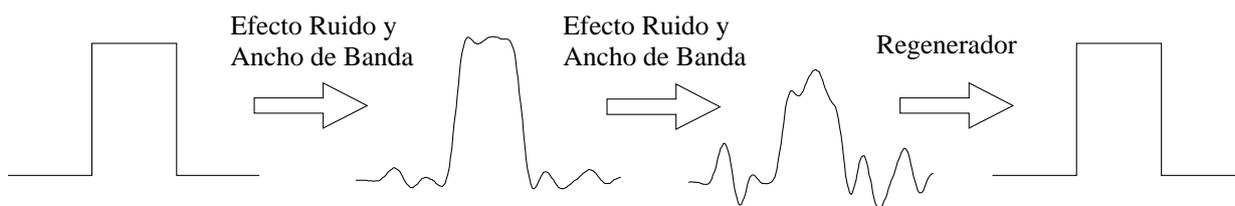


Figura 3.20: Procesado realizado por un Repetidor Regenerador para recuperar la señal original.

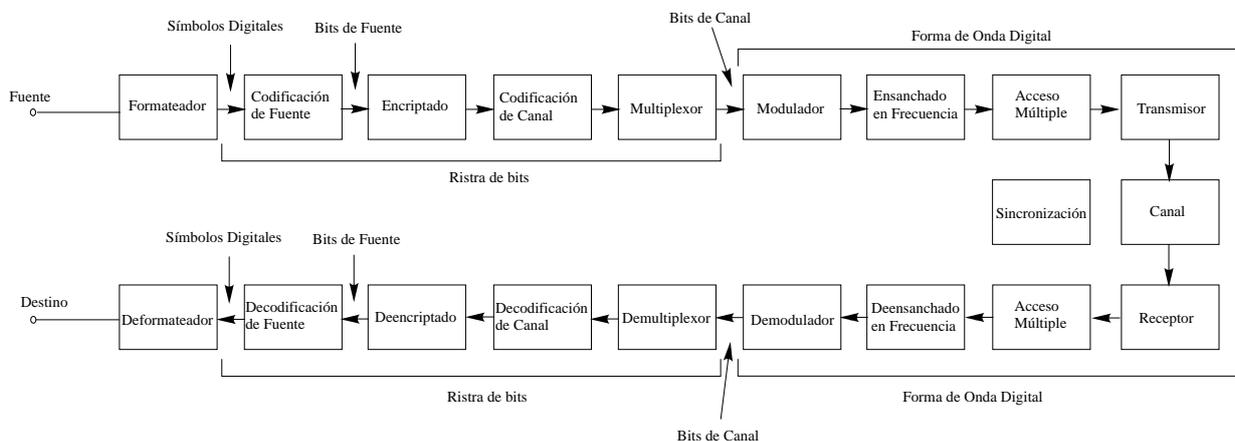


Figura 3.21: Modelo de un Sistema de Comunicaciones Digital.

El transmisor está formado por una etapa elevadora de frecuencia, un amplificador de alta potencia y una antena, mientras que el receptor está formado por una antena, un amplificador de bajo ruido y un conversor a baja frecuencia.

El formateador transforma la información original en símbolos digitales. Si la señal es analógica es necesario el uso de un conversor A/D.

El modulador transforma los bits en formas de onda compatibles con el canal de transmisión.

El **codificador de fuente** elimina la redundancia y la información innecesaria antes de transmitir.

El **encriptador** codifica la señal digital mediante claves de tal forma que usuarios no autorizados no puedan recoger la señal transmitida y entenderla. Se utiliza por razones de seguridad. Esto sería impensable en el caso analógico.

El **codificador de canal** introduce información redundante aumentando la cantidad de información transmitida de modo que en recepción se pueda detectar y corregir la mayor parte de los errores cometidos a lo largo del canal.

El **ensanchado en frecuencia** produce señales menos vulnerables a interferencias y aumenta la privacidad de las comunicaciones, a consta de utilizar mucho más ancho de banda.

El **multiplexado** y el **acceso múltiple** permite combinar señales con características diferentes o de fuentes diferentes para compartir los recursos del canal de comunicación.

En general el orden de los diferentes bloques puede variar de unos sistemas a otros. Todos los procesos que se lleven a cabo en la cadena de transmisión deben llevarse a cabo de forma inversa en el mismo orden en la cadena de recepción para poder recuperar la señal en su formato original.

Antes del modulador se tiene una ristra de bits o de símbolos, tras el modulador se tiene la forma de onda digital que tras pasar por el resto de bloques finalmente se transmitirá.

La señal al final de la cadena receptora no va a ser una replica exacta de la señal transmitida debido a posibles errores cometidos tras a la degradación del canal. Sin embargo eligiendo de forma adecuada los bloques de la cadena transmisora y receptora se puede hacer que los errores cometidos sean despreciables.

A continuación se van a explicar los principales conceptos dentro del mundo digital:

Información Fuente: el dispositivo que genera la información a transmitir. Puede ser analógica o digital.

En el caso de que la información sea analógica debe convertirse en digital mediante un conversor A/D.

Mensaje: secuencia de dígitos o símbolos de un conjunto finito denominado **alfabeto**.

Carácter: un miembro del alfabeto. Los carácter se pueden mapear en una secuencia de dígitos binarios.

En el caso de caracteres hay varios códigos normalizados: ASCII, EBCDIC, Hollerith, Baudot, Murray, Morse, etc.

Dígito Binario o bit: unidad fundamental de información para todo sistema digital. La unidad bit también se utiliza como la mínima unidad de información.

Ristra de Bits: secuencia de bits (unos y ceros). Algunas veces se utiliza un tren de pulsos de dos niveles para ilustrar la ristra de bits. Una ristra de bits se suele denominar señal banda base.

Símbolo: grupo de k bits considerado como una unidad o carácter de un alfabeto. El tamaño del alfabeto M es igual a 2^k , donde k es el número de bits por símbolo. Cada símbolo m_i se transmite mediante una señal $s_i(t)$ durante T segundos, siendo T la duración del símbolo. El receptor debe ser capaz de distinguir entre los M símbolos diferentes, mientras que en el caso analógico el receptor tenía que tratar con infinitas formas de onda analógicas. El inverso de la duración T de cada símbolo viene medido en baudios (o símbolos por segundo) y está dado por

$$R = \frac{1}{T} \text{ baudios} \quad (3.43)$$

Forma de Onda Digital: señal tensión o corriente que representa un símbolo digital. Las características de la señal: amplitud, ancho, posición, frecuencia, fase, etc., permiten la identificación de la forma de onda como uno de los símbolos de alfabeto.

Tasa de Datos: en bits/s está dada por

$$R_b = \frac{k}{T} = \frac{\log_2 M}{T} \text{ bits/s} \quad (3.44)$$

donde k bits identifican a cada símbolo de un alfabeto de $M = 2^k$, siendo T la duración de cada símbolo. A su vez si llamamos T_b a la duración de cada bit en segundos vendrá dado por

$$T_b = \frac{1}{R_b} = \frac{T}{k} = \frac{T}{\log_2 M} \text{ segundos.} \quad (3.45)$$

La principal diferencia entre sistemas digitales y analógicos proviene de cómo se evalúa la calidad final en cada uno.

En el caso analógico se trabaja con señales continuas tomadas de un conjunto infinito, es decir, al receptor le pueden llegar un número infinito de posibles formas de ondas. En este caso se utilizan medidas de calidad como **SNR (relación señal a ruido)**, **tanto por ciento de distorsión**, **error cuadrático medio entre la señal transmitida y la recibida**, etc.

En el caso digital las señales representan ristas de bits. Estas forman un conjunto finito que es conocido a priori en recepción. Una forma de medir la calidad del sistema digital en recepción es la probabilidad de detectar incorrectamente un bit o **BER (tasa de error a bit)** o P_E , otra es la **tasa de error a símbolo** o P_S , etc.

Capítulo 4

Densidad Espectral y Correlación

4.1. Producto Escalar, Norma y Ortogonalidad

Si $v(t)$ y $w(t)$ son dos señales de la misma clase, esto es, o de energía o de potencia, su **producto escalar** es una cantidad que se denota por $\langle v(t), w(t) \rangle$ y está definida por

$$\langle v(t), w(t) \rangle = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} v(t)w^*(t)dt & \text{Señales de Energía} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t)w^*(t)dt & \text{Señales de Potencia.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Si resulta que $v(t)$ y $w(t)$ son periódicas con período T_0 , la ecuación (4.1), pasa a ser

$$\langle v(t), w(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t)w^*(t)dt. \quad (4.2)$$

La importancia del producto escalar es que una vez dada la definición, que como puede verse depende del tipo de señal, pueden establecerse propiedades genéricas que no van a depender del tipo de señal de que se trate.

La raíz cuadrada del producto escalar de una señal consigo mismo se denomina **norma** de la señal, se denota mediante $\|v(t)\|$ y viene dada por

$$\|v(t)\| = \sqrt{\langle v(t), v(t) \rangle}. \quad (4.3)$$

La norma de una señal es una cantidad real no negativa que es igual a la raíz cuadrada de la energía o la potencia de la señal, es decir, se cumple que

$$\|v(t)\|^2 = \langle v(t), v(t) \rangle = \begin{cases} E & \text{Señales de Energía} \\ P & \text{Señales de Potencia.} \end{cases} \quad (4.4)$$

La **desigualdad de Schwarz** relaciona las ecuaciones (4.1) y (4.3) según

$$|\langle v(t), w(t) \rangle| \leq \|v(t)\| \|w(t)\| \quad (4.5)$$

estableciendo un límite superior en la magnitud del producto escalar. El límite superior sólo se alcanza cuando las dos señales son proporcionales, es decir, se tiene que

$$|\langle v(t), w(t) \rangle| = \|v(t)\| \|w(t)\| \quad \text{si } w(t) = \alpha v(t), \quad (4.6)$$

donde α es una constante arbitraria.

Se dice que dos señales son **ortogonales** si producto escalar es cero

$$\langle v(t), w(t) \rangle = 0. \quad (4.7)$$

Además si dos señales son ortogonales se cumple

$$\|v(t) + w(t)\|^2 = \|v(t)\|^2 + \|w(t)\|^2. \quad (4.8)$$

En la teoría del espacio de señal, dos señales ortogonales son equivalentes a dos vectores perpendiculares y por lo tanto la ecuación (4.8) resulta equivalente al teorema de Pitágoras. La condición de ortogonalidad va a ser equivalente a la **superposición de energía y potencia**. Es decir si $v(t)$ y $w(t)$ son ortogonales se cumple

$$\begin{aligned} P_z &= P_v + P_w && \text{Señales de Potencia} \\ E_z &= E_v + E_w && \text{Señales de Energía,} \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $z(t) = v(t) + w(t)$, E_x representa la energía de la señal $x(t)$ y P_x representa la potencia de la señal $x(t)$. Hay tres condiciones suficientes que implican la ortogonalidad entre dos señales:

1. Cuando $v(t)$ y $w(t)$ tienen simetría opuesta, es decir, una es par y la otra impar.
2. Cuando $v(t)$ y $w(t)$ no se solapan en el tiempo.
3. Cuando $v(t)$ y $w(t)$ no se solapan en frecuencia.

Estas no son las únicas condiciones que implican ortogonalidad. El producto escalar es una medida de cómo se parecen dos señales entre sí. Si dos señales son muy parecidas (proporcionales) su producto escalar es máximo según el límite superior de la desigualdad de Schwarz dado por la ecuación (4.6), mientras que si las dos señales son muy diferentes (ortogonales) su producto escalar es cero, según la ecuación (4.7).

4.2. Funciones de Correlación

La función de **correlación cruzada** nos da una idea del parecido entre dos señales, desplazando una de ellas en el tiempo. Utilizando la definición de producto escalar podemos definir la correlación independientemente del tipo de señal que se esté considerando según

$$R_{vw}(\tau) = \langle v(t), w(t - \tau) \rangle = \langle v(t + \tau), w(t) \rangle, \quad (4.10)$$

es decir, el producto escalar de una señal $v(t)$ con $w(t)$ desplazada τ segundos en el tiempo. Este desplazamiento es arbitrario y es la variable independiente de la función de correlación. Nos da la similitud entre las dos señales comparándolas a lo largo del tiempo. Si $|R_{vw}(\tau)|$ es grande las señales son muy similares para ese desplazamiento τ , si por el contrario vale cero, son ortogonales para ese desplazamiento.

A partir de las ecuaciones (4.10) y (4.1) se puede deducir que

$$R_{vw}(\tau) = R_{wv}^*(-\tau). \quad (4.11)$$

Si se hace la correlación de una señal consigo misma, dicha función se denomina función de **autocorrelación** de la señal y viene dada por

$$R_v(\tau) = R_{vv}(\tau) = \langle v(t), v(t - \tau) \rangle = \langle v(t + \tau), v(t) \rangle. \quad (4.12)$$

La interpretación es la misma, pero en este caso se compara una señal consigo misma desplazada en el tiempo. Nos da la variación de $v(t)$ a lo largo del tiempo en un sentido promediado. La autocorrelación tiene un máximo en el origen donde es igual a la potencia o energía de la señal. A partir de la ecuación (4.4) se deduce que

$$\begin{aligned} R_v(0) &= \langle v(t), v(t) \rangle = \|v(t)\|^2 = \begin{cases} E & \text{Señales de Energía} \\ P & \text{Señales de Potencia} \end{cases} \\ |R_v(\tau)| &\leq R_v(0). \end{aligned} \quad (4.13)$$

A partir de las ecuaciones (4.12) y (4.1) se puede deducir

$$R_v(\tau) = R_v^*(-\tau), \quad (4.14)$$

es decir, la autocorrelación tiene simetría conjugada. Si además la señal $v(t)$ es real, la autocorrelación tendrá simetría par.

Si se considera ahora una señal $z(t) = v(t) + w(t)$, cuya autocorrelación viene dada por

$$R_z(\tau) = R_v(\tau) + R_{vw}(\tau) + R_{wv}(\tau) + R_w(\tau) \quad (4.15)$$

y se cumple que las señales componentes son ortogonales para cualquier valor τ según

$$R_{vw}(\tau) = R_{wv}(\tau) = 0, \quad (4.16)$$

se cumple que

$$R_z(\tau) = R_v(\tau) + R_w(\tau) \quad (4.17)$$

y en particular para $\tau = 0$ que

$$\|z(t)\|^2 = \|v(t)\|^2 + \|w(t)\|^2. \quad (4.18)$$

Por lo tanto tenemos superposición de funciones de autocorrelación, así como de potencia o energía. En este caso se dice que $v(t)$ y $w(t)$ son **incoherentes**.

4.3. Densidad Espectral de Energía

Sea una señal de energía $g(t)$, y $G(f)$ su transformada de Fourier. La energía de la señal se puede calcular como hemos visto según

$$E = \|g(t)\|^2 = \langle g(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t)dt. \quad (4.19)$$

La transformada de Fourier por la propiedad de multiplicación en el dominio del tiempo cumple

$$g_1(t)g_2(t) \iff \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\lambda)G_2(f - \lambda)d\lambda \quad (4.20)$$

para dos señales $g_1(t)$ y $g_2(t)$ genéricas. La ecuación (4.20) se puede poner también como

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t) \exp(-j2\pi ft)dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\lambda)G_2(f - \lambda)d\lambda. \quad (4.21)$$

Sustituyendo ahora en la ecuación (4.21) el valor $f = 0$ se llega a

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\lambda)G_2(-\lambda)d\lambda. \quad (4.22)$$

Ahora en la ecuación (4.22) se va a sustituir $g_1(t)$ por $g(t)$ y $g_2(t)$ por $g^*(t)$, teniendo en cuenta que la transformada de Fourier de $g^*(t)$ es $G^*(-f)$ por la propiedad de funciones conjugadas, resultando

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)G^*(\lambda)d\lambda. \quad (4.23)$$

Reemplazando λ por f se obtiene finalmente

$$E = \|g(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df, \quad (4.24)$$

que se denomina **Teorema de Energía de Rayleigh**. Por lo tanto sólo es necesario conocer la amplitud del espectro no la fase, para determinar la energía de una señal. Si se define la función $\Psi_g(f)$ como la amplitud del espectro al cuadrado según

$$\Psi_g(f) = |G(f)|^2, \quad (4.25)$$

entonces la energía se puede calcular según

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(f)df. \quad (4.26)$$

La función $\Psi_g(f)$ se denomina **densidad espectral de energía** de $g(t)$. Nos da una idea de cómo se reparte la energía a lo largo de la frecuencia y viene dado en Julios/Hz. Es una función positiva de la frecuencia y si $g(t)$ es real, la densidad espectral de energía es par.

4.4. Densidad Espectral de Potencia para Señales Periódicas

La potencia media de una señal de potencia $g(t)$ viene dada como ya se ha visto por

$$P = \|g(t)\|^2 = \langle g(t), g(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt. \quad (4.27)$$

En el caso de que la señal además sea periódica, $g_p(t)$, con período T_0 la ecuación (4.27) se puede volver a escribir según

$$P = \|g_p(t)\|^2 = \langle g_p(t), g_p(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |g_p(t)|^2 dt. \quad (4.28)$$

Reemplazando $g_p(t)$ en la ecuación (4.28) por la serie de Fourier dada por

$$g_p(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{T_0}\right) \exp\left(\frac{j2\pi n t}{T_0}\right), \quad (4.29)$$

resulta que

$$P = \frac{1}{T_0^2} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p^*(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{T_0}\right) \exp\left(\frac{j2\pi n t}{T_0}\right) dt, \quad (4.30)$$

donde $G\left(\frac{n}{T_0}\right)$ es la transformada de la señal generadora $g(t)$ evaluada en $\frac{n}{T_0}$. Debido a que por definición se cumple

$$g(t) = \begin{cases} g_p(t) & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{para el resto,} \end{cases} \quad (4.31)$$

la ecuación (4.30) se transforma en

$$P = \frac{1}{T_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{T_0}\right) \exp\left(\frac{j2\pi n t}{T_0}\right) dt. \quad (4.32)$$

Si ahora en la ecuación (4.32) intercambiamos la integral y el sumatorio, resulta que

$$P = \frac{1}{T_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{T_0}\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g^*(t) \exp\left(\frac{j2\pi n t}{T_0}\right) dt}_{G^*\left(\frac{n}{T_0}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2, \quad (4.33)$$

donde $c_n = \frac{1}{T_0} G\left(\frac{n}{T_0}\right)$ son los coeficientes de la serie de Fourier. Juntando la ecuación (4.28) con la ecuación (4.33) resulta

$$P = \|g_p(t)\|^2 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |g_p(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (4.34)$$

que se denomina **Teorema de Potencia de Parseval**. La potencia media de $g_p(t)$ es igual a la suma de los cuadrados de las amplitudes de todos los armónicos componentes. Sólo es necesario conocer la amplitud de esos armónicos $|c_n|$. No importa la fase, a efectos de la determinación de la potencia de la señal.

De forma similar a como se definió la densidad espectral de energía, se puede definir también la **densidad espectral de potencia** de una señal periódica $g_p(t)$ como aquella función de la frecuencia cuya área es igual a la potencia media de esa señal. La vamos a denotar por $S_{g_p}(f)$. Viene dada en W/Hz. La potencia media se puede calcular según

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S_{g_p}(f) df. \quad (4.35)$$

La densidad espectral de potencia va a estar formada por un tren de deltas ponderados por el cuadrado de la amplitud de los coeficientes de la serie de Fourier en las frecuencias armónicas de la fundamental según

$$S_{g_p}(f) = \frac{1}{T_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| G\left(\frac{n}{T_0}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right). \quad (4.36)$$

En este caso la densidad espectral de potencia es una función discreta de la frecuencia debido a la periodicidad temporal. No siempre es así, puesto que para el otro tipo de señales de potencia importantes como son las aleatorias, la densidad espectral de potencia es continua, como se verá.

4.5. Autocorrelación de Señales de Energía

Como ya se vio en el apartado 4.2 la función de autocorrelación para el una señal de energía $g(t)$ viene dada por

$$R_g(\tau) = \langle g(t), g(t - \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t - \tau)dt = \langle g(t + \tau), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t + \tau)g^*(t)dt. \quad (4.37)$$

La función de autocorrelación para señales de energía tiene las siguientes propiedades:

1. Tiene simetría conjugada según

$$R_g(\tau) = R_g^*(-\tau), \quad (4.38)$$

esto quiere decir que la parte real es par y la parte imaginaria impar. Además si $g(t)$ es real, puesto que la parte imaginaria de la autocorrelación es cero, la función de autocorrelación es real y par.

2. El valor de la autocorrelación en el origen es igual a la energía de la señal según

$$E = R_g(0) = \langle g(t), g(t) \rangle = \|g(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt. \quad (4.39)$$

3. El valor máximo de la autocorrelación está en el origen según

$$|R_g(\tau)| \leq R_g(0) \quad \forall \tau. \quad (4.40)$$

Puesto que para una señal de energía, su energía es finita, $R_g(\tau)$ también es finito para toda τ .

4. La transformada de Fourier de la función de autocorrelación es la densidad espectral de energía

$$R_g(\tau) \iff \Psi_g(f). \quad (4.41)$$

Para probar esto a partir de la ecuación (4.37) cambiando la variable t por $-\sigma$ se tiene

$$R_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - \sigma)g^*(-\sigma)d\sigma = g(\tau) * g^*(-\tau), \quad (4.42)$$

que es la convolución de $g(\tau)$ con $g^*(-\tau)$. Si $G(f)$ es la transformada de Fourier de $g(t)$, por la propiedad de escalamiento en el tiempo y conjugación se tiene

$$g^*(-t) \iff G^*(f). \quad (4.43)$$

Por último por la propiedad de convolución en el dominio del tiempo se tiene finalmente

$$R_g(\tau) = g(\tau) * g^*(-\tau) \iff G(f)G^*(f) = |G(f)|^2 = \Psi_g(f) \quad (4.44)$$

como se quería demostrar. Por lo tanto se tiene

$$R_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(f) \exp(j2\pi f\tau)df \quad (4.45)$$

$$\Psi_g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\tau) \exp(-j2\pi f\tau)d\tau. \quad (4.46)$$

Como podemos ver, al calcular la función de autocorrelación a partir de la densidad espectral de energía, se utiliza únicamente la información procedente de la amplitud del espectro de la señal, por lo tanto se puede deducir que la información de fase de la señal no influye ni en la densidad espectral de energía ni en la función de autocorrelación. Dos señales que tengan idéntica información de amplitud, pero distinta información de fase van a tener idénticas funciones de autocorrelación y densidades espectrales de energía. Sabiendo la autocorrelación de una señal o su densidad espectral de energía no queda determinada la señal, puesto que se carece de la información de fase. Una señal tiene una única función de autocorrelación y una única densidad espectral de energía, sin embargo la afirmación inversa no es cierta.

4.6. Autocorrelación de Señales Periódicas

Si $g(t)$ es una señal de potencia, la función de autocorrelación viene dada por

$$\begin{aligned} R_g(\tau) &= \langle g(t), g(t-\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(t)g^*(t-\tau)dt \\ &= \langle g(t+\tau), g(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(t+\tau)g^*(t)dt. \end{aligned} \quad (4.47)$$

En el caso de que la señal de potencia sea periódica $g_p(t)$ con período T_0 , la ecuación (4.47) pasa a ser

$$\begin{aligned} R_{gp}(\tau) &= \langle g_p(t), g_p(t-\tau) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p(t)g_p^*(t-\tau)dt \\ &= \langle g_p(t+\tau), g_p(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p(t+\tau)g_p^*(t)dt. \end{aligned} \quad (4.48)$$

La autocorrelación para señales de potencia tiene propiedades análogas a las de la autocorrelación para señales de energía:

1. Simetría conjugada según

$$R_{gp}(\tau) = R_{gp}^*(-\tau). \quad (4.49)$$

La parte real de la autocorrelación es par y la imaginaria impar. Si la señal $g_p(t)$ es real, la autocorrelación es real y par.

2. El valor de la autocorrelación en el origen es igual a la potencia media de la señal

$$P = R_{gp}(0) = \langle g_p(t), g_p(t) \rangle = \|g_p(t)\|^2 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |g_p(t)|^2 dt. \quad (4.50)$$

3. El valor máximo de la autocorrelación está en el origen

$$|R_{gp}(\tau)| \leq R_{gp}(0) \quad \forall \tau. \quad (4.51)$$

Puesto que la potencia media de la señal es finita la función de autocorrelación de una señal de potencia es también finita.

4. La función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia forman un par transformado de Fourier

$$R_{gp}(\tau) \iff S_{gp}(f). \quad (4.52)$$

Para probar esta propiedad utilizamos la función generadora $g(t)$ relacionada con $g_p(t)$ por

$$g_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t-mT_0) \quad (4.53)$$

$$g(t) = \begin{cases} g_p(t) & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{para el resto.} \end{cases} \quad (4.54)$$

A partir de las ecuaciones (4.48) y (4.53) se llega a

$$R_{gp}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} g^*(t-\tau-mT_0)dt. \quad (4.55)$$

A partir de las ecuaciones (4.54) y (4.55) se puede obtener

$$R_{gp}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} g^*(t-\tau-mT_0)dt. \quad (4.56)$$

Ahora se puede en la ecuación (4.56) cambiar el orden del sumatorio y la integral dando lugar a

$$R_{gp}(\tau) = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t - \tau - mT_0)dt}_{R_g(\tau + mT_0)} = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_g(\tau + mT_0). \quad (4.57)$$

$R_g(\tau + mT_0)$ es la función de autocorrelación de la señal generadora desplazada a $\tau + mT_0$. Tomando transformada de Fourier en la ecuación (4.57) se tiene el desarrollo

$$\begin{aligned} F[R_{gp}(\tau)] &= \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F[R_g(\tau + mT_0)] = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 \exp(j2\pi f mT_0) \\ &= \frac{1}{T_0} |G(f)|^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi f mT_0). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Haciendo uso de la suma de Poisson

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi f mT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right), \quad (4.59)$$

la ecuación (4.58) se puede desarrollar según

$$\begin{aligned} F[R_{gp}(\tau)] &= \frac{1}{T_0^2} |G(f)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \frac{1}{T_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|G\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = S_{gp}(f), \end{aligned} \quad (4.60)$$

como se quería demostrar, esto es, que la transformada de Fourier de la función de autocorrelación era igual a la densidad espectral de potencia. Por lo tanto se pueden poner que

$$R_{gp}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{gp}(f) \exp(j2\pi f\tau) df \quad (4.61)$$

$$S_{gp}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{gp}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \quad (4.62)$$

Estas dos ecuaciones se denominan **relaciones de Wiener-Khintchine** que también se podrán aplicar en un futuro a señales aleatorias. Igual que ocurría en el caso de energía, la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia sólo dependen de la información de amplitud de la señal, no de la información de fase. Por lo tanto dos señales con la misma información de amplitud pero distinta de fase van a tener la misma autocorrelación y densidad espectral de potencia. Por lo tanto a partir de la autocorrelación o la densidad espectral de potencia no se puede determinar la señal puesto que no se dispone de la información de fase.

5. La función de autocorrelación es periódica con el mismo período que el de la señal original

$$R_{gp}(\tau) = R_{gp}(\tau \pm nT_0) \quad \text{con } n = 1, 2, \dots \quad (4.63)$$

Esta propiedad se deduce directamente de la ecuación (4.57).

La autocorrelación se puede calcular también como la convolución de la señal $g_p(\tau)$ con la señal $\frac{1}{T_0}g^*(-\tau)$

$$R_{gp}(\tau) = \frac{1}{T_0} g_p(\tau) * g^*(-\tau) \quad (4.64)$$

4.7. Correlación Cruzada de Señales de Energía

La correlación cruzada de dos señales de energía $g_1(t)$ y $g_2(t)$ viene dada por

$$R_{12}(\tau) = \langle g_1(t), g_2(t - \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2^*(t - \tau)dt = \langle g_1(t + \tau), g_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t + \tau)g_2^*(t)dt. \quad (4.65)$$

Si la correlación cruzada de dos señales es cero para un valor determinado de τ se dice que para ese valor τ las señales son ortogonales. En el caso que para todos los valores de τ las señales sean ortogonales, se dice entonces que las señales son incoherentes entre sí. Se puede dar una segunda definición de correlación cruzada para dos señales de energía $g_1(t)$ y $g_2(t)$ según

$$R_{21}(\tau) = \langle g_2(t), g_1(t - \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t)g_1^*(t - \tau)dt = \langle g_2(t + \tau), g_1(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t + \tau)g_1^*(t)dt. \quad (4.66)$$

De la definición de la correlación cruzada dada por las ecuaciones (4.65) y (4.66) se puede deducir que

$$R_{12}(\tau) = R_{21}^*(-\tau), \quad (4.67)$$

por lo tanto no se suele cumplir la propiedad conmutativa. Otra propiedad importante de la correlación cruzada es su transformada de Fourier que viene dada por

$$R_{12}(\tau) \longleftrightarrow G_1(f)G_2^*(f) = \Psi_{12}(f), \quad (4.68)$$

donde la función $\Psi_{12}(f)$ recibe el nombre de **densidad espectral cruzada de energía**. A esta relación se la denomina **Teorema de Correlación**, y la prueba es similar a la realizada para el caso de autocorrelación de señales de energía en el apartado 4.5. Nos dice que la transformada de Fourier de la correlación cruzada de dos señales de energía es igual a multiplicar la transformada de Fourier de una de ellas por el conjugado de la transformada de Fourier de la otra, es decir, es igual a la densidad espectral cruzada de energía. A partir de la ecuación (4.68) tomando transformada inversa de Fourier y teniendo en cuenta las propiedades de convolución en el dominio del tiempo y conjugación de la transformada de Fourier se puede obtener que

$$R_{12}(\tau) = g_1(\tau) * g_2^*(-\tau). \quad (4.69)$$

4.8. Correlación Cruzada de Señales Periódicas

La correlación cruzada de dos señales de potencia $g_1(t)$ y $g_2(t)$ va a venir dada por

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \langle g_1(t), g_2(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2^*(t - \tau)dt \\ &= \langle g_1(t + \tau), g_2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t + \tau)g_2^*(t)dt. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Si para un valor particular τ la correlación cruzada es cero se dice que para ese valor τ las señales son ortogonales. Si para todos los valores τ las señales son ortogonales, las señales son incoherentes. En general no se va a cumplir la propiedad conmutativa ya que se tiene que

$$R_{12}(\tau) = R_{21}^*(-\tau). \quad (4.71)$$

En el caso de que las señales a correlar sean ambas periódicas y con igual período T_0 , $g_{p1}(t)$ y $g_{p2}(t)$, la ecuación (4.70) pasa a ser

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \langle g_{p1}(t), g_{p2}(t - \tau) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_{p1}(t)g_{p2}^*(t - \tau)dt \\ &= \langle g_{p1}(t + \tau), g_{p2}(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_{p1}(t + \tau)g_{p2}^*(t)dt. \end{aligned} \quad (4.72)$$

La correlación cruzada en este caso es también periódica con período T_0 . La transformada de Fourier de la correlación cruzada de dos señales periódicas con período T_0 , $g_{p1}(t)$ y $g_{p2}(t)$ viene dada por

$$R_{12}(\tau) \iff \frac{1}{T_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_1\left(\frac{n}{T_0}\right) G_2^*\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right), \quad (4.73)$$

donde $G_1(f)$ y $G_2(f)$ son la transformada de Fourier de $g_1(t)$ y $g_2(t)$ que son las funciones generadoras de $g_{p1}(t)$ y de $g_{p2}(t)$. También se puede poner la ecuación (4.73) como

$$R_{12}(\tau) \iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n1}c_{n2}^* \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = S_{12}(f), \quad (4.74)$$

donde la función $S_{12}(f)$ recibe el nombre de **densidad espectral cruzada de potencia**. c_{n1} son los coeficientes de Fourier de $g_{p1}(t)$ y c_{n2} los de $g_{p2}(t)$. La correlación cruzada se puede calcular en el dominio del tiempo convolucionando $g_{p1}(\tau)$ con $\frac{1}{T_0}g_2^*(-\tau)$ según

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0}g_{p1}(\tau) * g_2^*(-\tau). \quad (4.75)$$

4.9. Densidades Espectrales a la Entrada y Salida de un Sistema

Si $x(t)$ es la entrada e $y(t)$ la salida de un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h(t)$, y $X(f)$ es la transformada de Fourier de la entrada, $Y(f)$ de la salida y $H(f)$ la función de transferencia, $Y(f)$ se puede calcular según

$$Y(f) = H(f)X(f). \quad (4.76)$$

Suponemos que $x(t)$ e $y(t)$ son señales de energía. Si en la ecuación (4.76) se toman módulos y se eleva al cuadrado se tiene que

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2|X(f)|^2. \quad (4.77)$$

Por lo tanto como la densidad espectral de energía era el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier a partir de la ecuación (4.77) se tiene que la relación entre la densidad espectral de energía de la señal de entrada y de la de salida viene dada por

$$\Psi_y(f) = |H(f)|^2\Psi_x(f). \quad (4.78)$$

Por lo tanto la relación entre la densidad espectral de energía a la entrada y a la salida solo depende de la respuesta en amplitud del sistema. De igual forma para señales de potencia se podría llegar a que

$$S_y(f) = |H(f)|^2S_x(f). \quad (4.79)$$

Usando densidades espectrales cruzadas podemos poner otras expresiones de interés. Para el caso de señales de energía

$$\Psi_{xy}(f) = \Psi_x(f)H^*(f) \quad (4.80)$$

$$\Psi_{yx}(f) = \Psi_x(f)H(f) \quad (4.81)$$

$$\Psi_y(f) = \Psi_{xy}(f)H(f) = \Psi_{yx}(f)H^*(f) = \Psi_x(f)|H(f)|^2. \quad (4.82)$$

Para el caso de señales de potencia

$$S_{xy}(f) = S_x(f)H^*(f) \quad (4.83)$$

$$S_{yx}(f) = S_x(f)H(f) \quad (4.84)$$

$$S_y(f) = S_{xy}(f)H(f) = S_{yx}(f)H^*(f) = S_x(f)|H(f)|^2. \quad (4.85)$$

4.10. Correlaciones a la Entrada y Salida de un Sistema

Sea $x(t)$ la entrada e $y(t)$ la salida de un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h(t)$. Sea $R_x(\tau)$ al autocorrelación de la entrada, la correlación cruzada entrada salida se puede calcular según

$$R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) * h^*(-\tau) \quad (4.86)$$

o alternativamente

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau). \quad (4.87)$$

La autocorrelación de la salida se puede calcular según

$$R_y(\tau) = R_{xy}(\tau) * h(\tau) = R_{yx}(\tau) * h^*(-\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau). \quad (4.88)$$

Como puede verse corresponde a la transformada inversa de Fourier de la ecuación (4.78) para señales de energía y (4.79) para señales de potencia. Por lo tanto la autocorrelación de la señal de salida depende sólo de la autocorrelación de la entrada y la respuesta en amplitud del sistema.

Capítulo 5

Transformada de Hilbert

5.1. Definición

La transformada de Fourier es útil para calcular el contenido en frecuencia de una señal de energía o de potencia. Así se pueden analizar y diseñar filtros selectivos en frecuencia para poder separar señales según su contenido en frecuencia. Este proceso se denomina **discriminación en frecuencia**.

Otro criterio para separar señales es el que está basado en la selectividad en fase, o también llamado **discriminación en fase**, que desfasa las señales pertinentes de modo que se puedan separar fácilmente. El caso más sencillo consiste en desfasar una señal 180° , lo que se consigue invirtiendo la polaridad o multiplicando por -1 . El desfasar todas las componentes 180° requiere el uso de un **transformador ideal**.

Otro desfase de interés es el de $\pm 90^\circ$. En particular, cuando las componentes angulares de una señal han sido desfasadas $\pm 90^\circ$, la función resultante se denomina **transformada de Hilbert** de la señal.

Sea $g(t)$ una señal cuya transformada de Fourier es $G(f)$. La transformada de Hilbert de $g(t)$ que se denota por $\hat{g}(t)$ viene dada por

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (5.1)$$

Como se puede ver la transformada de Hilbert es un operador lineal. Viene definida por una integral impropia, puesto que para $t = \tau$ el integrando tiene una singularidad. Para evitar este problema se supone que se calcula la integral de forma simétrica en torno a $t = \tau$ según

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{t-\epsilon} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau + \int_{t+\epsilon}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau \right]. \quad (5.2)$$

La transformada inversa de Hilbert puede calcularse mediante

$$g(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (5.3)$$

$g(t)$ y $\hat{g}(t)$ se dice que constituyen un par transformado de Hilbert. De la definición de la transformada de Hilbert se puede deducir que $\hat{g}(t)$ se puede interpretar como una convolución

$$\hat{g}(t) = g(t) * \frac{1}{\pi t}. \quad (5.4)$$

Puesto que la transformada de Fourier de $\frac{1}{\pi t}$ es $-j \operatorname{sgn}(f)$, a partir de la propiedad de convolución en el dominio del tiempo de la transformada de Fourier, la transformada de Fourier de $\hat{g}(t)$ denotada por $\hat{G}(f)$ va a venir dada por

$$\hat{G}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) G(f). \quad (5.5)$$

Por lo tanto se puede calcular la transformada de Hilbert de una señal $g(t)$ haciéndola pasar por un sistema LTI con respuesta al impulso $\frac{1}{\pi t}$ o con función de transferencia $-j \operatorname{sgn}(f)$. Este sistema introduce un desfase de -90° para frecuencias positivas y 90° para frecuencias negativas. En la figura 5.1 puede verse la respuesta en fase de este sistema. La amplitud a la salida de este sistema no queda modificada a ninguna frecuencia.

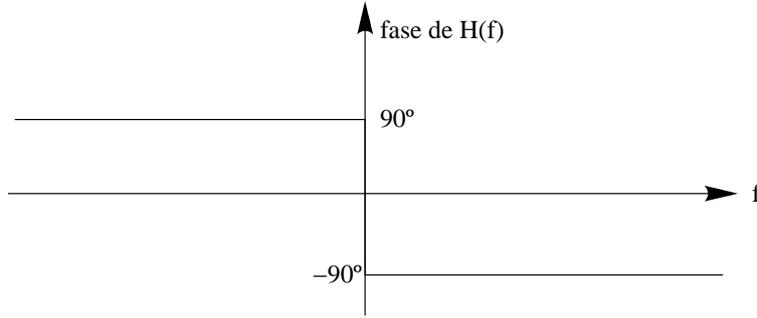


Figura 5.1: Respuesta en Fase del Sistema Transformador de Hilbert.

El sistema ideal de la figura 5.1 se denomina **transformador de Hilbert** y tiene muchas aplicaciones importantes como:

1. Se puede utilizar para tener selectividad en fase para un tipo especial de modulación en amplitud denominado modulación en banda lateral única o SSB.
2. Proporciona la base matemática necesaria para representar señales paso banda.

La transformada de Hilbert se puede aplicar a cualquier señal que tenga transformada de Fourier y por lo tanto a señales de potencia y de energía de las usadas en sistemas de comunicaciones.

5.2. Propiedades de la Transformada de Hilbert

Vamos a suponer en las propiedades siguientes que nuestra señal $g(t)$ es real.

5.2.1. Propiedad 1

Una señal $g(t)$ y su transformada de Hilbert $\hat{g}(t)$ tienen la misma densidad espectral. Para probarlo, se puede observar que la transformada de Fourier de $\hat{g}(t)$ es $-j \operatorname{sgn}(f)$ multiplicado por $G(f)$, pero como la amplitud de $-j \operatorname{sgn}(f)$ es unidad, entonces $g(t)$ y $\hat{g}(t)$ tienen la misma amplitud en frecuencia $|G(f)| = |\hat{G}(f)|$. De aquí se sigue que como la densidad espectral solo depende de la amplitud de la transformada de Fourier, si $g(t)$ es una señal de energía, $\hat{g}(t)$ y $g(t)$ tendrán la misma densidad espectral de energía y si es de potencia, tendrán la misma densidad espectral de potencia.

De esta propiedad se puede deducir como corolario:

1. Si $g(t)$ está limitada en banda, $\hat{g}(t)$ también va a estar limitada en banda.
2. $g(t)$ y su transformada de Hilbert $\hat{g}(t)$ tendrán la misma energía si $g(t)$ es una señal de energía o la misma potencia si $g(t)$ es de potencia.

5.2.2. Propiedad 2

$g(t)$ y su transformada de Hilbert $\hat{g}(t)$ tienen la misma función de autocorrelación. Se deduce directamente de la propiedad anterior, puesto que la transformada inversa de Fourier de la densidad espectral es la función de autocorrelación.

5.2.3. Propiedad 3

Una señal y su transformada de Hilbert son ortogonales. Para demostrarlo en el caso de señales de energía, se calcula la correlación cruzada, debiendo valer cero en el origen para que las señales sean ortogonales, según

$$R_{\hat{g}g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t)g^*(t - \tau)dt. \quad (5.6)$$

Se sabe también que la transformada de Fourier de la correlación de la ecuación (5.6) se puede calcular según

$$R_{\hat{g}g}(\tau) \iff \hat{G}(f)G^*(f). \quad (5.7)$$

A partir de las ecuaciones (5.6) y (5.7) se puede poner que

$$R_{\hat{g}g}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t)g^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(f)G^*(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(f) [-j \operatorname{sgn}(f)G(f)] df = -j \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(f)|G(f)|^2 df = 0, \tag{5.8}$$

que vale cero puesto que el integrando es una función impar de la frecuencia. Esto es debido a que $\operatorname{sgn}(f)$ es impar y $|G(f)|^2$ es par, y el producto de una función par por una impar es impar. Por lo tanto queda demostrado que son ortogonales.

En el caso de señales de potencia se prueba de la misma forma llegando al final a que

$$R_{\hat{g}g}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g^*(t)\hat{g}(t)dt = 0, \tag{5.9}$$

quedando también en este caso demostrado que son ortogonales.

5.2.4. Propiedad 4

Si $\hat{g}(t)$ es la transformada de Hilbert de $g(t)$, la transformada de Hilbert de $\hat{g}(t)$ es $-g(t)$. Calcular la transformada de Hilbert es equivalente a pasar la señal $g(t)$ a través del sistema cuya función de transferencia es $H(f) = -j \operatorname{sgn}(f)$. Calcular la transformada de Hilbert de $\hat{g}(t)$ será por lo tanto equivalente a pasar $\hat{g}(t)$ por el mismo sistema $H(f)$, por lo tanto la función de transferencia de la conexión en cascada de ambos sistemas cuya respuesta en frecuencia es $H(f)H(f)$ será el sistema que nos calcula a partir de $g(t)$ la transformada de Hilbert de $\hat{g}(t)$. Entonces como $H(f)H(f) = -1$ la salida de la conexión en cascada cuando la entrada es $g(t)$ es $-g(t)$ quedando por lo tanto probada la propiedad.

5.3. Transformadas de Hilbert Inmediatas

Suponiendo que $m(t)$ sea una señal paso bajo limitada en banda al intervalo $-W \leq f \leq W$, siendo además $W < f_c$, en la tabla 5.1 pueden verse algunos de pares transformados de Hilbert más utilizados.

5.4. Señal Analítica

Sea una señal real $g(t)$. Se define la **señal analítica positiva** de la señal $g(t)$, $g_+(t)$, como la función compleja

$$g_+(t) = g(t) + j\hat{g}(t), \tag{5.10}$$

$g(t)$	$\hat{g}(t)$
$m(t) \cos(2\pi f_c t)$	$m(t) \sin(2\pi f_c t)$
$m(t) \sin(2\pi f_c t)$	$-m(t) \cos(2\pi f_c t)$
$\cos(2\pi f_c t)$	$\sin(2\pi f_c t)$
$\sin(2\pi f_c t)$	$-\cos(2\pi f_c t)$
$\frac{\sin(t)}{t}$	$\frac{1-\cos(t)}{t}$
$\Pi(t)$	$-\frac{1}{\pi} \ln \left \frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}} \right $
$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$
$\frac{1}{1+t^2}$	$\frac{t}{1+t^2}$
$\frac{1}{t}$	$-\pi\delta(t)$

Tabla 5.1: Pares Transformados de Hilbert más comunes.

donde $\hat{g}(t)$ es la transformada de Hilbert de $g(t)$. Como puede verse, la parte real de la señal analítica positiva es la señal dada y la parte imaginaria de la su transformada de Hilbert. La utilización de señales analíticas va a simplificar el trabajo con señales paso banda.

Una de las características más importantes de la señal analítica positiva es su comportamiento en frecuencia. La transformada de Fourier $G_+(f)$ de la señal $g_+(t)$ va a venir dada por

$$G_+(f) = G(f) + j[-j \operatorname{sgn}(f)]G(f) = \begin{cases} 2G(f) & f > 0 \\ G(0) & f = 0 \\ 0 & f < 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Si la amplitud de $G(f)$ es la de la figura 5.2, la amplitud de la transformada de Fourier de la señal analítica será la de la figura 5.3. Por lo tanto dada una señal $g(t)$ se puede calcular su señal analítica positiva de dos formas:

1. Calcular su transformada de Hilbert $\hat{g}(t)$ y entonces utilizar la ecuación (5.10).
2. Calcular $G(f)$, determinar $G_+(f)$ según la ecuación (5.11) y finalmente calcular la transformada de Fourier inversa. Por lo tanto la señal analítica va a venir dada por

$$g_+(t) = 2 \int_0^{\infty} G(f) \exp(j2\pi ft) df. \quad (5.12)$$

Dependiendo de cómo sea $g(t)$ y $G(f)$ un método será más apropiado que el otro. De igual forma se define la **señal analítica negativa** según

$$g_-(t) = g(t) - j\hat{g}(t). \quad (5.13)$$

En el dominio de la frecuencia se tendrá que

$$G_-(f) = G(f) - j[-j \operatorname{sgn}(f)]G(f) = G(f)[1 - \operatorname{sgn}(f)] = \begin{cases} 2G(f) & f < 0 \\ G(0) & f = 0 \\ 0 & f > 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

Si se calcula la amplitud del espectro de la señal analítica negativa cuya amplitud del espectro es la de la figura 5.2, se tiene la figura 5.4.

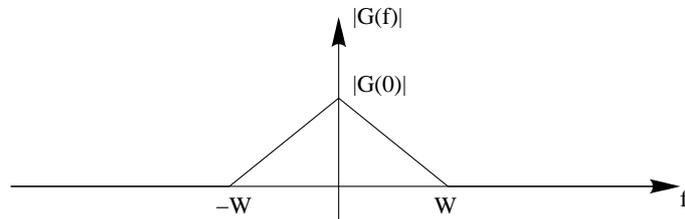


Figura 5.2: Amplitud del Espectro de $G(f)$.

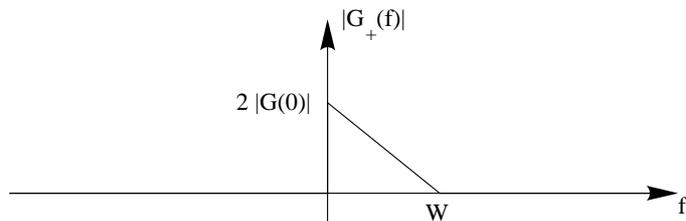
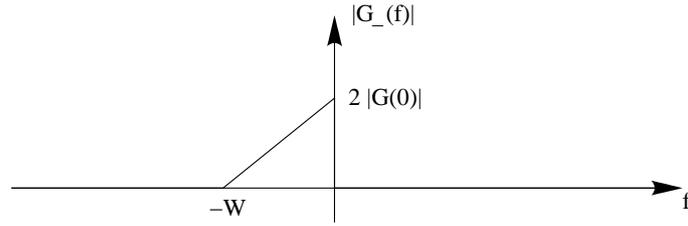


Figura 5.3: Amplitud del Espectro de la Señal Analítica Positiva $G_+(f)$.

Figura 5.4: Amplitud del Espectro de la Señal Analítica Negativa $G_-(f)$.

Si se toma la transformada inversa de la ecuación (5.14) se tiene

$$g_-(t) = 2 \int_{-\infty}^0 G(f) \exp(j2\pi ft) df. \quad (5.15)$$

Además si se suman las ecuaciones (5.12) y (5.15) o equivalentemente las ecuaciones (5.10) y (5.13) se obtiene que

$$g(t) = \frac{1}{2}[g_+(t) + g_-(t)], \quad (5.16)$$

es decir, la mitad de la suma de las señales analítica positiva y negativa es igual a la señal original $g(t)$.

5.5. Señales Paso Banda

Sea $g(t)$ una señal paso banda de ancho de banda $2W$ centrada en $\pm f_c$. La frecuencia f_c se denomina **frecuencia portadora**. En la mayor parte de los sistemas de comunicación se tiene que $f_c \gg 2W$. Por ello se denominan a este tipo de señales de **banda estrecha**. La señal analítica positiva de una señal de banda estrecha $g(t)$ paso banda centrada en $\pm f_c$ puede expresarse según

$$g_+(t) = \tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t). \quad (5.17)$$

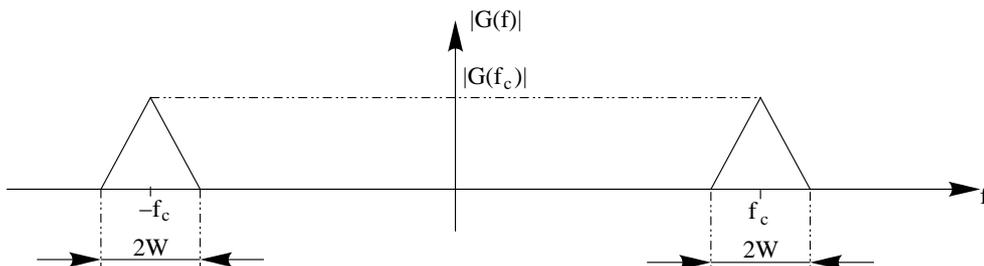
La señal $\tilde{g}(t)$ se denomina **envolvente compleja**. En la ecuación (5.17) se puede despejar $\tilde{g}(t)$ en términos de $g_+(t)$ según

$$\tilde{g}(t) = g_+(t) \exp(-j2\pi f_c t). \quad (5.18)$$

$g_+(t)$ está limitada a la banda de frecuencias $f_c - W \leq f \leq f_c + W$. Aplicando la propiedad de desplazamiento en frecuencia de la transformada de Fourier y si $\tilde{G}(f)$ es la transformada de Fourier de la envolvente compleja $\tilde{g}(t)$, ésta se puede poner como

$$\tilde{G}(f) = G_+(f) * \delta(f + f_c) = G_+(f + f_c). \quad (5.19)$$

Por lo tanto $\tilde{G}(f)$ está limitado a la banda de frecuencias $-W \leq f \leq W$, es decir, la envolvente compleja es una señal paso bajo. En la figura 5.5 puede verse la amplitud del espectro de una señal paso banda de banda estrecha, en la figura 5.6 la amplitud del espectro de la señal analítica positiva de la anterior y en la figura 5.7 la amplitud del espectro de la envolvente compleja.

Figura 5.5: Amplitud del Espectro de una Señal Paso Banda de Banda Estrecha $G(f)$.

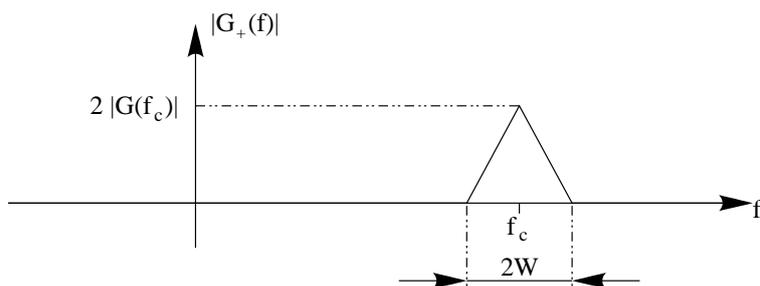


Figura 5.6: Amplitud del Espectro de la Señal Analítica Positiva $G_+(f)$.

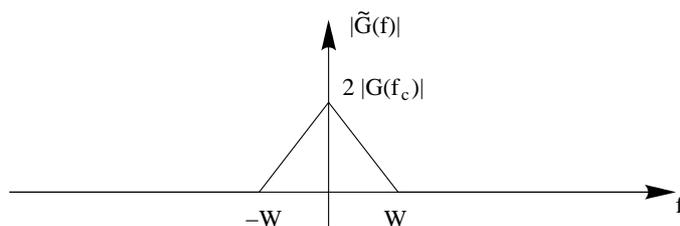


Figura 5.7: Amplitud del Espectro de la Envolvente Compleja $\tilde{G}(f)$.

Por definición una señal dada $g(t)$ se puede calcular como la parte real de la señal analítica positiva correspondiente, por lo tanto utilizando las ecuaciones (5.10) y (5.17) se tiene que

$$g(t) = \Re[\tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t)]. \quad (5.20)$$

En general $\tilde{g}(t)$ es una señal compleja y se puede poner como parte real y parte imaginaria según

$$\tilde{g}(t) = g_c(t) + jg_s(t), \quad (5.21)$$

donde $g_c(t)$ y $g_s(t)$ son ambas señales reales y paso bajo. Utilizando las ecuaciones (5.20) y (5.21) se puede llegar a

$$g(t) = g_c(t) \cos(2\pi f_c t) - g_s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (5.22)$$

que se denomina **forma canónica** de la señal paso banda. A $g_c(t)$ se la denomina **componente en fase** de la señal original $g(t)$ y a $g_s(t)$ **componente en cuadratura**.

La envolvente compleja $\tilde{g}(t)$ puede verse como un fasor en el tiempo en el origen del plano $g_c g_s$. El extremo del fasor se mueve en el plano a la vez que el plano gira con velocidad $2\pi f_c$ rad/s. La señal original $g(t)$ puede verse como la proyección del fasor sobre el eje horizontal fijo.

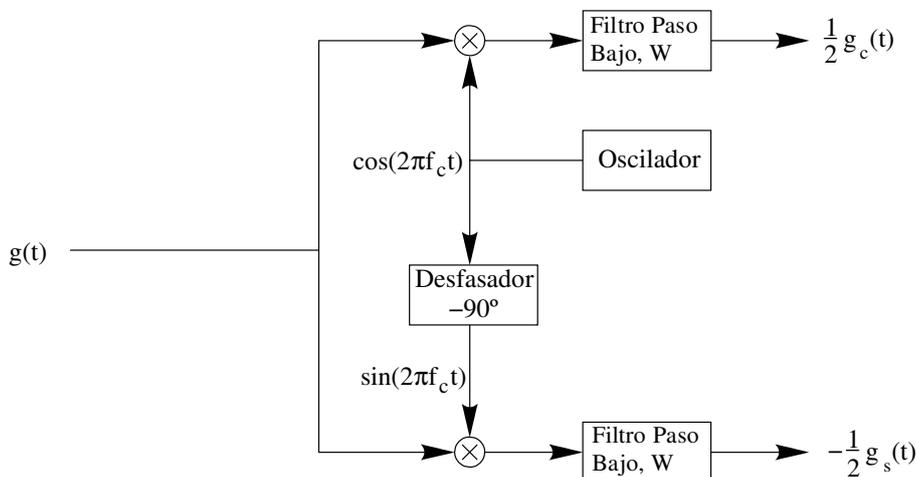


Figura 5.8: Cálculo de la Componente en Fase y Cuadratura a partir de $g(t)$.

Tanto $g_c(t)$ como $g_s(t)$ están limitados a la banda de frecuencias $-W \leq f \leq W$. Entonces salvo por un factor de escala, se pueden calcular a partir de la señal original $g(t)$ según el diagrama de bloques de la figura 5.8, donde los filtros son iguales e ideales. Utilizando la ecuación (5.22) se puede obtener el diagrama de bloques de la figura 5.9 para recuperar la señal $g(t)$ a partir de las componentes en fase y cuadratura. Los diagramas de las figuras 5.8 y 5.9 son básicos para las modulaciones lineales.

Alternativamente se puede expresar la envolvente compleja $\tilde{g}(t)$ según

$$\tilde{g}(t) = a(t) \exp[j\phi(t)], \quad (5.23)$$

donde $a(t)$ y $\phi(t)$ son funciones reales. A $a(t)$ se la denomina **envolvente natural** o **envolvente** de la señal original, mientras que a $\phi(t)$ se la denomina **fase**. Usando las ecuaciones (5.20) y (5.23), la señal original se puede determinar ahora mediante

$$g(t) = a(t) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)]. \quad (5.24)$$

Es evidente que tanto en el caso de que utilicemos la representación en fase y cuadratura como la de amplitud y fase, toda la información contenida en $g(t)$ está completamente representada por la envolvente compleja $\tilde{g}(t)$. La ventaja de utilizar la envolvente compleja frente a la señal paso banda es únicamente analítica como se verá.

Hay que distinguir tres representaciones distintas de la señal paso banda original $g(t)$:

1. La señal analítica positiva dada por la ecuación (5.10), donde $\hat{g}(t)$ se puede entender como la señal en cuadratura con $g(t)$. La transformada de Fourier de la señal analítica vendrá dada en este caso por

$$G_+(f) = \begin{cases} 2G(f) & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

2. Envolvente compleja $\tilde{g}(t)$ dada por la ecuación (5.18), que no es más que una versión desplazada en frecuencia de $g_+(t)$.
3. La envolvente natural $a(t)$ dada por

$$a(t) = |\tilde{g}(t)| = |g_+(t)|, \quad (5.26)$$

que es la magnitud de la envolvente compleja $\tilde{g}(t)$ y de la señal analítica positiva $g_+(t)$.

5.6. Sistemas Paso Banda

Vamos a desarrollar un procedimiento para analizar sistemas paso banda. Queremos mostrar como el análisis de sistemas paso banda se simplifica en gran medida estableciendo una analogía con las señales

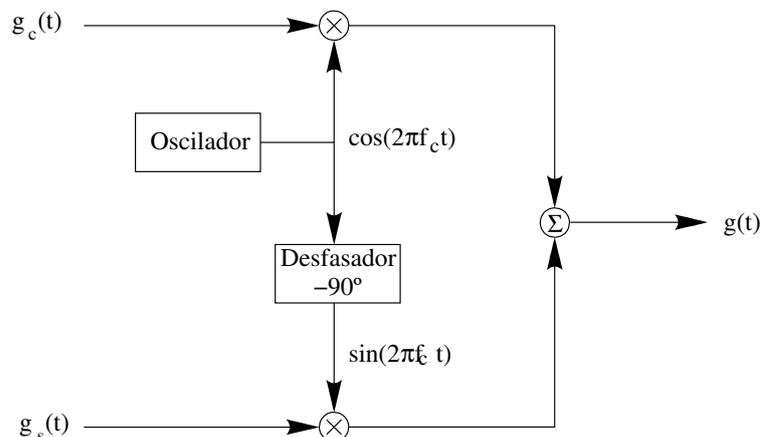


Figura 5.9: Cálculo de $g(t)$ a partir de las Componentes en Fase y Cuadratura.

paso banda. Esta analogía se basa en el uso de la transformada de Hilbert para representar señales paso banda.

Consideremos una señal de banda estrecha paso banda $x(t)$ con transformada de Fourier $X(f)$. Se supone que el espectro está limitado a las frecuencias $\pm W$ en torno a $\pm f_c$. Se supone además que $W \ll f_c$. Esta señal se puede representar en forma canónica según

$$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_c t) - x_s(t) \sin(2\pi f_c t), \quad (5.27)$$

siendo $x_c(t)$ la componente en fase y $x_s(t)$ la componente en cuadratura. Si $\tilde{x}(t)$ denota la envolvente compleja de $x(t)$ va a venir dada por

$$\tilde{x}(t) = x_c(t) + jx_s(t). \quad (5.28)$$

Vamos a aplicar $x(t)$ a la entrada a un sistema LTI paso banda con respuesta al impulso $h(t)$ y función de transferencia $H(f)$. Supondremos que la respuesta en frecuencia del sistema está limitada a las bandas $\pm B$ en torno a $\pm f_c$. En general el ancho de banda del sistema $2B$ es menor o igual que el de las señales de trabajo $2W$. Vamos a poder representar la respuesta al impulso $h(t)$ en función de su **componente en fase** $h_c(t)$ y su **componente en cuadratura** $h_s(t)$ según

$$h(t) = 2h_c(t) \cos(2\pi f_c t) - 2h_s(t) \sin(2\pi f_c t), \quad (5.29)$$

donde se ha introducido el factor 2 por conveniencia en el desarrollo, como se verá más adelante. Se va a definir la **respuesta al impulso compleja** $\tilde{h}(t)$ según

$$\tilde{h}(t) = h_c(t) + jh_s(t) \quad (5.30)$$

La respuesta al impulso paso banda se puede calcular a partir de la respuesta al impulso compleja como

$$h(t) = \Re[2\tilde{h}(t) \exp(j2\pi f_c t)] \quad (5.31)$$

Las señales $h_c(t)$, $h_s(t)$ y $\tilde{h}(t)$ son funciones paso bajo limitadas a las frecuencias $-B < f < B$. Se puede determinar la respuesta al impulso compleja en función su componente en fase $h_c(t)$ y su componente en cuadratura $h_s(t)$.

De forma alternativa se puede determinar a partir de la función de transferencia. Desarrollando la ecuación (5.31) se llega a

$$h(t) = \tilde{h}(t) \exp(j2\pi f_c t) + \tilde{h}^*(t) \exp(-j2\pi f_c t) \quad (5.32)$$

y tomando transformada de Fourier se tiene

$$H(f) = \tilde{H}(f - f_c) + \tilde{H}^*(-f - f_c), \quad (5.33)$$

donde $\tilde{H}(f)$ es la transformada de Fourier de $\tilde{h}(t)$. La ecuación (5.33) satisface la condición de simetría conjugada, $H^*(f) = H(-f)$, ya que $h(t)$ es real. Ya que $\tilde{H}(f)$ es una función paso bajo con $|f| < B$ con $B \ll f_c$, de la ecuación (5.33) se deduce

$$\tilde{H}(f - f_c) = H(f) \text{ para } f > 0. \quad (5.34)$$

Según la ecuación (5.34) se va a poder calcular $\tilde{H}(f)$ a partir de $H(f)$ tomando la parte positiva de las frecuencias y desplazando f_c hasta el origen. Para calcular $\tilde{h}(t)$ se toma transformada inversa de Fourier

$$\tilde{h}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}(f) \exp(j2\pi ft) df. \quad (5.35)$$

La representación descrita es un buen método para poder calcular, en el caso se señales y sistemas paso banda, la salida a partir de la entrada trabajando en el dominio paso bajo. Supongamos que la señal de entrada $x(t)$ y la función de transferencia $H(f)$ están centrados en la frecuencia portadora f_c y que $y(t)$ es la salida del sistema. Claramente la señal de salida va a ser paso banda y se va a poder representar mediante su envolvente compleja $\tilde{y}(t)$. La señal original paso banda se puede determinar entonces como

$$y(t) = \Re[\tilde{y}(t) \exp(j2\pi f_c t)]. \quad (5.36)$$

La salida del sistema va a estar relacionada con la entrada y la respuesta al impulso mediante la integral de convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (5.37)$$

Puesto que se cumple que

$$x(t) = \Re[x_+(t)] \quad (5.38)$$

$$h(t) = 2\Re[h_+(t)], \quad (5.39)$$

viniendo dada $h_+(t)$ por

$$h_+(t) = \frac{1}{2}[h(t) + j\hat{h}(t)], \quad (5.40)$$

donde $\hat{h}(t)$ es la transformada de Hilbert de la respuesta al impulso del sistema, la ecuación (5.37) se puede poner según

$$y(t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Re[h_+(\tau)]\Re[x_+(t-\tau)]d\tau. \quad (5.41)$$

Se puede demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Re[h_+(t)]\Re[x_+(t)]dt = \frac{1}{2}\Re \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_+(t)x_+^*(t)dt \right] \quad (5.42)$$

entonces teniendo en cuenta que

$$h_+(t) = \tilde{h}(t) \exp(j2\pi f_c t) \quad (5.43)$$

$$x_+(t) = \tilde{x}(t) \exp(j2\pi f_c t) \quad (5.44)$$

se llega a que

$$\begin{aligned} y(t) &= \Re \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_+(\tau)x_+(t-\tau)d\tau \right] = \Re \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau) \exp(j2\pi f_c \tau) \tilde{x}(t-\tau) \exp[j2\pi f_c(t-\tau)]d\tau \right] \\ &= \Re \left[\exp(j2\pi f_c t) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau) \tilde{x}(t-\tau)d\tau \right]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Por último, teniendo en cuenta las ecuaciones (5.36) y (5.45) se llega a

$$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau) \tilde{x}(t-\tau)d\tau = \tilde{h}(t) * \tilde{x}(t). \quad (5.46)$$

Por lo tanto según esta ecuación, la envolvente compleja $\tilde{y}(t)$ de la señal de salida de un sistema paso banda se puede calcular como la convolución de la envolvente compleja de la respuesta al impulso $\tilde{h}(t)$ con la envolvente compleja de la señal de entrada $\tilde{x}(t)$. Tomando entonces transformada de Fourier en la ecuación (5.46) se tiene en el dominio de la frecuencia que

$$\tilde{Y}(f) = \tilde{X}(f)\tilde{H}(f). \quad (5.47)$$

Existe un **isomorfismo** para la convolución entre funciones paso banda y funciones paso bajo. El factor 2 que se usó en la ecuación (5.29) fue para que no apareciera dicho factor en la ecuación (5.46). Este resultado

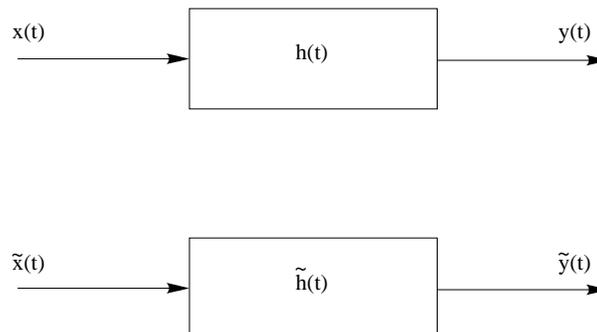


Figura 5.10: Equivalencia entre Sistemas Paso Banda y Paso Bajo.

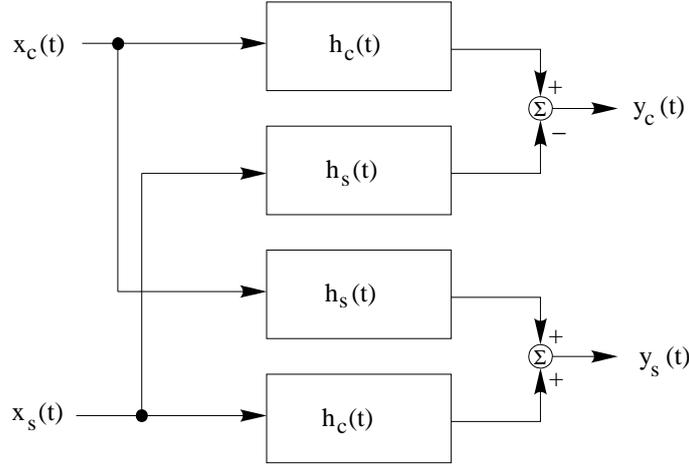


Figura 5.11: Sistema Alternativo utilizando Componentes en Fase y Cuadratura.

es significativo, pues en el caso de señales o sistemas paso banda se puede trabajar únicamente con funciones paso bajo $\tilde{x}(t)$, $\tilde{h}(t)$ y $\tilde{y}(t)$ que representan la entrada, la respuesta al impulso y la salida respectivamente. El análisis de un sistema paso banda que se complica por la presencia del factor $\exp(j2\pi f_c t)$, es sustituido por otro análisis paso bajo que tiene la esencia del proceso de filtrado. Los dos sistemas de la figura 5.10 son entonces equivalentes.

Si $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{h}(t)$ se definen en función de sus componentes en fase y cuadratura, sustituyendo en la ecuación (5.46) se obtiene el desarrollo

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) &= [h_c(t) + jh_s(t)] * [x_c(t) + jx_s(t)] \\ &= [h_c(t) * x_c(t) - h_s(t) * x_s(t)] + j[h_s(t) * x_c(t) + h_c(t) * x_s(t)] = y_c(t) + jy_s(t).\end{aligned}\quad (5.48)$$

Según la ecuación (5.48) la componente en fase de señal de salida va a venir dada por

$$y_c(t) = h_c(t) * x_c(t) - h_s(t) * x_s(t) \quad (5.49)$$

y la componente en cuadratura de la salida por

$$y_s(t) = h_s(t) * x_c(t) + h_c(t) * x_s(t). \quad (5.50)$$

En el caso de que se quiera evaluar las componentes en fase y cuadratura a la salida del sistema en función de las componentes en fase y cuadratura de la entrada y la respuesta al impulso del sistema se puede utilizar el esquema alternativo de la figura 5.11, donde todos los bloques son reales y paso bajo.

Como resumen para la evaluación de la salida de un sistema se pueden seguir los siguientes pasos:

1. $x(t)$ se reemplaza por $\tilde{x}(t) = [x(t) + j\hat{x}(t)] \exp(-j2\pi f_c t)$, con $\hat{x}(t)$ la transformada de Hilbert de $x(t)$.
2. $h(t)$ se reemplaza por $\tilde{h}(t) = \frac{1}{2}[h(t) + j\hat{h}(t)] \exp(-2j\pi f_c t)$, con $\hat{h}(t)$ la transformada de Hilbert de $h(t)$.
3. La envolvente compleja de la señal de salida se obtiene como $\tilde{y}(t) = \tilde{h}(t) * \tilde{x}(t)$.
4. La señal paso banda de salida se obtiene mediante $y(t) = \Re[\tilde{y}(t) \exp(j2\pi f_c t)]$.

5.7. Retardo de Fase y de Grupo

Si tenemos una señal sinusoidal de frecuencia f_c transmitida por un sistema **dispersivo** con un desfase $\beta(f_c)$ radianes a esa frecuencia. Utilizando dos fasores para representar la señal transmitida y la señal recibida, se puede ver que el fador recibido está desfasado $\beta(f_c)$ radianes respecto del fador transmitido. El tiempo que tarda el fador recibido en barrer ese desfase es igual a $\frac{\beta(f_c)}{2\pi f_c}$ segundos. Este tiempo recibe el nombre de **retardo de fase** del canal. Sin embargo hay que tener en cuenta que el retardo de fase no es el retardo real de la señal. Esto es debido a que una señal sinusoidal no lleva ninguna información, y por lo tanto, no se puede deducir que el retardo de fase sea el retardo real de la señal. La información se

puede transmitir modificando cierto parámetro de la señal sinusoidal según la información a transmitir. Supongamos que una señal sinusoidal de variación lenta se multiplica por una señal sinusoidal portadora. La señal resultante se denomina **señal modulada** y consiste en un grupo de frecuencias estrecho en torno a la frecuencia portadora. Cuando esta señal modulada se transmite por el canal, se puede ver que existe un retardo entre la envolvente de la señal de entrada y la de la señal de salida. Este retardo se denomina **retardo de grupo** o **retardo de envolvente**, y representa el retardo real de la señal de información.

Si el canal es real y dispersivo en fase su función de transferencia puede ponerse según

$$H(f) = K \exp[j\beta(f)], \quad (5.51)$$

donde K es una constante y $\beta(f)$ es una función no lineal de la frecuencia. Supongamos que la señal de entrada puede ponerse como

$$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_c t), \quad (5.52)$$

donde $x_c(t)$ es una señal paso bajo con $|f| < W$ y $W \ll f_c$. Si realizamos la expansión de la serie de Taylor de $\beta(f)$ en torno a f_c conservando únicamente los dos primeros términos tenemos que

$$\beta(f) \simeq \beta(f_c) + (f - f_c) \left. \frac{d\beta(f)}{df} \right|_{f=f_c}. \quad (5.53)$$

Se define el retardo de fase τ_p por

$$\tau_p = -\frac{\beta(f_c)}{2\pi f_c} \quad (5.54)$$

y el retardo de grupo τ_g mediante

$$\tau_g = -\frac{1}{2\pi} \left. \frac{d\beta(f)}{df} \right|_{f=f_c}. \quad (5.55)$$

La ecuación (5.53) usando las ecuaciones (5.54) y (5.55) se puede volver a escribir como

$$\beta(f) = -2\pi f_c \tau_p - 2\pi(f - f_c) \tau_g. \quad (5.56)$$

Sustituyendo la ecuación (5.56) en la ecuación (5.51) se tiene

$$H(f) = K \exp[-j2\pi f_c \tau_p - j2\pi(f - f_c) \tau_g]. \quad (5.57)$$

Utilizando la representación en el dominio paso bajo mediante envolventes complejas a partir de la ecuación (5.57) se tiene

$$\tilde{H}(f) = K \exp(-j2\pi f_c \tau_p - j2\pi f \tau_g). \quad (5.58)$$

Además para la entrada a partir de la ecuación (5.52) se tiene

$$\tilde{X}(f) = X_c(f), \quad (5.59)$$

donde $X_c(f)$ es la transformada de Fourier de $x_c(t)$. Utilizando el procedimiento visto en el apartado 5.6 se puede calcular la transformada de Fourier de la envolvente compleja de la señal de salida según

$$\tilde{Y}(f) = \tilde{X}(f) \tilde{H}(f) = X_c(f) K \exp(-j2\pi f_c \tau_p - j2\pi f \tau_g) = K \exp(-j2\pi f_c \tau_p) \exp(-j2\pi f \tau_g) X_c(f). \quad (5.60)$$

Tomando transformada inversa de Fourier en la ecuación (5.60), y aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo de la transformada de Fourier, se tiene

$$\tilde{y}(t) = K \exp(-j2\pi f_c \tau_p) x_c(t - \tau_g), \quad (5.61)$$

donde como se puede ver el factor $\exp(-j2\pi f_c \tau_p)$ es una constante. Finalmente, la señal de salida paso banda se puede calcular obteniéndose

$$y(t) = K x_c(t - \tau_g) \cos[2\pi f_c(t - \tau_p)]. \quad (5.62)$$

La ecuación (5.62) muestra que el resultado de la transmisión de la señal $x(t)$ a través del canal dispersivo

en fase tiene dos efectos de retardo:

1. La señal portadora $\cos(2\pi f_c t)$ está retardada τ_p segundos. Por lo tanto τ_p es el retardo de fase, que también se suele denominar **retardo de portadora**.
2. La envolvente $x_c(t)$ queda retardada τ_g segundos. τ_g es el retardo de grupo o envolvente y es el retardo real que sufre la señal de información. Este retardo está relacionado con la pendiente de la fase $\beta(f)$ en el punto $f = f_c$.

En el caso de que la fase sea lineal y pase por el origen según

$$\beta(f) = -2\pi f t_0, \quad (5.63)$$

el retardo de fase y de grupo toman el mismo valor t_0

$$\tau_p = -\frac{\beta(f_c)}{2\pi f_c} = -\frac{2\pi f_c t_0}{2\pi f_c} = t_0 \quad (5.64)$$

$$\tau_g = -\frac{1}{2\pi} \left. \frac{d\beta(f)}{df} \right|_{f=f_c} = -\frac{1}{2\pi} (-2\pi t_0) \Big|_{f=f_c} = t_0. \quad (5.65)$$