
SEÑALES ALEATORIAS Y RUIDO.

Marcos Martín Fernández
E. T. S. de Ingenieros de Telecomunicación
Universidad de Valladolid.

CONTENIDOS

INDICE DE FIGURAS	VII
1. PROBABILIDAD.	1
2. VARIABLES ALEATORIAS.	5
2.1. Una Variable Aleatoria.	5
2.2. Varias Variables Aleatorias.	6
2.3. Medias Estadísticas para una Variable Aleatoria.	9
2.4. Medias Estadísticas Conjuntas.	10
3. SEÑALES ALEATORIAS.	13
3.1. Definición.	13
3.2. Estacionariedad.	15
3.3. Media, Correlación y Covarianza.	16
3.4. Media Temporal y Ergodicidad.	23
4. TRANSMISIÓN DE UNA SEÑAL ALEATORIA A TRAVÉS DE UN SISTEMA.	29
5. DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA.	35
5.1. Definición.	35
5.2. Propiedades.	36
5.3. Relación entre Densidades Espectrales a la Entrada y Salida de un Sistema LTI.	38
5.4. Relación entre la Densidad Espectral de Potencia y la Amplitud del Espectro de una Función Muestra.	39
5.5. Cálculo de Densidades Espectrales de Señales Binarias.	41
5.6. Densidad Espectral Cruzada.	41
5.7. Espectro de Covarianza.	42
6. PROCESOS GAUSSIANOS.	45
6.1. Definición.	45
6.2. Propiedades de los Procesos Gaussianos.	47
7. RUIDO.	53
7.1. Tipos de Ruido.	53
7.2. Ancho de Banda Equivalente de Ruido o Rectangular.	56
7.3. Ruido de Banda Estrecha.	57
8. ANCHO DE BANDA DE UNA SEÑAL.	73
8.1. Señales y Sistemas Banda Base.	73
8.2. Señales y Sistemas Paso Banda.	74

INDICE DE FIGURAS

Capítulo 1

Capítulo 2

- 2.1. La función de distribución conjunta es la probabilidad de que el resultado del experimento esté en la zona rayada. 7

Capítulo 3

- 3.1. Ejemplo gráfico de una señal aleatoria. 14
3.2. Sistema estimador de la media de un proceso estocástico. 27
3.3. Sistema estimador de la autocorrelación de un proceso estocástico. 27

Capítulo 4

- 4.1. Transmisión de una señal aleatoria a través de un sistema LTI. 29

Capítulo 5

- 5.1. Respuesta en amplitud del sistema $H(f)$. 37

Capítulo 6

- 6.1. Aspecto de la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza unidad. 46
6.2. La salida de un sistema LTI estable a una entrada Gaussiana es Gaussiana. 47

Capítulo 7

- 7.1. Diodo de vacío donde aparece el ruido tipo Shot. 53
7.2. Equivalente Thevenin de una resistencia ruidosa. 54
7.3. Equivalente Norton de una resistencia ruidosa. 55
7.4. Densidad espectral de potencia del ruido blanco. 55
7.5. Autocorrelación del ruido blanco. 56
7.6. Definición del ancho de banda equivalente de ruido para un sistema paso bajo. 57
7.7. Definición de ancho de banda equivalente de ruido para un sistema paso banda. 57
7.8. Ejemplo de ruido de banda estrecha en el dominio de la frecuencia. 58
7.9. Ejemplo de ruido de banda estrecha en el dominio del tiempo. 58
7.10. Densidad espectral de potencia del ruido paso banda, $S_N(f)$. 62
7.11. Densidad espectral de potencia de $S_N(f - f_c)$. 62
7.12. Densidad espectral de potencia de $S_N(f + f_c)$. 63
7.13. Función $1 - \text{sgn}(f - f_c)$. 63
7.14. Función $1 + \text{sgn}(f + f_c)$. 63
7.15. Para el cálculo de la probabilidad de estar en la zona rayada para N_c y N_s . 66
7.16. Para el cálculo de la probabilidad de estar en la zona rayada para R y Ψ . 66
7.17. Función densidad de probabilidad de una variable aleatoria Rayleigh. 68

7.18. Función densidad de probabilidad de una variable aleatoria Rician.	70
Capítulo 8	
8.1. Criterios de ancho de banda para una señal banda base.	74
8.2. Criterios de ancho de banda para una señal paso banda.	76

PROBABILIDAD.

Además de las señales determinísticas, otro tipo de señales que siempre aparecen en los sistemas de comunicaciones son las **señales aleatorias**. La señal de información, una interferencia en el canal o el ruido en un receptor son tres ejemplos de señales aleatorias. La señal de información tiene pulsos de voz de duración aleatoria y posición aleatoria. La señal interferente será debida a la presencia cercana de otros sistemas de comunicaciones. La señal de ruido en el receptor será debida al ruido térmico en resistencias y componentes del receptor.

Por lo tanto la señal recibida va ser una señal con varias componentes aleatorias. Aunque no es posible describir este tipo de señales con una expresión matemática, se pueden utilizar sus **propiedades estadísticas**. La disciplina matemática que trata de las medidas estadísticas se denomina **teoría de la probabilidad**.

Una forma de aproximarse a la noción de probabilidad es a través del fenómeno de **regularidad estadística**. Hay muchas situaciones en la naturaleza en las que podemos predecir lo que va a ocurrir a partir de la experiencia previa en términos promediados, pero no de forma exacta. Cuando la situación se repite muchas veces podemos determinar un patrón de resultados. Para ello se puede proceder como sigue:

1. Prescripción de un experimento básico.
2. Especificar todos los posibles resultados de ese experimento.
3. Repetir el experimento un número muy grande de veces, n , bajo condiciones idénticas y observar los resultados.

Si considero uno de los posibles resultados del experimento, el **evento** A . Supongamos que en n intentos, el evento A ocurre n_A veces. Al evento A se le puede asignar un número no negativo denominado **probabilidad de ocurrencia** dado por la ecuación (1.1).

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_A}{n} \right) \quad (1.1)$$

El **evento cierto** es aquel para el que $n_A = n$. La probabilidad del evento cierto es la unidad. El **evento imposible** es aquel para el que $n_A = 0$. La probabilidad del evento imposible es cero. Por lo tanto la probabilidad de ocurrencia cumple la ecuación (1.2).

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (1.2)$$

Consideremos un experimento básico con N posibles resultados $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_N$ que son **mutuamente exclusivos**. La probabilidad de todos los eventos A_k cumple la ecuación (1.3).

$$\sum_{k=1}^N P(A_k) = 1 \quad (1.3)$$

En la práctica nos debemos ocupar del resultado de varios experimentos básicos. Por lo tanto hay que extender la definición de probabilidad a **probabilidad conjunta** de dos o más eventos. Hacemos un experimento y queremos examinar la ocurrencia del par de eventos A y B en ese orden.

Sea n_{AB} el número de veces que aparece el **evento conjunto** (A, B) de un total de n intentos. La probabilidad conjunta de A y B viene dada por la ecuación (1.4).

$$P(A, B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_{AB}}{n} \right) \quad (1.4)$$

Si en n intentos A ocurre n_A veces y B n_B veces, debido a que el evento conjunto (A, B) es primero A y luego B, se sigue que n_A debe incluir n_{AB} . Es decir se cumple la ecuación (1.5).

$$0 \leq \frac{n_{AB}}{n_A} \leq 1 \quad (1.5)$$

La relación $\frac{n_{AB}}{n_A}$ representa la frecuencia relativa de ocurrencia del evento B dado que haya ocurrido A. Para n grande $\frac{n_{AB}}{n_A}$ define la probabilidad de que ocurra B dado que haya ocurrido A. Esto se denomina **probabilidad condicional** y viene dada por la ecuación (1.6).

$$P(B/A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_A}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_A} \right) \quad (1.6)$$

A partir de la ecuación (1.6) se pueden deducir las expresiones de la ecuación (1.7). Por lo tanto la probabilidad conjunta de dos eventos se puede expresar como el producto de la probabilidad condicional de un evento dada la ocurrencia del otro por la probabilidad de que ocurra este último.

$$\begin{aligned} P(B/A) &= \frac{P(A, B)}{P(A)} \\ P(A, B) &= P(B/A)P(A) \\ P(A, B) &= P(A/B)P(B) \end{aligned} \quad (1.7)$$

De las expresiones de la ecuación (1.7) se puede llegar a la ecuación (1.8) que se denomina **teorema de Bayes** y que nos va a permitir calcular $P(B/A)$ sabiendo $P(A)$, $P(B)$ y $P(A/B)$.

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)} \quad (1.8)$$

Si la probabilidad de que ocurra B condicionado a que haya ocurrido A es igual a la probabilidad de que ocurra B, es decir si se cumple la ecuación (1.9), se sigue que la probabilidad conjunta de que ocurra (A, B) es igual al producto de probabilidades de A y B, se cumple la ecuación (1.10). En este caso también se cumple que la probabilidad de que ocurra A condicionado a que haya ocurrido B es igual a la probabilidad

de A , según la ecuación (1.11). La ocurrencia de un evento no nos dice nada sobre la ocurrencia del otro. Se dice entonces que los eventos A y B son **estadísticamente independientes**.

$$P(B/A) = P(B) \quad (1.9)$$

$$P(A, B) = P(A)P(B) \quad (1.10)$$

$$P(A/B) = P(A) \quad (1.11)$$

VARIABLES ALEATORIAS.

2.1 UNA VARIABLE ALEATORIA.

Es conveniente asociar a un experimento un espacio y a los posibles resultados puntos de ese espacio. A cada resultado básico se le puede asociar un punto denominado **punto muestra**, denotado por s . La totalidad de los puntos muestra, $\{s\}$, que corresponde a la agregación de todos los posibles resultados del experimento se denomina **espacio muestra** y se denota por S . Un evento corresponde a un punto del espacio o un conjunto de puntos.

Es útil utilizando el espacio muestra, pensar en el resultado de un experimento como una **variable aleatoria** que puede tomar cualquier valor del espacio muestra que va a ser determinado por el experimento. Una función cuyo dominio de definición es un espacio muestra y cuyo rango es los números reales se denomina variable aleatoria del experimento. Cuando el resultado de un experimento es s , la variable aleatoria se denota por $X(s)$ o simplemente X .

Se denomina **variable aleatoria discreta** como aquella variable aleatoria que puede tomar únicamente un número contable de números reales. Si la variable aleatoria puede tomar cualquier valor de un intervalo es una **variable aleatoria continua**.

Hace falta una descripción probabilística de las variables aleatorias que funcione tanto para variables aleatorias discretas como para continuas. Sea la variable aleatoria X y consideremos la probabilidad del evento $X \leq x$, es decir, $P(X \leq x)$. Esto puede hacerse una función de la variable x según la ecuación (2.1). Esta función se denomina **función de distribución acumulativa** o **función de distribución** de la variable X .

$$F_X(x) = P(X \leq x) \tag{2.1}$$

La función de distribución es una función de la variable independiente x no de la variable aleatoria X . Sin embargo, depende de qué variable aleatoria se esté considerando y por ello se pone X como subíndice. Para cada valor de x , $F_X(x)$ expresa una probabilidad. Esta función tiene las siguientes propiedades que se deducen directamente:

1. La función de distribución $F_X(x)$ está acotada entre 0 y 1.
2. La función de distribución $F_X(x)$ es monótona no decreciente en x , es decir se cumple la ecuación (2.2).

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \quad \text{si } x_1 < x_2 \tag{2.2}$$

Una función alternativa que define la variable aleatoria es la derivada de la función de distribución que se denomina **función densidad de probabilidad** y viene dada por la ecuación (2.3).

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.3)$$

Integrando la expresión (2.3) se puede calcular la función de distribución a partir de la función densidad de probabilidad según la ecuación (2.4).

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

El nombre de densidad de probabilidad viene del hecho de que la probabilidad del evento $x_1 < X \leq x_2$ sea la de la ecuación (2.5).

$$\begin{aligned} P(x_1 < X \leq x_2) &= P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F_X(x_2) - F_X(x_1) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f_X(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ya que resulta que $F_X(\infty) = 1$ corresponde a la probabilidad del evento cierto y $F_X(-\infty) = 0$ con la del evento imposible, se sigue la ecuación (2.6).

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\xi) d\xi = 1 \quad (2.6)$$

Debido a que $F_X(x)$ es monótona no decreciente su derivada es siempre mayor o igual que cero. Una función densidad de probabilidad es una función no negativa cuya área debajo de su curva es unidad.

2.2 VARIAS VARIABLES ALEATORIAS.

A menudo el resultado del experimento requiere es uso de varias variables aleatorias. Consideremos el caso de dos variables aleatorias. Después se podría extender a cualquier número de variables aleatorias.

Consideremos las variables aleatorias X e Y . Se define la **función de distribución conjunta** $F_{X,Y}(x, y)$ como la probabilidad de que la variable aleatoria X sea menor o igual que x y que la variable aleatoria Y sea menor o igual que y . Las variables aleatorias X e Y pueden ser dos variables aleatorias de una dimensión separadas o las componentes de una variable aleatoria de dos dimensiones. En cualquier caso, el dominio de definición es el plano $x - y$. La función de distribución $F_{X,Y}(x, y)$ es la probabilidad de que el resultado del experimento esté en el cuadrante rayado que puede verse en la figura 2.1. La función de distribución conjunta viene dada por la ecuación (2.7).

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (2.7)$$

La función de distribución conjunta al venir definida a partir de la probabilidad conjunta su valor va a estar comprendido entre 0 y 1. Además resulta que $F_{X,Y}(-\infty, -\infty) = 0$ pues es el evento conjunto imposible

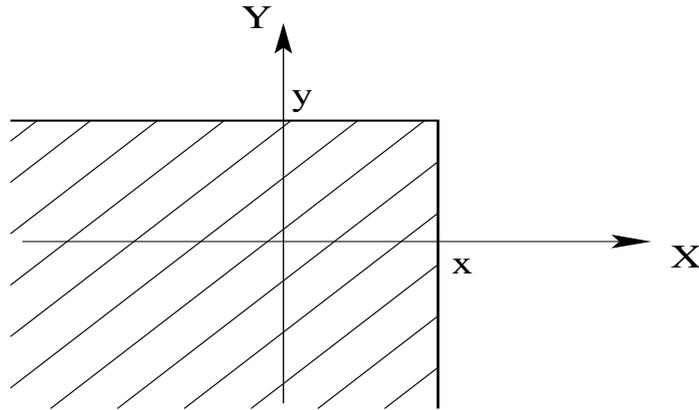


Figura 2.1 La función de distribución conjunta es la probabilidad de que el resultado del experimento esté en la zona rayada.

y $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$ pues es el evento conjunto seguro. Además es una función definida no negativa en ambas variables, es decir, se cumple la ecuación (2.8).

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x_1, y) &\leq F_{X,Y}(x_2, y) && \text{si } x_1 < x_2 \\ F_{X,Y}(x, y_1) &\leq F_{X,Y}(x, y_2) && \text{si } y_1 < y_2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Se define la **función densidad de probabilidad conjunta** de X e Y por la ecuación (2.9).

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} \tag{2.9}$$

Integrando la ecuación (2.9) respecto a ambas variables se tendrá la ecuación (2.10) que permite calcular la función de distribución conjunta a partir de la función densidad de probabilidad conjunta.

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{2.10}$$

Puesto que la función de distribución conjunta era definida no negativa en ambas variables se cumple que $f_{X,Y}(x, y) \geq 0 \quad \forall x$ y $\forall y$. Además como $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$ por la ecuación (2.10) se cumple la ecuación (2.11), es decir el volumen total debajo de la curva de la función densidad de probabilidad conjunta es unidad.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\xi, \eta) d\xi d\eta = 1 \tag{2.11}$$

A partir de la función densidad de probabilidad conjunta se puede calcular la probabilidad de que la variable X esté comprendida entre x_1 y x_2 y la variable Y entre y_1 e y_2 usando la ecuación (2.12).

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{X,Y}(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{2.12}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.13) y derivando la primera expresión respecto a x y la segunda respecto a y se obtiene las expresiones de la ecuación (2.14).

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, \eta) d\eta \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\xi, y) d\xi \end{aligned} \quad (2.14)$$

Las funciones $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ de la ecuación (2.14) se denominan **densidades marginales**. La función densidad de probabilidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ contiene toda la información estadística sobre las variables X e Y , sin embargo las marginales no.

Se define la función **densidad de probabilidad condicional** de la variable Y sabiendo que la variable X ha tomado el valor x por la ecuación (2.15).

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} \quad (2.15)$$

También se puede definir la función densidad de probabilidad de X condicionado a Y según la ecuación (2.16).

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \quad (2.16)$$

La función densidad de probabilidad condicional $f_{Y/X}(y/x)$ es una función de una variable independiente que es y , sin embargo depende del valor de x que se considera como una constante.

Las funciones densidad de probabilidad condicional cumplen las propiedades típicas de toda función densidad de probabilidad. Por ejemplo para $f_{Y/X}(y/x)$ se cumple la ecuación (2.17).

$$\begin{aligned} f_{Y/X}(y/x) &\geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y/X}(\eta/x) d\eta &= 1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

A partir de las ecuaciones (2.15) y (2.16) despejando la función densidad de probabilidad conjunta e igualando se llega a la ecuación (2.18) que es otra forma del teorema de Bayes, en este caso para funciones densidad de probabilidad.

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{X/Y}(x/y)f_Y(y)}{f_X(x)} \quad (2.18)$$

Si las variables aleatorias X e Y son **estadísticamente independientes**, el conocer el resultado de la variable X no afecta al resultado de la variable Y ni a su distribución estadística. Como resultado de esto se cumple la ecuación (2.19).

$$\begin{aligned} f_{Y/X}(y/x) &= f_Y(y) \\ f_{X/Y}(x/y) &= f_X(x) \end{aligned} \quad (2.19)$$

En este caso la función densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X e Y se puede poner como el producto de las densidades marginales, según la ecuación (2.20).

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (2.20)$$

2.3 MEDIAS ESTADÍSTICAS PARA UNA VARIABLE ALEATORIA.

Se define el **operador esperanza matemática** para una función de variable aleatoria $g(X)$ por la ecuación (2.21). Es un operador lineal.

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx \quad (2.21)$$

Se define el **momento de orden n** de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X por la ecuación (2.22).

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx \quad (2.22)$$

Los momentos más importantes son los dos primeros. Cuando $n = 1$ se tiene el **valor medio**, **media** o **valor esperado** de una variable aleatoria X que viene dado por la ecuación (2.23). La media se puede entender gráficamente como el centro de gravedad de la función densidad de probabilidad.

$$m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \quad (2.23)$$

En el caso de que $n = 2$ tenemos el valor cuadrático medio de la variable aleatoria X dado por la ecuación (2.24).

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx \quad (2.24)$$

Se define el **momento centrado de orden** n de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X por la ecuación (2.25).

$$E[(X - m_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^n f_X(x) dx \quad (2.25)$$

Para $n = 1$ el momento centrado es cero. El momento centrado más importante es cuando $n = 2$ que se denomina **varianza** de la variable aleatoria X y viene dada por la ecuación (2.26).

$$\sigma_X^2 = Var[X] = E[(X - m_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx \quad (2.26)$$

La raíz cuadrada de la varianza, σ_X , se denomina desviación estándar de la variable aleatoria X .

La varianza nos da una medida del ancho efectivo de la función densidad de probabilidad en torno a la media. La formulación precisa de esto es la **desigualdad de Chebyshev** que dice que para un número ϵ positivo tan pequeño como se quiera se cumple la ecuación (2.27).

$$P(|X - m_X| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\epsilon^2} \quad (2.27)$$

La media y la varianza nos dan una descripción de la distribución de la probabilidad.

La varianza y el valor cuadrático medio están relacionados según la ecuación (2.28).

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E[X^2 - 2m_X X + m_X^2] \\ &= E[X^2] - 2m_X E[X] + m_X^2 \\ &= E[X^2] - m_X^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Solo en el caso de que la media sea cero la varianza y el valor cuadrático medio coinciden, según la ecuación (2.29).

$$\sigma_X^2 = E[X^2] \iff m_X = 0 \quad (2.29)$$

2.4 MEDIAS ESTADÍSTICAS CONJUNTAS.

Consideremos las variables aleatorias X e Y . Se define el **momento conjunto** de orden j, k como el valor esperado de $X^j Y^k$ para j y k enteros, es decir, vendrá dado por la ecuación (2.30).

$$E[X^j Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^j y^k f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (2.30)$$

El más importante de los momentos conjuntos es el de orden 1, 1, que se denomina **correlación** y viene dado por la ecuación (2.31).

$$\text{Corr}[X, Y] = E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (2.31)$$

Se define el **momento conjunto centrado** de orden j, k como el momento conjunto de las variables centradas $X - m_X$ e $Y - m_Y$. Viene dado por la ecuación (2.32).

$$E[(X - m_X)^j (Y - m_Y)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^j (y - m_Y)^k f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (2.32)$$

El momento centrado más importante es el de orden 1, 1, que se denomina **covarianza** y viene dado por la ecuación (2.33).

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X, Y] &= E[(X - m_X)(Y - m_Y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)(y - m_Y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (2.33)$$

Desarrollando la ecuación (2.33) se llega a la ecuación (2.34) que nos da la relación entre la covarianza y correlación.

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X, Y] &= E[(X - m_X)(Y - m_Y)] \\ &= E[XY] - E[X]m_Y - m_X E[Y] + m_X m_Y \\ &= \text{Corr}[X, Y] - m_X m_Y \end{aligned} \quad (2.34)$$

Si alguna de las medias de X o Y son cero o ambas, la correlación y la covarianza son iguales.

Si σ_X^2 y σ_Y^2 son las varianzas de X e Y respectivamente, la covarianza normalizada a $\sigma_X \sigma_Y$ se denomina **coeficiente de correlación** y viene dado por la ecuación (2.35).

$$\rho = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.35)$$

Dos variables aleatorias son **incorreladas** si y solo si su covarianza es cero, se cumple la ecuación (2.36).

$$X \text{ e } Y \text{ incorreladas} \iff \text{Cov}[X, Y] = 0 \implies E[XY] = m_X m_Y \quad (2.36)$$

Se dice que dos variables aleatorias X e Y son **ortogonales** si y solo si su correlación es cero, se cumple la ecuación (2.37).

$$X \text{ e } Y \text{ ortogonales} \iff \text{Corr}[X, Y] = 0 \quad (2.37)$$

Se puede ver que si alguna de las medias de X o Y son cero o ambas, si X e Y son incorreladas son ortogonales y viceversa.

Si X e Y son estadísticamente independientes entonces son incorreladas, sin embargo si X e Y son incorreladas no tienen porque ser independientes. Por lo tanto la incorrelación es una condición necesaria para la independencia, pero no suficiente. Se tiene la ecuación (2.38).

$$\text{si } X \text{ e } Y \text{ son independientes} \implies \text{Cov}[X, Y] = 0 \quad (2.38)$$

SEÑALES ALEATORIAS.

3.1 DEFINICIÓN.

Es muy importante poder realizar un análisis estadístico de **señales aleatorias** como voz, televisión, señales digitales de datos, ruido eléctrico, etc.

Todas estas señales aleatorias tienen dos características:

1. Son funciones del tiempo definidas dentro de un intervalo de observación.
2. Son señales aleatorias en el sentido de que antes de realizar el experimento no es posible describir su forma exacta.

Al describir una señal aleatoria se puede ver que cada punto muestra del espacio muestra es una función del tiempo.

El espacio muestra o el conjunto total de las funciones posibles del tiempo se denomina **proceso estocástico** o **aleatorio**.

Si suponemos que tenemos definida una distribución de probabilidad sobre conjuntos del espacio muestra, se puede hablar de probabilidad de eventos. Según esto se define un proceso estocástico o una señal aleatoria como un conjunto de funciones del tiempo, junto con unas reglas de probabilidad que asignan una probabilidad a cualquier evento significativo asociado con la observación de una de esas funciones.

Un proceso estocástico se denota por $X(t)$ y representa una posible realización del conjunto de funciones muestra $\{x_j(t)\}$ para $j = 1, 2, \dots, n, \dots$. Consideremos el espacio muestra ejemplo que puede verse en la figura 3.1.

La señal $x_1(t)$ tiene una probabilidad de ocurrencia $P(s_1)$ y corresponde al punto muestra s_1 del espacio muestra S . Igual se puede decir del resto de funciones $x_2(t), \dots, x_n(t), \dots$. El conjunto de todas las funciones con sus probabilidades asociadas representa la señal aleatoria. Si ahora observamos el valor para cada posible resultado del experimento en el instante $t = t_1$, se tiene $\{x_j(t_1)\}$ para $j = 1, 2, \dots, n, \dots$. Debido a que cada punto muestra s_j del espacio muestra S en t_1 tiene asociado el número $x_j(t_1)$ con probabilidad $P(s_j)$, el conjunto de números $\{x_j(t_1)\}$ para $j = 1, 2, \dots, n, \dots$ es una variable aleatoria. Esta variable aleatoria se denota por $X(t_1)$. Si ahora fijamos otro instante de tiempo $t = t_2$, se obtendrá otro conjunto de puntos y por lo tanto otra variable aleatoria $X(t_2)$. El conjunto de puntos en este caso $\{x_j(t_2)\}$ tiene las mismas probabilidades que antes $P(s_j)$, lo que cambia es el conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria, que van a ser distintos.

Para cada instante fijado, el proceso estocástico $X(t)$ define una variable aleatoria. Una vez realizado el proceso estocástico lo que se tiene es una función determinística del tiempo y por lo tanto conocida. Por

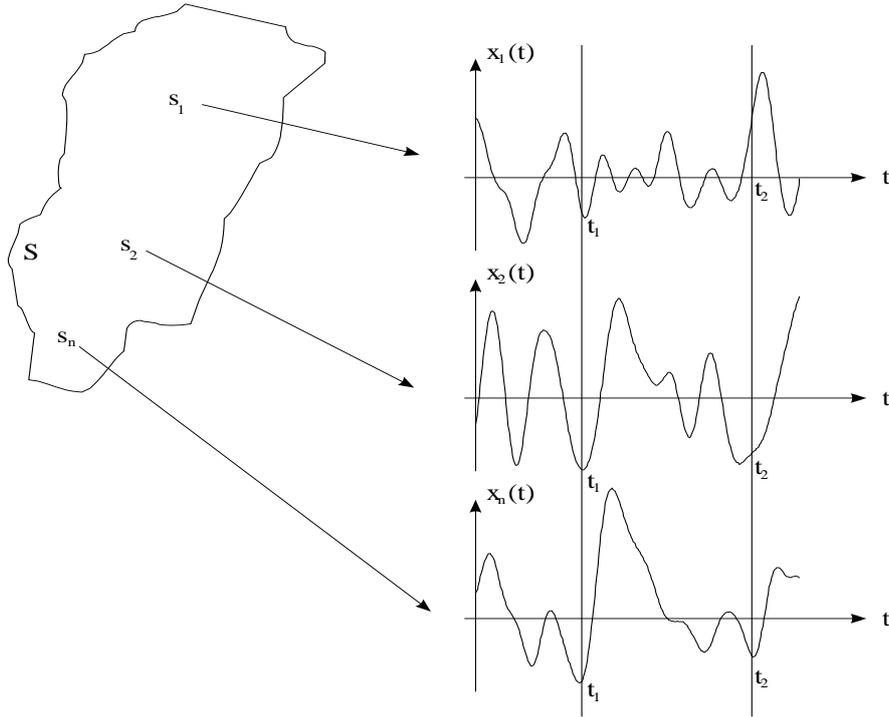


Figura 3.1 Ejemplo gráfico de una señal aleatoria.

ejemplo si tras la realización del proceso estocástica a ocurrido s_k , lo que se tiene es la función del tiempo $x_k(t)$.

En el caso de una variable aleatoria el resultado del experimento era un número real, mientras que en el caso de un proceso estocástico el resultado del experimento es una función del tiempo.

Por definición un proceso estocástico $X(t)$ implica la existencia de **infinitas variables aleatorias no contables** para cada instante del tiempo fijado t en el intervalo $-\infty < t < \infty$.

Se va a poder hablar de función de distribución de la variable aleatoria $X(t_1)$ obtenida a partir del proceso estocástico $X(t)$ fijando $t = t_1$ según la ecuación (3.1).

$$F_{X(t_1)}(x_1) = P(X(t_1) \leq x_1) \quad (3.1)$$

De forma más general, para k instantes de tiempo elegidos t_1, t_2, \dots, t_k se definen k variables aleatorias $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$ del proceso estocástico $X(t)$. Se puede ahora definir la función de distribución conjunta de esas k variables aleatorias según la ecuación (3.2). Como toda función de distribución su valor está comprendido entre 0 y 1 y es una función monótona no decreciente en cada una de las k dimensiones.

$$F_{X(t_1), \dots, X(t_k)}(x_1, \dots, x_k) = P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_k) \leq x_k) \quad (3.2)$$

Por conveniencia se puede utilizar notación matricial. Siguiendo el convenio de utilizar negrita para matrices y vectores, si se define el vector de k variables aleatorias $\mathbf{X}(t)$ definido por la ecuación (3.3) y el vector de k variables independientes \mathbf{x} definido por la ecuación (3.4), la función de distribución dada por la ecuación (3.2) se puede poner de forma simplificada como $F_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x})$.

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_k) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Para cada punto muestra particular s_j las componentes del vector $\mathbf{X}(t)$ representan los valores de la función $x_j(t)$ en los instantes t_1, t_2, \dots, t_k . La función de distribución conjunta $F_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x})$ depende del proceso aleatorio $X(t)$ y del conjunto de instantes $\{t_j\}$ para $j = 1, 2, \dots, k$.

También se puede definir la función densidad de probabilidad conjunta de $\mathbf{X}(t)$ según la ecuación (3.5). Como toda función densidad de probabilidad su valor es mayor o igual que 0 y tiene volumen k -dimensional unidad.

$$f_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} F_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

3.2 ESTACIONARIEDAD.

Consideremos el conjunto de instantes t_1, t_2, \dots, t_k y el proceso estocástico $X(t)$. Una caracterización completa del proceso estocástico $X(t)$ nos permitiría conocer la función densidad de probabilidad conjunta $f_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x})$. El proceso estocástico $X(t)$ se dice que es **estacionario en sentido estricto** o **estrictamente estacionario** si la función densidad de probabilidad conjunta es invariante bajo desplazamientos del origen de tiempos, se decir, se cumple la ecuación (3.6) para cualquier conjunto finito de instantes $\{t_j\}$ con $j = 1, 2, \dots, k$ y para cualquier desplazamiento temporal T .

$$f_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{X}(t+T)}(\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

El vector aleatorio $\mathbf{X}(t)$ se obtiene observando el proceso estocástico $X(t)$ en los instantes de tiempo t_1, t_2, \dots, t_k . De forma análoga el vector $\mathbf{X}(t+T)$ se obtiene observando el proceso estocástico $X(t)$ en los instantes de tiempo $t_1 + T, t_2 + T, \dots, t_k + T$.

Los procesos estocásticos estacionarios son de mucha importancia por dos razones:

1. Se encuentra muy a menudo en la práctica de forma exacta o aproximada. En general no es necesario que el proceso estocástico sea estacionario en todo el intervalo $-\infty < t < \infty$ sino solo en el intervalo particular de observación.

2. Muchas propiedades importantes de los procesos estocásticos se encuentran a partir de sus momentos de orden 1 y 2. Por lo tanto es muy fácil desarrollar una teoría simple pero muy útil para este tipo de procesos.

Los procesos estocásticos que no cumple la ecuación (3.6) para cualquier conjunto finito de instantes $\{t_j\}$ con $j = 1, 2, \dots, k$ y para cualquier desplazamiento temporal T , se dicen que son **no estacionarios**.

3.3 MEDIA, CORRELACIÓN Y COVARIANZA.

En muchos casos no es posible determinar la distribución de probabilidad de un proceso estocástico. Nos debemos conformar con una **descripción parcial** de la distribución del proceso. La media, correlación y covarianza nos van a dar una descripción a grosso modo de nuestro proceso estocástico.

Sea un proceso estocástico real $X(t)$. Se define la **media** como la función determinística del tiempo dada por la ecuación (3.7), donde E es el operador esperanza matemática y $X(t_k)$ es la variable aleatoria obtenida observando el proceso $X(t)$ en $t = t_k$.

$$m_X(t_k) = E[X(t_k)] \quad (3.7)$$

Si la función densidad de probabilidad de $X(t_k)$ es $f_{X(t_k)}(x)$ la media se puede calcular según la ecuación (3.8).

$$m_X(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t_k)}(x) dx \quad (3.8)$$

Se define la **autocorrelación** del proceso $X(t)$ como una función de dos variables temporales t_k y t_i dada por la ecuación (3.9).

$$R_X(t_k, t_i) = E[X(t_k)X(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X(t_k), X(t_i)}(x, y) dx dy \quad (3.9)$$

En el caso de que $t_k = t_i$ se tiene el **valor cuadrático medio** del proceso estocástico que es una función de una variable temporal como puede verse en la ecuación (3.10).

$$R_X(t_k, t_k) = E[X^2(t_k)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X(t_k)}(x) dx \quad (3.10)$$

Se define la **autocovarianza** del proceso $X(t)$ como una función de dos variables temporales t_k y t_i dada por la ecuación (3.11).

$$\begin{aligned} K_X(t_k, t_i) &= E[(X(t_k) - m_X(t_k))(X(t_i) - m_X(t_i))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X(t_k))(y - m_X(t_i)) f_{X(t_k), X(t_i)}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (3.11)$$

En el caso de que $t_k = t_i$ se tiene la **varianza** del proceso estocástico que es una función de una variable temporal como puede verse en la ecuación (3.12).

$$\begin{aligned} \text{Var}[X(t_k)] &= \sigma_X^2(t_k) = K_X(t_k, t_k) \\ &= E[(X(t_k) - m_X(t_k))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X(t_k))^2 f_{X(t_k)}(x) dx \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se puede deducir de las ecuaciones (3.9) y (3.11) una relación útil dada por la ecuación (3.13).

$$K_X(t_k, t_i) = R_X(t_k, t_i) - m_X(t_k)m_X(t_i) \quad (3.13)$$

En el caso de que la media del proceso estocástico sea siempre cero, la función de autocorrelación y la de autocovarianza coincidirán.

Además de las ecuaciones (3.10) y (3.12) se puede deducir otra relación útil dada por la ecuación (3.14).

$$\sigma_X^2(t_k) = E[X^2(t_k)] - m_X^2(t_k) \quad (3.14)$$

En el caso de que la media del proceso estocástico sea siempre cero, la varianza y el valor cuadrático medio coincidirán.

Para procesos estocásticos estacionarios en sentido estricto, las expresiones anteriores toman formas simplificadas. La media no depende del instante de tiempo considerado, sino que es constante, según la ecuación (3.15).

$$m_X(t_k) = m_X \quad \forall t_k \quad (3.15)$$

La autocorrelación depende solo de la diferencia de tiempos $\tau = t_k - t_i$ según la ecuación (3.16).

$$R_X(t_k, t_i) = R_X(t_k - t_i) = R_X(\tau) \quad (3.16)$$

Igual ocurre con la autocovarianza que solo depende de la diferencia de tiempos $\tau = t_k - t_i$ según la ecuación (3.17).

$$K_X(t_k, t_i) = K_X(t_k - t_i) = K_X(\tau) \quad (3.17)$$

Las tres condiciones anteriores son necesarias pero no suficientes para que un proceso estocástico sea estacionario en sentido estricto. Para un proceso que cumpla lo anterior y que no sea estacionario en sentido estricto se dice que es **estacionario en sentido amplio**. La estacionariedad en sentido amplio es una condición más débil que la estacionariedad en sentido estricto. Todo proceso estacionario en sentido estricto lo es también en sentido amplio pero no al revés.

Entonces en el caso estacionario la autocorrelación se puede calcular utilizando la ecuación (3.18), mientras que la autocovarianza usando la ecuación (3.19).

$$R_X(\tau) = E[X(t+\tau)X(t)] = E[X(t)X(t-\tau)] \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} K_X(\tau) &= E[(X(t+\tau) - m_X)(X(t) - m_X)] \\ &= E[(X(t) - m_X)(X(t-\tau) - m_X)] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Se puede deducir de las ecuaciones (3.18) y (3.19) una relación útil dada por la ecuación (3.20).

$$K_X(\tau) = R_X(\tau) - m_X^2 \quad (3.20)$$

En el caso de que la media del proceso estocástico sea cero, la función de autocorrelación y la de autocovarianza coincidirán.

Particularizando la ecuación (3.20) en el origen se obtiene la ecuación (3.21).

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - m_X^2 \quad (3.21)$$

En el caso de que la media del proceso estocástico sea cero, la varianza y el valor cuadrático medio coincidirán.

La función de autocorrelación en el caso de estacionariedad en sentido amplio tiene las siguientes propiedades:

1. El valor cuadrático medio del proceso estocástico es una constante que no depende del instante considerado y se puede obtener a partir del valor de la autocorrelación en el origen según la ecuación (3.22). Es equivalente a la potencia media de la señal.

$$R_X(0) = E[X^2] \quad \text{no depende del tiempo} \quad (3.22)$$

2. La autocorrelación es una función par de τ según la ecuación (3.23).

$$R_X(\tau) = R_X(-\tau) \quad (3.23)$$

3. La autocorrelación está acotada por el valor en el origen, según la ecuación (3.24).

$$R_X(0) \geq |R_X(\tau)| \quad (3.24)$$

La función de autocovarianza en el caso de estacionariedad en sentido amplio tiene las siguientes propiedades:

1. La varianza del proceso estocástico es una constante que no depende del instante considerado y se puede obtener a partir del valor de la autocovarianza en el origen según la ecuación (3.25). Es equivalente a la **potencia media ac** de la señal.

$$K_X(0) = \sigma_X^2 \quad \text{no depende del tiempo} \quad (3.25)$$

2. La autocovarianza es una función par de τ según la ecuación (3.26).

$$K_X(\tau) = K_X(-\tau) \quad (3.26)$$

3. La autocovarianza está acotada por el valor en el origen, según la ecuación (3.27).

$$K_X(0) \geq |K_X(\tau)| \quad (3.27)$$

El significado físico de la autocovarianza nos da la interdependencia de dos variables aleatorias obtenidas a partir de un proceso estocástico $X(t)$ en dos instantes de tiempo separados τ . Si el proceso estocástico $X(t)$ cambia muy rápidamente con el tiempo, más rápidamente decrece la función de autocovarianza a partir del máximo $K_X(0)$. En el caso de que el proceso cambie lentamente, la autocorrelación decrece más lentamente.

El tiempo de descenso se caracteriza por τ_0 o **tiempo de correlación**. Se define para un proceso estacionario en sentido amplio $X(t)$ como el tiempo que pasa hasta que el valor de la autocovarianza $K_X(\tau)$ tiene un valor no mayor del 1% de su valor máximo $K_X(0)$.

Sean dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ cuyas funciones de autocorrelación son $R_X(t, u)$ y $R_Y(t, u)$ respectivamente. Se definen las funciones de **correlación cruzada** de $X(t)$ e $Y(t)$ según las ecuaciones (3.28) y (3.29).

$$R_{XY}(t, u) = E[X(t)Y(u)] \quad (3.28)$$

$$R_{YX}(t, u) = E[Y(t)X(u)] \quad (3.29)$$

En el caso de que $t = u$ las dos funciones de correlación cruzada coinciden y son igual a la correlación de los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ que depende del instante de tiempo considerado según la ecuación (3.30).

$$R_{XY}(t, t) = R_{YX}(t, t) = \text{Corr}[X(t), Y(t)] = E[X(t)Y(t)] \quad (3.30)$$

Todas las propiedades de correlación se pueden colocar de forma matricial según la ecuación (3.31). Dicha matriz se denomina **matriz de correlación** de los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ y es una matriz de funciones de dos dimensiones temporales.

$$\mathbf{R}(t, u) = \begin{bmatrix} R_X(t, u) & R_{XY}(t, u) \\ R_{YX}(t, u) & R_Y(t, u) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

En el caso de que $t = u$ la matriz de correlación tiene la expresión de la ecuación (3.32). En este caso es una matriz de funciones de una variable temporal y es simétrica.

$$\mathbf{R}(t, t) = \begin{bmatrix} E[X^2(t)] & \text{Corr}[X(t), Y(t)] \\ \text{Corr}[X(t), Y(t)] & E[Y^2(t)] \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Si la matriz de correlación puede ponerse en función de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$ la ecuación (3.31) pasa a ser la ecuación (3.33), es una matriz de funciones de una variable temporal.

$$\mathbf{R}(\tau) = \begin{bmatrix} R_X(\tau) & R_{XY}(\tau) \\ R_{YX}(\tau) & R_Y(\tau) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

En este caso $X(t)$ e $Y(t)$ son estacionarios en sentido amplio, probado que la media sea constante, puesto que las funciones de autocorrelación dependen de τ . Además resulta que las funciones de correlación cruzada dependen solo de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$. En este caso se dice que los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son **estacionarios en sentido amplio de forma conjunta**.

La matriz de correlación de la ecuación (3.33) particularizada en el origen tiene la expresión de la ecuación (3.34) que es una matriz de constantes y simétrica. Esta matriz es la versión estacionaria de la ecuación (3.32).

$$\mathbf{R}(0) = \begin{bmatrix} E[X^2] & \text{Corr}[X, Y] \\ \text{Corr}[X, Y] & E[Y^2] \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

La función de correlación cruzada en el caso estacionario cumple las siguientes propiedades:

1. Se cumple la ecuación (3.35).

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \quad (3.35)$$

2. El valor en el origen de la correlación cruzada es igual a la correlación que para el caso estacionario es una constante, según la ecuación (3.36).

$$R_{XY}(0) = R_{YX}(0) = \text{Corr}[X, Y] \quad \text{no depende del tiempo} \quad (3.36)$$

Sean dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ cuyas funciones de autocovarianza son $K_X(t, u)$ y $K_Y(t, u)$ respectivamente. Se definen las funciones de **covarianza cruzada** de $X(t)$ e $Y(t)$ según las ecuaciones (3.37) y (3.38).

$$K_{XY}(t, u) = E[(X(t) - m_X(t))(Y(u) - m_Y(u))] \quad (3.37)$$

$$K_{YX}(t, u) = E[(Y(t) - m_Y(t))(X(u) - m_X(u))] \quad (3.38)$$

En el caso de que $t = u$ las dos funciones de covarianza cruzada coinciden y son igual a la covarianza de los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ que depende del instante de tiempo considerado según la ecuación (3.39).

$$\begin{aligned} K_{XY}(t, t) &= K_{YX}(t, t) = Cov[X(t), Y(t)] \\ &= E[(X(t) - m_X(t))(Y(t) - m_Y(t))] \end{aligned} \quad (3.39)$$

Todas las propiedades de covarianza se pueden colocar de forma matricial según la ecuación (3.40). Dicha matriz se denomina **matriz de covarianza** de los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ y es una matriz de funciones de dos dimensiones temporales.

$$\mathbf{K}(t, u) = \begin{bmatrix} K_X(t, u) & K_{XY}(t, u) \\ K_{YX}(t, u) & K_Y(t, u) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

En el caso de que $t = u$ la matriz de covarianza tiene la expresión de la ecuación (3.41). En este caso es una matriz de funciones de una variable temporal y es simétrica.

$$\mathbf{K}(t, t) = \begin{bmatrix} \sigma_X^2(t) & Cov[X(t), Y(t)] \\ Cov[X(t), Y(t)] & \sigma_Y^2(t) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Si la matriz de covarianza puede ponerse en función de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$ la ecuación (3.40) pasa a ser la ecuación (3.42), es una matriz de funciones de una variable temporal.

$$\mathbf{K}(\tau) = \begin{bmatrix} K_X(\tau) & K_{XY}(\tau) \\ K_{YX}(\tau) & K_Y(\tau) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

En este caso $X(t)$ e $Y(t)$ son estacionarios en sentido amplio, probado que la media sea constante, puesto que las funciones de autocovarianza dependen de τ . Además resulta que las funciones de covarianza cruzada dependen solo de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$, se decir, los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son estacionarios en sentido amplio de forma conjunta.

La matriz de covarianza de la ecuación (3.42) particularizada en el origen tiene la expresión de la ecuación (3.43) que es una matriz de constantes y simétrica. Esta matriz es la versión estacionaria de la ecuación (3.41).

$$\mathbf{K}(0) = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & Cov[X, Y] \\ Cov[X, Y] & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

La función de covarianza cruzada en el caso estacionario cumple las siguientes propiedades:

1. Se cumple la ecuación (3.44).

$$K_{XY}(\tau) = K_{YX}(-\tau) \quad (3.44)$$

2. El valor en el origen de la covarianza cruzada es igual a la covarianza que para el caso estacionario es una constante, según la ecuación (3.45).

$$K_{XY}(0) = K_{YX}(0) = Cov[X, Y] \quad \text{no depende del tiempo} \quad (3.45)$$

La relación entre la covarianza cruzada y la correlación cruzada para dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ puede verse en las ecuaciones (3.46) y (3.47).

$$K_{XY}(t, u) = R_{XY}(t, u) - m_X(t)m_Y(u) \quad (3.46)$$

$$K_{YX}(t, u) = R_{YX}(t, u) - m_Y(t)m_X(u) \quad (3.47)$$

En el caso de que algunas de las medias o las dos sean siempre cero la covarianza cruzada y la correlación cruzada coinciden.

Las ecuaciones (3.46) y (3.47) particularizadas para el caso en que $t = u$ dan como resultado la ecuación (3.48).

$$Cov[X(t), Y(t)] = Corr[X(t), Y(t)] - m_X(t)m_Y(t) \quad (3.48)$$

En el caso de que alguna de las medias o las dos sean siempre cero la covarianza y la correlación coinciden.

En el caso estacionario en sentido amplio la relación entre la covarianza cruzada y la correlación cruzada puede verse en las ecuaciones (3.49) y (3.50).

$$K_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - m_X m_Y \quad (3.49)$$

$$K_{YX}(\tau) = R_{YX}(\tau) - m_Y m_X \quad (3.50)$$

En el caso de que algunas de las medias o las dos sean cero la covarianza cruzada y la correlación cruzada coinciden.

Las ecuaciones (3.49) y (3.50) particularizadas en el origen dan como resultado la ecuación (3.51).

$$Cov[X, Y] = Corr[X, Y] - m_X m_Y \quad (3.51)$$

En el caso de que alguna de las medias o las dos sean cero la covarianza y la correlación coinciden.

También puede ponerse una expresión que relación la matriz de covarianza y la matriz de correlación según la ecuación (3.52).

$$\mathbf{K}(t, u) = \mathbf{R}(t, u) - \begin{bmatrix} m_X(t)m_X(u) & m_X(t)m_Y(u) \\ m_Y(t)m_X(u) & m_Y(t)m_Y(u) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

La ecuación (3.52) en el caso estacionario es la ecuación (3.53).

$$\mathbf{K}(\tau) = \mathbf{R}(\tau) - \begin{bmatrix} m_X^2 & m_X m_Y \\ m_Y m_X & m_Y^2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

En el caso de que alguna de las medias o las dos sean siempre cero la matriz de correlación y la matriz de covarianza serán iguales.

3.4 MEDIA TEMPORAL Y ERGODICIDAD.

Para que la teoría de los procesos estocásticos será útil como método para describir los sistemas de comunicaciones, debemos ser capaces de estimar de la observación de un proceso estocástico $X(t)$ su media y su función de autocorrelación o autocovarianza.

Para calcular la media y la autocorrelación, debemos promediar todas las funciones del espacio muestra. En concreto para poder hacer esto necesitamos conocer las funciones densidad de probabilidad conjunta de primer y segundo orden. En la práctica esto no se suele conocer. Lo único de que se dispone es una de las señales muestra almacenada. Parece lógico que consideremos las medias temporales de una única función muestra.

Se define el **valor medio temporal** de la función muestra $x(t)$ del proceso estocástico $X(t)$ según la ecuación (3.54).

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (3.54)$$

De igual modo se define la **autocorrelación temporal** de la función muestra $x(t)$ del proceso $X(t)$ según la ecuación (3.55).

$$\begin{aligned} \langle x(t + \tau), x(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x(t) dt = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t - \tau) dt \end{aligned} \quad (3.55)$$

Hay que tener en cuenta que $\langle x(t) \rangle$ es una variable aleatoria, mientras que $\langle x(t + \tau)x(t) \rangle$ es un proceso estocástico, puesto que dependen de la elección de la señal muestra $x(t)$. Por otro lado m_X es una constante y $R_X(\tau)$ es una función determinística.

En general las medias estadísticas y las medias temporales son distintas excepto para un caso muy especial de procesos estocásticos denominados **procesos ergódicos**.

Un proceso estocástico $X(t)$ se dice que es ergódico de la forma más genérica si todas sus propiedades estadísticas se pueden determinar con probabilidad uno a partir de las medias temporales de una única realización del proceso. Es necesario que el proceso estocástico sea estacionario en sentido estricto para que sea ergódico. Lo contrario no es cierto: no todos los procesos estacionarios en sentido estricto son ergódicos.

Sin embargo no estamos interesados en todos los estadísticos de un proceso sino solo en los de primer y segundo orden. Por ello se define la **ergodicidad** en un sentido más limitado **para la media y la autocorrelación**.

Vamos a tener un **estimador** de la media S_{m_X} y otro de la autocorrelación $S_{R_X}(\tau)$ a partir de las medias temporales. Un estimador de la media es una variable aleatoria y un estimador de la autocorrelación un proceso estocástico.

Para que dichos estimadores sean adecuados y se pueda decir por lo tanto que el proceso es ergódico respecto a la media y a la autocorrelación, ambos estimadores deben ser **insesgados** y **consistentes**.

Se dice que un estimador es insesgado si la media de dicho estimador, ya sea éste una variable aleatoria o un proceso estocástico, tiende al parámetro estimado, según la ecuación (3.56), donde S_d es un estimador de un parámetro d . En caso contrario el estimador tendrá sesgo.

$$m_{S_d} = E[S_d] \rightarrow d \quad (3.56)$$

Se dice que un estimador es consistente si la varianza de dicho estimador, ya sea éste una variable aleatoria o un proceso estocástico, tiende a cero, según la ecuación (3.57). En caso contrario el estimador es no consistente.

$$\sigma_{S_d}^2 = E[(S_d - m_{S_d})^2] \rightarrow 0 \quad (3.57)$$

3.4.1 Ergodicidad de la Media.

El estimador de la media es la media temporal antes de calcular el límite y en la que dejamos que el valor de T pueda variar, es decir se tiene la ecuación (3.58). Es una variable aleatoria.

$$S_{m_X} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (3.58)$$

Para que el proceso sea ergódico respecto a la media el estimador de la media tiene que ser insesgado y consistente. Además el proceso tiene que ser estacionario en sentido amplio y por lo tanto la media de $X(t)$ es constante y vale m_X .

Para ver si el estimador S_{m_X} es insesgado hay que calcular su media cuando $T \rightarrow \infty$, según la ecuación (3.59). Como puede verse la media del estimador tiende al parámetro estimado m_X y por lo tanto es insesgado.

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow \infty} m_{S_{m_X}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} E[S_{m_X}] = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \right] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[x(t)] dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T m_X dx = \lim_{T \rightarrow \infty} m_X = m_X
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Ahora hay que comprobar que la varianza del estimador tiende a cero, es decir se tiene la ecuación (3.60). Directamente no tiende a cero, de hecho es la condición que debe cumplirse para que el proceso sea ergódico respecto a la media.

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_{S_{m_X}}^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} E[(S_{m_X} - m_{S_{m_X}})^2] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt - m_X \right)^2 \right] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - m_X) dt \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Por tanto la condición necesaria y suficiente para que un proceso estocástico sea ergódico respecto a la media es que la varianza del estimador de la media tienda a cero cuanto $T \rightarrow \infty$, es decir se debe cumplir la ecuación (3.61).

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - m_X) dt \right)^2 \right] = 0 \tag{3.61}$$

En el caso de que el estimador sea consistente o se cumpla la ecuación (3.61) el proceso $X(t)$ es ergódico respecto a la media y por lo tanto se puede calcular la media del proceso estocástico mediante la ecuación (3.62). Se puede calcular la media estadística mediante la media temporal.

$$m_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \tag{3.62}$$

3.4.2 Ergodicidad de la Autocorrelación.

El estimador de la autocorrelación es la autocorrelación temporal antes de calcular el límite y en la que dejamos que el valor de T pueda variar, es decir se tiene la ecuación (3.63). Es un proceso estocástico.

$$S_{R_X}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x(t) dt \tag{3.63}$$

Para que el proceso sea ergódico respecto a la autocorrelación el estimador de la autocorrelación tiene que ser insesgado y consistente. Además el proceso tiene que ser estacionario en sentido amplio y por lo tanto la autocorrelación de $X(t)$ es función determinística y vale $R_X(\tau)$.

Para ver si el estimador $S_{R_X}(\tau)$ es insesgado hay que calcular su media cuando $T \rightarrow \infty$, según la ecuación (3.64). Como puede verse la media del estimador tiende al parámetro estimado $R_X(\tau)$ y por lo tanto es insesgado.

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow \infty} m_{S_{R_X}(\tau)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} E[S_{R_X}(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t)dt \right] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[x(t+\tau)x(t)]dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_X(\tau)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} R_X(\tau) = R_X(\tau)
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Ahora hay que comprobar que la varianza del estimador tiende a cero, es decir se tiene la ecuación (3.65). Directamente no tiende a cero, de hecho es la condición que debe cumplirse para que el proceso sea ergódico respecto a la autocorrelación.

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_{S_{R_X}(\tau)}^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} E[(S_{R_X}(\tau) - m_{S_{R_X}(\tau)})^2] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t)dt - R_X(\tau) \right)^2 \right] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t+\tau)x(t) - R_X(\tau))dt \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Por tanto la condición necesaria y suficiente para que un proceso estocástico sea ergódico respecto a la autocorrelación es que la varianza del estimador de la autocorrelación tienda a cero cuando $T \rightarrow \infty$, es decir se debe cumplir la ecuación (3.66).

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t+\tau)x(t) - R_X(\tau))dt \right)^2 \right] = 0 \tag{3.66}$$

En el caso de que el estimador sea consistente o se cumpla la ecuación (3.66) el proceso $X(t)$ es ergódico respecto a la autocorrelación y por lo tanto se puede calcular la autocorrelación del proceso estocástico mediante la ecuación (3.67). Se puede calcular la autocorrelación estadística mediante la autocorrelación temporal.

$$R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t)dt \tag{3.67}$$

Para comprobar si un proceso estocástico es ergódico respecto a la media, comprobar la ecuación (3.62), hacen falta los momentos de primer y segundo orden. Para comprobar si lo es respecto a la autocorrelación,



Figura 3.2 Sistema estimador de la media de un proceso estocástico.

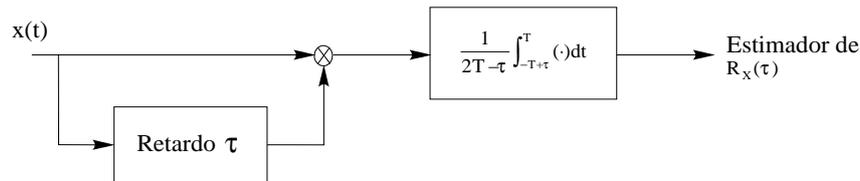


Figura 3.3 Sistema estimador de la autocorrelación de un proceso estocástico.

comprobar la ecuación (3.67), hacen falta los momentos hasta orden cuarto. Por ello, excepto para los casos triviales, no se va a poder comprobar si un proceso estocástico es ergódico con respecto a la media y la autocorrelación. Por ello dependiendo del origen físico del proceso habrá que suponer a priori si es posible intercambiar medias estadísticas y temporales.

3.4.3 Medida de la Media y la Autocorrelación.

En el caso de que se puedan intercambiar las medias temporales y las estadísticas podemos obtener un método práctico para calcular la media y la autocorrelación directamente.

Para determinar la media a partir de un trozo finito de señal de duración $|t| < T$ basta con pasarla por un integrador según puede verse en la figura 3.2.

En el caso de la autocorrelación, tenemos más problemas. Si queremos calcular $R_X(\tau)$ para $\tau > 0$ (puesto que la autocorrelación es par no es necesario hacerlo para valores negativos de τ), entonces si tenemos un trozo finito de señal de duración $|t| < T$, entonces $t - \tau < -T$ para valores de $t < -T + \tau$. En este caso el producto $x(t)x(t - \tau)$ solo se puede integrar entre $-T + \tau$ y T . Por lo tanto la expresión del estimador es el de la ecuación (3.68).

$$\frac{1}{2T - \tau} \int_{-T + \tau}^T x(t)x(t - \tau) dt \quad \tau > 0 \quad (3.68)$$

Entonces fijado τ , la salida del sistema de la figura 3.3 será el estimador de $R_X(\tau)$. Para otros valores de τ , hay que reajustar el valor del retardo y el integrador y volver a pasar $x(t)$ por el sistema.

TRANSMISIÓN DE UNA SEÑAL ALEATORIA A TRAVÉS DE UN SISTEMA.

Supongamos que un proceso estocástico $X(t)$ se aplica a la entrada de un sistema LTI de respuesta al impulso $h(t)$, dando lugar a la salida otro proceso estocástico $Y(t)$, según la figura 4.1.

En general es difícil conocer la función de distribución de $Y(t)$, incluso cuando la función de distribución de $X(t)$ está completamente especificada para $-\infty < t < \infty$.

Lo que se pretende entonces es determinar la media y la autocorrelación del proceso de salida a partir de la media y la autocorrelación del proceso de entrada.

La media de la salida se puede calcular según la ecuación (4.1), puesto que el proceso de salida se puede calcular a través de la integral de convolución en el dominio del tiempo del proceso de entrada y la respuesta al impulso del sistema.

$$m_Y(t) = E[Y(t)] = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t - \tau) d\tau \right] \quad (4.1)$$

Suponiendo que la media de $X(t)$ es finita para todo t y que el sistema es estable, se puede intercambiar el orden de la esperanza matemática y la integral obteniéndose la expresión de la ecuación (4.2). Es decir la media de la señal de salida es igual a la convolución de la media de la señal de entrada con la respuesta al impulso del sistema.

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) E[X(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) m_X(t - \tau) d\tau = h(t) * m_X(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

En el caso de que $X(t)$ sea estacionario en sentido amplio, la media del proceso de entrada no depende del tiempo, sino que es una constante. En ese caso la ecuación (4.2) pasa a ser la ecuación (4.3). La media de la señal de salida también es constante e igual al producto de la media de la señal de entrada con el valor de la función de transferencia del sistema en el origen.

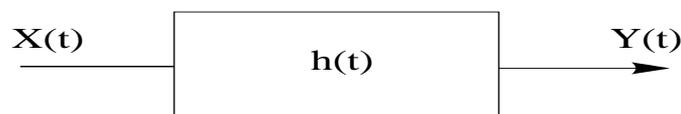


Figura 4.1 Transmisión de una señal aleatoria a través de un sistema LTI.

$$m_Y = m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = H(0)m_X \quad (4.3)$$

Vamos a ver que ocurre ahora con la autocorrelación de la señal de salida $Y(t)$. Se tiene la ecuación (4.4).

$$\begin{aligned} R_Y(t, u) &= E[Y(t)Y(u)] \\ &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)X(t - \tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)X(u - \tau_2) d\tau_2 \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Si el valor cuadrático medio de la señal de entrada es finito para cada instante de tiempo t y el sistema es estable se puede intercambiar el orden de la esperanza matemática y las integrales con respecto a τ_1 y τ_2 dando el desarrollo de la ecuación (4.5). La autocorrelación de la señal de salida se puede calcular como la convolución de la autocorrelación de la señal de entrada con la respuesta al impulso en t y con la respuesta al impulso en u .

$$\begin{aligned} R_Y(t, u) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 h(\tau_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 h(\tau_2) E[X(t - \tau_1)X(u - \tau_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 h(\tau_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 h(\tau_2) R_X(t - \tau_1, u - \tau_2) \\ &= R_X(t, u) * h(t) * h(u) \end{aligned} \quad (4.5)$$

En el caso de que el proceso estocástico de la entrada sea estacionario en sentido amplio su autocorrelación va a depender de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$ y por lo tanto la ecuación (4.5) pasa a ser la ecuación (4.6). La autocorrelación de la señal de salida se puede calcular como la convolución de la autocorrelación de la señal de entrada con la respuesta al impulso en τ y con la respuesta al impulso en $-\tau$.

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \\ &= R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.3) y (4.6) resulta que la media de la señal de salida es constante y la función de autocorrelación depende únicamente de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$, se puede deducir entonces que si un proceso estocástico estacionario en sentido amplio es la entrada a un sistema LTI y estable, la salida va a ser otro proceso estacionario en sentido amplio cuya media viene dada por la ecuación (4.3) y cuya función de autocorrelación por la ecuación (4.6).

Si lo que se desea ahora es calcular la correlación cruzada entre la señal de entrada $X(t)$ y la señal de salida $Y(t)$ se tendrá la ecuación (4.7).

$$R_{XY}(t, u) = E[X(t)Y(u)] = E \left[X(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)X(u - \tau_1) d\tau_1 \right] \quad (4.7)$$

Si el valor cuadrático medio de la señal de entrada es finito para cada instante de tiempo t y el sistema es estable se puede intercambiar el orden de la esperanza matemática y la integral con respecto a τ dando

el desarrollo de la ecuación (4.8). La correlación cruzada de la señal de entrada con la de salida se puede calcular como la convolución de la autocorrelación de la señal de entrada con la respuesta al impulso en u .

$$\begin{aligned} R_{XY}(t, u) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) E[X(t)X(u - \tau_1)] d\tau_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) R_X(t, u - \tau_1) d\tau_1 = R_X(t, u) * h(u) \end{aligned} \quad (4.8)$$

En el caso de que se quiera la correlación cruzada de la señal de salida con la de la entrada siguiendo el mismo razonamiento que para las ecuaciones (4.7) y (4.8), se tiene la ecuación (4.9). La correlación cruzada de la señal de salida con la de entrada se puede calcular como la convolución de la autocorrelación de la señal de entrada con la respuesta al impulso en t .

$$R_{YX}(t, u) = R_X(t, u) * h(t) \quad (4.9)$$

Comparando la ecuación (4.5) con la ecuación (4.8) se deduce la ecuación (4.10). La autocorrelación de la señal de salida de una sistema se puede calcular como la convolución de la correlación cruzada entrada salida con la respuesta al impulso del sistema en t .

$$R_Y(t, u) = R_{XY}(t, u) * h(t) \quad (4.10)$$

Si ahora se compara la ecuación (4.5) con la ecuación (4.9) se deduce la ecuación (4.11). La autocorrelación de la señal de salida de una sistema se puede calcular como la convolución de la correlación cruzada salida entrada con la respuesta al impulso del sistema en u .

$$R_Y(t, u) = R_{YX}(t, u) * h(u) \quad (4.11)$$

En el caso de que el proceso de entrada sea estacionario en sentido amplio la ecuación (4.8) pasa a ser la ecuación (4.12). La correlación cruzada entrada salida se puede calcular como la convolución de la autocorrelación de la señal de entrada con la respuesta al impulso en $-\tau$. Como puede verse el proceso de entrada y el de salida son conjuntamente estacionarios en sentido amplio puesto que su correlación cruzada depende únicamente de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$.

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) R_X(\tau + \tau_1) d\tau_1 = R_X(\tau) * h(-\tau) \quad (4.12)$$

Expresiones similares a las ecuaciones (4.9), (4.10) y (4.11) para el caso estacionario en sentido amplio son las ecuaciones (4.13), (4.14) y (4.15), respectivamente.

$$R_{YX}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) \quad (4.13)$$

$$R_Y(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(\tau) \quad (4.14)$$

$$R_Y(\tau) = R_{YX}(\tau) * h(-\tau) \quad (4.15)$$

A partir de la ecuación (4.5) haciendo $t = u$ se puede llegar a una expresión para el valor cuadrático medio de la señal de salida dado por la ecuación (4.16). Es una función del tiempo.

$$E[Y^2(t)] = R_Y(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(t - \tau_1, t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \quad (4.16)$$

En el caso estacionario en sentido amplio la ecuación (4.16) pasa a ser la ecuación (4.17). En este caso el valor cuadrático medio de la señal de salida es constante.

$$E[Y^2] = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1d\tau_2 \quad (4.17)$$

A partir de la ecuación (4.8) o de la ecuación (4.9) haciendo $t = u$ se puede llegar a una expresión para la correlación de la señal de entrada con la de salida. Viene dada por la ecuación (4.18). Es una función del tiempo.

$$Corr[X(t), Y(t)] = R_{XY}(t, t) = R_{YX}(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)R_X(t, t - \tau_1)d\tau_1 \quad (4.18)$$

En el caso estacionario en sentido amplio la ecuación (4.18) pasa a ser la ecuación (4.19). En este caso la correlación entrada salida es constante.

$$Corr[X, Y] = R_{XY}(0) = R_{YX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)R_X(\tau_1)d\tau_1 \quad (4.19)$$

Si lo que se desea es trabajar con autocovarianzas y correlaciones cruzadas, si se definen los procesos $X'(t) = X(t) - m_X(t)$ e $Y'(t) = Y(t) - m_Y(t)$, la autocorrelación de $X'(t)$ y de $Y'(t)$ es la autocovarianza de $X(t)$ e $Y(t)$, y la correlación cruzada de $X'(t)$ e $Y'(t)$ es la covarianza cruzada de $X(t)$ e $Y(t)$.

La ecuación equivalente a la (4.5) para la autocovarianza es la ecuación (4.20). La autocovarianza de la señal de salida es igual a la autocovarianza de la señal de entrada convolucionada con la respuesta al impulso en t y la respuesta al impulso en u .

$$K_Y(t, u) = K_X(t, u) * h(t) * h(u) \quad (4.20)$$

Si el proceso de entrada al sistema es estacionario en sentido amplio, la ecuación (4.20) pasa a ser la ecuación (4.21). La autocovarianza de la señal de salida es igual a la autocovarianza de la señal de entrada convolucionada con la respuesta al impulso en τ y la respuesta al impulso en $-\tau$. Como era de esperar, puesto que el proceso de salida es estacionario en sentido amplio depende de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$.

$$K_Y(\tau) = K_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \quad (4.21)$$

La covarianza cruzada tiene expresiones similares a las de la correlación cruzada, ecuaciones (4.8) y (4.9), y son la ecuaciones (4.22) y (4.23). La covarianza cruzada entrada salida es igual a la convolución de la autocovarianza de la entrada con la respuesta al impulso en u . La covarianza cruzada salida entrada es igual a la convolución de la autocovarianza de la entrada con la respuesta al impulso en t .

$$K_{XY}(t, u) = K_X(t, u) * h(u) \quad (4.22)$$

$$K_{YX}(t, u) = K_X(t, u) * h(t) \quad (4.23)$$

Comparando las ecuaciones (4.20) y (4.22) se puede deducir la ecuación (4.24). La autocovarianza de la salida es igual a la convolución de la covarianza cruzada entrada salida con la respuesta al impulso en t .

$$K_Y(t, u) = K_{XY}(t, u) * h(t) \quad (4.24)$$

Si ahora se comparan las ecuaciones (4.20) y (4.23) se puede deducir la ecuación (4.25). La autocovarianza de la salida es igual a la convolución de la covarianza cruzada salida entrada con la respuesta al impulso en u .

$$K_Y(t, u) = K_{YX}(t, u) * h(u) \quad (4.25)$$

Las ecuaciones (4.22) y (4.23) para el caso estacionario son las ecuaciones (4.26) y (4.27). La covarianza cruzada entrada salida es igual a la convolución de la autocovarianza de la entrada con la respuesta al impulso en $-\tau$. La covarianza cruzada salida entrada es igual a la convolución de la autocovarianza de la entrada con la respuesta al impulso en τ . Como era de esperar, puesto que los procesos de entrada y salida son conjuntamente estacionarios en sentido amplio, las covarianzas cruzadas dependen de la diferencia de tiempos $\tau = t - u$.

$$K_{XY}(\tau) = K_X(\tau) * h(-\tau) \quad (4.26)$$

$$K_{YX}(\tau) = K_X(\tau) * h(\tau) \quad (4.27)$$

Comparando las ecuaciones (4.21) y (4.26) se puede deducir la ecuación (4.28). La autocovarianza de la salida es igual a la convolución de la covarianza cruzada entrada salida con la respuesta al impulso en τ .

$$K_Y(\tau) = K_{XY}(\tau) * h(\tau) \quad (4.28)$$

Si ahora se comparan las ecuaciones (4.21) y (4.27) se puede deducir la ecuación (4.29). La autocovarianza de la salida es igual a la convolución de la covarianza cruzada salida entrada con la respuesta al impulso en $-\tau$.

$$K_Y(\tau) = K_{YX}(\tau) * h(-\tau) \quad (4.29)$$

Particularizando la ecuación (4.20) para cuando $t = u$ se tiene una expresión para la varianza de la señal de salida que viene dada por la ecuación (4.30). Es una función del tiempo.

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2(t) &= \text{Var}[Y(t)] = K_Y(t, t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)K_X(t - \tau_1, t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Si se particulariza la ecuación (4.22) o la ecuación (4.23) para cuando $t = u$ se tiene una expresión para la covarianza de la señal de entrada con la señal de salida que viene dada por la ecuación (4.31). Es una función del tiempo.

$$\text{Cov}[X(t), Y(t)] = K_{XY}(t, t) = K_{YX}(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)K_X(t, t - \tau_1)d\tau_1 \quad (4.31)$$

Si estamos en el caso estacionario en sentido amplio, la expresión de la varianza es la ecuación (4.32) y la de la covarianza es la ecuación (4.33). Ambas son constantes.

$$\sigma_Y^2 = \text{Var}[Y] = K_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)K_X(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1d\tau_2 \quad (4.32)$$

$$\text{Cov}[X, Y] = K_{XY}(0) = K_{YX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)K_X(\tau_1)d\tau_1 \quad (4.33)$$

DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA.

5.1 DEFINICIÓN.

Se ha considerado la caracterización de procesos estocásticos estacionarios en sentido amplio y su transmisión a través de sistemas LTI en el dominio del tiempo. Vamos a verlo ahora en el dominio de la frecuencia.

Por definición la respuesta al impulso de un sistema es la transformada de Fourier de la función de transferencia según la ecuación (5.1).

$$h(\tau_1) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(j2\pi f \tau_1) df \quad (5.1)$$

Suponiendo estacionariedad en sentido amplio, el valor cuadrático medio de la señal de salida se podía calcular por la ecuación (4.17). Juntando esta ecuación con la ecuación (5.1) se tiene el desarrollo de la ecuación (5.2).

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(j2\pi f \tau_1) df \right] h(\tau_2) R_X(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} df H(f) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 h(\tau_2) \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau_2 - \tau_1) \exp(j2\pi f \tau_1) d\tau_1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Si en la última integral de la ecuación (5.2) se hace el cambio de variable $\tau = \tau_2 - \tau_1$, se tendrá la ecuación (5.3).

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} df H(f) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 h(\tau_2) \exp(j2\pi f \tau_2) \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau \quad (5.3)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (5.4), la ecuación (5.3) se puede poner según la ecuación (5.5).

$$H^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) \exp(j2\pi f \tau_2) d\tau_2 \quad (5.4)$$

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (5.5)$$

Si llamamos $S_X(f)$ a la transformada de Fourier de la función de autocorrelación dada por la ecuación (5.6), la ecuación (5.5) pasará a ser la ecuación (5.7).

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (5.6)$$

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_X(f) df \quad (5.7)$$

La función $S_X(f)$ se denomina **densidad espectral de potencia** del proceso estocástico $X(t)$. Tiene unidades de W/Hz . La ecuación (5.7) nos dice que el valor cuadrático medio o la potencia media de la salida de un sistema LTI estable como respuesta a un proceso estocástico de entrada es igual al área a lo largo de todas las frecuencias del producto de la densidad espectral de potencia de la entrada multiplicada por el módulo al cuadrado de la función de transferencia del sistema.

5.2 PROPIEDADES.

1. La densidad espectral de potencia $S_X(f)$ y la función de autocorrelación $R_X(\tau)$ de un proceso estacionario en sentido amplio forman un par transformado de Fourier según la ecuaciones (5.8) y (5.9). Esas ecuaciones reciben en nombre de **relaciones de Wiener–Khinchine** y son similares a las definidas para señales de potencia periódicas. Por lo tanto si se conoce la densidad espectral de potencia se puede calcular la autocorrelación y viceversa. Es decir la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia son equivalentes: una nos da la representación del proceso en el dominio del tiempo y la otra en el dominio de la frecuencia. En la práctica se utiliza más la densidad espectral de potencia.

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (5.8)$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) \exp(j2\pi f\tau) df \quad (5.9)$$

2. El valor a frecuencia cero de la densidad espectral de potencia de un proceso es igual al área bajo la curva de la autocorrelación según la ecuación (5.10). Se demuestra de forma inmediata haciendo $f = 0$ en la ecuación (5.8).

$$S_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau \quad (5.10)$$

3. El valor cuadrático medio de un proceso es igual al área bajo la curva de la densidad espectral de potencia según la ecuación (5.11). Se demuestra de forma inmediata haciendo $\tau = 0$ en la ecuación (5.9) y teniendo en cuenta que $R_X(0) = E[X^2]$.

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df \quad (5.11)$$

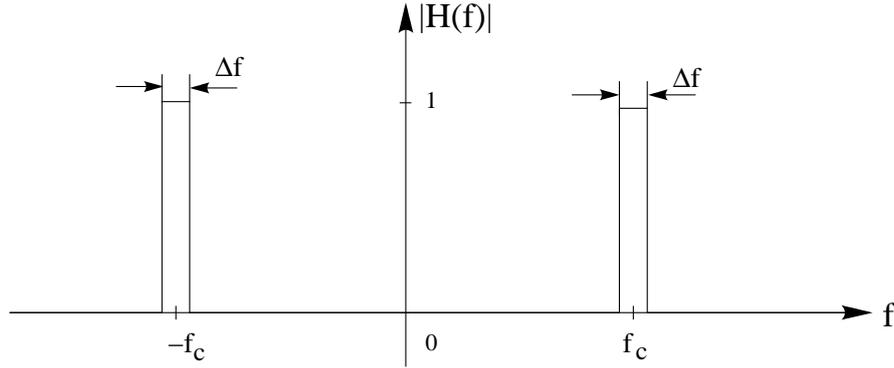


Figura 5.1 Respuesta en amplitud del sistema $H(f)$.

4. La densidad espectral de potencia es una función par de la frecuencia según la ecuación (5.12).

$$S_X(-f) = S_X(f) \quad (5.12)$$

Para probar esta propiedad se sustituye f por $-f$ en la ecuación (5.8) dando lugar a la ecuación (5.13).

$$S_X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(j2\pi f\tau) d\tau \quad (5.13)$$

Haciendo el cambio de variable τ por $-\tau$ en la ecuación (5.13) y teniendo en cuenta que $R_X(\tau)$ es una función par, se tiene la ecuación (5.14), con lo que queda demostrada la propiedad.

$$S_X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = S_X(f) \quad (5.14)$$

5. La densidad espectral de potencia es siempre una función definida no negativa según la ecuación (5.15).

$$S_X(f) \geq 0 \quad \forall f \quad (5.15)$$

Para probar esta propiedad definimos un sistema cuya respuesta en amplitud viene dada por la ecuación (5.16). También puede verse gráficamente en la figura 5.1, donde Δf se supone que es muy pequeño.

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & |f \pm f_c| < \frac{1}{2}\Delta f \\ 0 & |f \pm f_c| > \frac{1}{2}\Delta f \end{cases} \quad (5.16)$$

Si $X(t)$ es la señal de entrada a ese sistema e $Y(t)$ la salida, el valor cuadrático medio de la salida viene dado por la ecuación (5.7). En los intervalos $|f \pm f_c| < \frac{1}{2}\Delta f$ donde la respuesta en amplitud del sistema es unidad, puesto que Δf se supone que es muy pequeño se puede hacer la aproximación dada por la ecuación (5.17).

$$S_X(f) \simeq S_X(f_c) \quad |f \pm f_c| < \frac{1}{2}\Delta f \quad (5.17)$$

Teniendo en cuenta ahora las ecuaciones (5.7) y (5.17) el valor cuadrático medio de la salida viene dado por la ecuación (5.18).

$$E[Y^2] \simeq 2\Delta f S_X(f_c) \quad \forall f_c \quad (5.18)$$

Puesto que el valor cuadrático medio representa la potencia media de la salida y la potencia siempre toma valores positivos, y puesto que Δf es positivo de la ecuación (5.18) se deduce que $S_X(f_c) \geq 0$, y como eso se cumple para cualquier frecuencia f_c queda demostrado que la densidad espectral de potencia es una función no negativa de la frecuencia.

5.3 RELACIÓN ENTRE DENSIDADES ESPECTRALES A LA ENTRADA Y SALIDA DE UN SISTEMA LTI.

Sea $S_Y(f)$ la densidad espectral de potencia de una señal $Y(t)$ salida de un sistema LTI cuya función de transferencia es $H(f)$ y cuya entrada sea el proceso $X(t)$ con densidad espectral de potencia $S_X(f)$. La densidad espectral de potencia de la señal de salida se puede calcular utilizando la ecuación (5.8) y la ecuación (4.6) según la ecuación (5.19).

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau_1 d\tau_2 d\tau \end{aligned} \quad (5.19)$$

Haciendo en el cambio de variable $\tau_0 = \tau - \tau_1 + \tau_2$ en la ecuación (5.19) se obtiene la ecuación (5.20).

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau_0) \exp(-j2\pi f\tau_0) \exp(-j2\pi f\tau_1) \\ &\quad \exp(j2\pi f\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) \exp(-j2\pi f\tau_1) d\tau_1}_{H(f)} \\ &\quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) \exp(j2\pi f\tau_2) d\tau_2}_{H^*(f)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau_0) \exp(-j2\pi f\tau_0) d\tau_0}_{S_X(f)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

De la última expresión de la ecuación (5.20) se deduce que la densidad espectral de potencia de la salida es igual al producto de la densidad espectral de la entrada por el modulo al cuadrado de la función de transferencia del sistema. Es decir se tiene la ecuación (5.21).

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) \quad (5.21)$$

De la ecuación (5.21) se podría deducir la ecuación (5.7) según la ecuación (5.22).

$$E[Y^2] = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_X(f) df \quad (5.22)$$

5.4 RELACIÓN ENTRE LA DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA Y LA AMPLITUD DEL ESPECTRO DE UNA FUNCIÓN MUESTRA.

Se quiere relacionar la densidad espectral de potencia $S_X(f)$ con las propiedades espectrales de una función muestra $x(t)$ de un proceso estocástico $X(t)$ estacionario en sentido amplio y ergódico respecto a la media y a la autocorrelación.

Una señal tiene transformada de Fourier si cumple las condiciones de Dirichlet, de las cuales la más importante era la última que venía a decir que la señal fuera absolutamente integrable, es decir, que se cumpliera la ecuación (5.23).

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (5.23)$$

En general para una función muestra no se cumple la ecuación (5.23). Una forma de ampliar el conjunto de señales con transformada de Fourier era utilizando la función delta de Dirac y las series de Fourier para señales de potencia periódicas. Pero en general una función muestra no va a ser periódica. En definitiva, que una función muestra $x(t)$ como tal no va a tener transformada de Fourier y por lo tanto no se puede caracterizar en el dominio de la frecuencia.

Para poder continuar vamos a definir una señal de duración finita y por lo tanto de energía, definida por la ecuación (5.24).

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases} \quad (5.24)$$

La señal truncada $x_T(t)$ por ser una señal de energía cumple las condiciones de Dirichlet y va a tener transformada de Fourier, siempre que T tome un valor finito y el valor cuadrático medio de $X(t)$ sea también finito.

La transformada de Fourier de $x_T(t)$ va a venir dada por la ecuación (5.25).

$$\begin{aligned} X_T(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= \int_{-T}^T x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \end{aligned} \quad (5.25)$$

Por ser el proceso $X(t)$ ergódico respecta a la función de autocorrelación, se va a poder calcular la autocorrelación $R_X(\tau)$ según la ecuación (5.26).

$$R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau)x_T(t) dt \quad (5.26)$$

La función de autocorrelación de la señal de energía $x_T(t)$ venía dada por la ecuación (5.27).

$$R_{x_T}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau)x_T(t) dt \quad (5.27)$$

La transformada de Fourier de la autocorrelación $R_{x_T}(\tau)$ es la densidad espectral de energía $\Psi_{x_T}(f) = |X_T(f)|^2$, donde $X_T(f)$ es la transformada de Fourier de $x_T(t)$ y viene dada por la ecuación (5.25). Teniendo en cuenta lo anterior se cumple la ecuación (5.28).

$$\begin{aligned} R_{x_T}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{x_T}(f) \exp(j2\pi f\tau) df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 \exp(j2\pi f\tau) df \end{aligned} \quad (5.28)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (5.26), (5.27) y (5.28) se llega a la ecuación (5.29).

$$R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} |X_T(f)|^2 \exp(j2\pi f\tau) df \quad (5.29)$$

En la ecuación (5.29) aparece el término $\frac{|X_T(f)|^2}{2T}$, que es una función continua de la frecuencia y que como depende de la elección de T y de la función muestra $x(t)$ es un proceso estocástico definido en el dominio de la frecuencia. Tiene dimensiones de densidad espectral de potencia y en muchos casos se considera como un estimador de la densidad espectral de potencia. Se denomina **periodograma**.

Para un valor fijo de la frecuencia el periodograma representa una variable aleatoria cuyo valor es lo que valga la transformada de Fourier de la versión truncada de la función muestra a esa frecuencia. El periodograma resulta que no converge en ningún sentido estadístico a un valor finito según T va tendiendo a infinito, por lo tanto no se pueden intercambiar el límite y la integral en la ecuación (5.29).

Ahora si tomamos esperanza matemática en ambos lados de la ecuación (5.29), obtendremos la ecuación (5.30).

$$R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} E[|X_T(f)|^2] \exp(j2\pi f\tau) df \quad (5.30)$$

Ahora sí que se puede intercambiar el límite y la integral en la ecuación (5.30) dando lugar a la ecuación (5.31).

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|X_T(f)|^2] \right\} \exp(j2\pi f\tau) df \quad (5.31)$$

Si tenemos en cuenta que la autocorrelación y la densidad espectral de potencia forman un par transformado de Fourier, es decir juntando las ecuaciones (5.9), (5.25) y (5.31), se tiene finalmente la ecuación (5.32).

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|X_T(f)|^2] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[\left| \int_{-T}^T x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \right|^2 \right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

Como puede verse en la ecuación (5.32) resulta más sencillo estimar la función de autocorrelación en el dominio del tiempo y luego calcular la transformada de Fourier para obtener la densidad espectral de potencia que estimar la densidad espectral de potencia a partir del periodograma que viene dado en función de la amplitud del espectro de una función muestra truncada en el tiempo. En la ecuación (5.32) no se puede intercambiar el límite con el operador esperanza matemática.

5.5 CÁLCULO DE DENSIDADES ESPECTRALES DE SEÑALES BINARIAS.

Si se tiene una señal binaria $X(t)$ con símbolos 0 y 1 equiprobables con duración T que se suceden indefinidamente en el tiempo, dicha señal es un proceso estocástico estacionario en sentido amplio. Si además resulta que el símbolo 1 se representa con una señal de energía $g(t)$ de duración T y el símbolo 0 se representa con la señal cambiada de signo, es decir, con $-g(t)$, si $\Psi_g(f)$ es la densidad espectral de energía de la señal $g(t)$ la densidad espectral de la señal binaria $X(t)$ va a venir dada por la ecuación (5.33).

$$S_X(f) = \frac{\Psi_g(f)}{T} \quad (5.33)$$

5.6 DENSIDAD ESPECTRAL CRUZADA.

La **densidad espectral cruzada** nos da una medida de la interrelación en frecuencia entre dos procesos estocásticos, a diferencia de la densidad espectral de potencia que nos daba la distribución frecuencial de un proceso estocástico.

Sean dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ estacionarios en sentido amplio cada uno de ellos y de forma conjunta. Las densidades espectrales cruzadas se definen como la transformada de Fourier de las correlaciones cruzadas, según la ecuación (5.34).

$$\begin{aligned} S_{XY}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ S_{YX}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.34)$$

Las correlaciones cruzadas se pueden calcular como la transformada inversa de Fourier de las densidades espectrales cruzadas, según la ecuación (5.35).

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(f) \exp(j2\pi f\tau) df \\ R_{YX}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}(f) \exp(j2\pi f\tau) df \end{aligned} \quad (5.35)$$

La densidad espectral cruzada y la correlación cruzada forman un par transformado de Fourier y son por lo tanto totalmente equivalentes. Las densidades espectrales de potencia no son necesariamente funciones reales de la frecuencia y teniendo en cuenta que la relación entre las funciones de correlación cruzada es $R_{YX}(\tau) = R_{XY}(-\tau)$ y tomando transformada de Fourier, resulta que la relación entre las densidades

espectrales cruzadas viene dada por la ecuación (5.36). Esta ecuación nos dice que cada una de las funciones densidad espectral cruzada cumple la propiedad de simetría conjugada.

$$S_{YX}(f) = S_{XY}(-f) = S_{XY}^*(f) \quad (5.36)$$

Particularizando la ecuación (5.35) para $\tau = 0$ se obtiene la ecuación (5.37) que nos permite calcular la correlación de los dos procesos calculando el área debajo de la densidad espectral cruzada.

$$\text{Corr}[X, Y] = R_{XY}(0) = R_{YX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}(f) df \quad (5.37)$$

Si $Y(t)$ es la salida de un sistema LTI estable con función de transferencia $H(f)$ para cuando la entrada es $X(t)$ se puede calcular las densidades espectrales de la entrada y la salida según la ecuación (5.38), donde $S_X(f)$ es la densidad espectral de potencia de la entrada.

$$\begin{aligned} S_{XY}(f) &= S_X(f)H^*(f) \\ S_{YX}(f) &= S_X(f)H(f) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Además se puede calcular la densidad espectral de potencia de la salida a partir de las densidades espectrales cruzadas utilizando la ecuación (5.39).

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = S_{XY}(f)H(f) = S_{YX}H^*(f) \quad (5.39)$$

5.7 ESPECTRO DE COVARIANZA.

Se define el **espectro de autocovarianza** de un proceso estocástico $X(t)$ estacionario en sentido amplio como la transformada de Fourier de la autocovarianza. Vendrá dada por la ecuación (5.40).

$$S_X^k(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (5.40)$$

La autocovarianza se podrá calcular como la transformada inversa de Fourier del espectro de autocovarianza, según la ecuación (5.41).

$$K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X^k(f) \exp(j2\pi f\tau) df \quad (5.41)$$

La autocovarianza y el espectro de autocovarianza forman un par transformado de Fourier y son por lo tanto totalmente equivalentes.

El valor del espectro de autocovarianza a frecuencia cero corresponde al área debajo de la autocovarianza según la ecuación (5.42).

$$S_X^k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) d\tau \quad (5.42)$$

El área debajo del espectro de autocovarianza es igual a la varianza del proceso según la ecuación (5.43).

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_X^k(f) df \quad (5.43)$$

El espectro de autocovarianza es una función par de la frecuencia según la ecuación (5.44).

$$S_X^k(f) = S_X^k(-f) \quad (5.44)$$

El espectro de autocovarianza es una función definida no negativa según la ecuación (5.45).

$$S_X^k(f) \geq 0 \quad \forall f \quad (5.45)$$

Puesto que la autocovarianza y la autocorrelación están relacionadas por la expresión $R_X(\tau) = K_X(\tau) + m_X^2$, tomando transformada de Fourier se tendrá la ecuación (5.46) que nos relaciona la densidad espectral de potencia con el espectro de autocovarianza. La diferencia es que el espectro de autocovarianza no presenta delta en el origen debido a la media de la señal. La delta en el origen de la densidad espectral de potencia representa la **potencia dc** de la señal, el área bajo el espectro de autocovarianza la varianza o la **potencia ac** de la señal y el área debajo de la densidad espectral de potencia la potencia total que será la suma de la potencia dc y la potencia ac. En el caso en que la media de sea cero, la densidad espectral de potencia y el espectro de autocovarianza son iguales.

$$S_X(f) = S_X^k(f) + m_X^2 \delta(f) \quad (5.46)$$

Si $Y(t)$ es la salida de un sistema LTI estable cuya función de transferencia es $H(f)$ y $X(t)$ es la entrada, el espectro de autocovarianza de la salida se puede calcular con la ecuación (5.47).

$$S_Y^k(f) = |H(f)|^2 S_X^k(f) \quad (5.47)$$

Se definen los **espectros de covarianza cruzada** para los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ estacionarios en sentido amplio por separado y de forma conjunta como la transformada de Fourier de las funciones de covarianza cruzada según la ecuación (5.48).

$$\begin{aligned} S_{XY}^k(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{XY}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ S_{YX}^k(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{YX}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.48)$$

Las covarianzas cruzadas se pueden calcular como la transformada inversa de Fourier de los espectros de covarianza cruzada según la ecuación (5.49).

$$\begin{aligned} K_{XY}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}^k(f) \exp(j2\pi f\tau) df \\ K_{YX}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}^k(f) \exp(j2\pi f\tau) df \end{aligned} \quad (5.49)$$

Las funciones de covarianza cruzada y los espectros de covarianza cruzada forman par transformado de Fourier y son por lo tanto totalmente equivalentes.

Los espectros de covarianza cruzada no son en general funciones reales de la frecuencia. Teniendo en cuenta que la relación entre las funciones de covarianza cruzada es $K_{XY}(\tau) = K_{YX}(-\tau)$ tomando transformada de Fourier llegamos a la ecuación (5.50) que nos relaciona los espectros de covarianza cruzada. Esta ecuación también nos dice que los espectros de covarianza cruzada cumplen la propiedad de simetría conjugada.

$$S_{XY}^k(f) = S_{YX}^k(-f) = S_{YX}^{k*}(f) \quad (5.50)$$

Particularizando la ecuación (5.49) para cuando $\tau = 0$ se obtiene la ecuación (5.51) que nos permite calcular la covarianza de $X(t)$ e $Y(t)$ a partir de los espectros de covarianza cruzada.

$$Cov[X, Y] = K_{XY}(0) = K_{YX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}^k(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}^k(f) df \quad (5.51)$$

Puesto que la relación entre la correlación cruzada y la covarianza cruzada viene dada por $R_{XY}(\tau) = K_{XY}(\tau) + m_X m_Y$ o $R_{YX}(\tau) = K_{YX}(\tau) + m_X m_Y$, tomando transformada de Fourier se tiene la relación entre las densidades espectrales cruzadas y los espectros de covarianza cruzada según la ecuación (5.52). En el caso de que alguna de las medias sean cero o las dos las densidades espectrales cruzadas y los espectros de covarianza cruzada son iguales.

$$\begin{aligned} S_{XY}(f) &= S_{XY}^k(f) + m_X m_Y \delta(f) \\ S_{YX}(f) &= S_{YX}^k(f) + m_X m_Y \delta(f) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Si $Y(t)$ es la salida de un sistema LTI estable cuya función de transferencia es $H(f)$ y $X(t)$ es la entrada, los espectros de covarianza cruzada entrada salida vienen dados por la ecuación (5.53), donde $S_X^k(f)$ es el espectro de autocovarianza de la entrada.

$$\begin{aligned} S_{XY}^k(f) &= S_X^k(f) H^*(f) \\ S_{YX}^k(f) &= S_X^k(f) H(f) \end{aligned} \quad (5.53)$$

El espectro de autocovarianza de la salida se puede calcular a partir de los espectros de covarianza cruzada según la ecuación (5.54).

$$S_Y^k(f) = |H(f)|^2 S_X^k(f) = S_{XY}^k(f) H(f) = S_{YX}^k(f) H^*(f) \quad (5.54)$$

PROCESOS GAUSSIANOS.
6.1 DEFINICIÓN.

Vamos a observar un proceso $X(t)$ en un intervalo $0 < t < T$. Supongamos que ponderamos el proceso estocástico por una función conocida $g(t)$ e integramos el producto en el intervalo de observación. Esto nos define una variable aleatoria Y que depende de la realización del proceso estocástico y de la elección de $g(t)$. Vendrá dada por la ecuación (6.1). Se dice que Y es un **funcional lineal** de $X(t)$.

$$Y = \int_0^T g(t)X(t)dt \quad (6.1)$$

Hay que distinguir los conceptos de funcional lineal y función lineal. Una función lineal de variables aleatorias daría como resultado otra variable aleatoria, según la ecuación (6.2). Para cada realización de las variables aleatorias X_i se tendrá un valor concreto de la variable aleatoria Y .

$$Y = \sum_{i=1}^N a_i X_i \quad (6.2)$$

Sin embargo en el caso del funcional de la ecuación (6.1) el valor de la variable aleatoria Y depende del valor de $g(t)X(t)$ en el intervalo de observación $0 < t < T$. Un funcional depende del valor de una o más funciones o procesos estocásticos en un intervalo o intervalos dados, en lugar del valor de un conjunto de variables. El dominio de definición de un funcional es un conjunto o espacio de funciones admisibles en lugar de una región de un espacio de coordenadas.

Si en la ecuación (6.1) $g(t)$ es una función tal que el valor cuadrático medio de la variable aleatoria Y es finito y su distribución estadística es Gaussiana para cualquier $g(t)$ y cualquier intervalo de observación, se dice entonces que el proceso $X(t)$ es Gaussiano. Por lo tanto un proceso $X(t)$ es Gaussiano, si cualquier funcional de $X(t)$ es una variable aleatoria Gaussiana.

Se dice que una variable aleatoria Y tiene distribución Gaussiana si su función densidad de probabilidad viene dada por la ecuación (6.3), donde m_Y es la media de la variable aleatoria y σ_Y^2 la varianza. Esta variable aleatoria queda completamente caracterizada estadísticamente con su media y varianza. En el caso en el que la media m_Y sea cero y la varianza σ_Y^2 sea unidad en la figura 6.1 puede verse cual es el aspecto de la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria Gaussiana.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left[-\frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right] \quad (6.3)$$

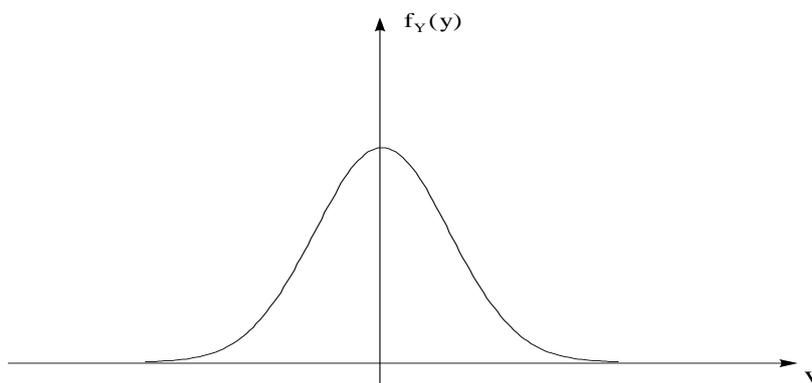


Figura 6.1 Aspecto de la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza unidad.

El que un proceso sea Gaussiano tiene muchas ventajas. Se puede trabajar analíticamente de forma sencilla. Muy a menudo en la naturaleza se encuentran procesos físicos que se pueden modelar como procesos Gaussianos. El **teorema del límite central** nos justifica el uso de procesos Gaussianos para el caso de fenómenos que se pueden descomponer en muchos elementos independientes con iguales propiedades estadísticas.

Sean X_i un conjunto de variables aleatorias independientes entre sí con igual distribución estadística con media m y varianza σ^2 . Dichas variables aleatorias se pueden normalizar para que tengan media cero y varianza unidad según la ecuación (6.4). Las variables Y_i son también independientes entre sí con igual distribución estadística y con media cero y varianza unidad.

$$Y_i = \frac{1}{\sigma}(X_i - m) \quad (6.4)$$

Vamos a definir una nueva variable aleatoria superposición de las variables aleatorias X_i según la ecuación (6.5).

$$U_N = \sum_{i=1}^N X_i \quad (6.5)$$

También se puede definir una variable aleatoria superposición de las variables normalizadas Y_i y también normalizada de modo que tenga media cero y varianza unidad según la ecuación (6.6). Resulta que V_N es la versión normalizada de U_N con media cero y varianza unidad, por lo tanto tendrán la misma distribución estadística.

$$V_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Y_i \quad (6.6)$$

La relación entre U_N y V_N se puede deducir sustituyendo la ecuación (6.4) en la ecuación (6.6) resultando la ecuación (6.7). Según esta ecuación U_N tiene de media mN y de varianza $N\sigma^2$

$$U_N = \sigma\sqrt{N}V_N + mN \quad (6.7)$$

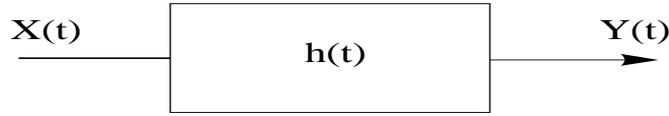


Figura 6.2 La salida de un sistema LTI estable a una entrada Gaussiana es Gaussiana.

El teorema del límite central nos dice que según $N \rightarrow \infty$ la variable aleatoria V_N se aproxima a una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza unidad. Entonces la variable aleatoria U_N composición de las variables X_i iniciales va a ser una variable aleatoria con distribución Gaussiana de media mN y de varianza $N\sigma^2$.

Hay que tener en cuenta que es una aproximación y que solo para cuando N es muy grande las variables U_N y V_N se comportan como Gaussianas. Para N más pequeño el error puede ser considerable.

6.2 PROPIEDADES DE LOS PROCESOS GAUSSIANOS.

1. Si se aplica un proceso Gaussiano $X(t)$ a la entrada de un sistema LTI estable, su salida $Y(t)$ es también Gaussiana.

Sea el sistema el de la figura 6.2. La relación entre el proceso de entrada y el de salida viene dada por la integral de convolución en el dominio del tiempo según la ecuación (6.8).

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)X(\tau)d\tau \quad \infty < t < \infty \quad (6.8)$$

Vamos a suponer que $h(t)$ es tal que el valor cuadrático medio de la señal de salida es finito en el intervalo $-\infty < t < \infty$. Para demostrar que el proceso estocástico de salida $Y(t)$ es Gaussiano habrá que demostrar que cualquier funcional de ese proceso es una variable aleatoria Gaussiana. Para ello sea $g_Y(t)$ una función arbitraria pero conocida definida en el intervalo $-\infty < t < \infty$ y sea un intervalo cualquiera $t_a < t < t_b$. Vamos a definir un funcional para el proceso de salida $Y(t)$, para esa función $g_Y(t)$ y ese intervalo según la ecuación (6.9). Z va a ser una variable aleatoria que habrá que demostrar que es Gaussiana. Entonces puesto que es un funcional cualquiera del proceso de salida, este será Gaussiano.

$$Z = \int_{t_a}^{t_b} g_Y(t)Y(t)dt \quad (6.9)$$

Sustituyendo la ecuación (6.8) en la ecuación (6.9) se tiene la ecuación (6.10).

$$\begin{aligned} Z &= \int_{t_a}^{t_b} g_Y(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)X(\tau)d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{t_a}^{t_b} g_Y(t)h(t - \tau)dt \right] X(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (6.10)$$

La integral dentro de los corchetes en la ecuación (6.10) es una función conocida de τ , puesto que $g_Y(t)$ es conocida y $h(t)$ también, por lo tanto si a dicha función de τ la llamo $g(\tau)$ según la ecuación (6.11), la ecuación (6.10) pasa a ser la ecuación (6.12).

$$g(\tau) = \int_{t_a}^{t_b} g_Y(t)h(t - \tau)dt \quad (6.11)$$

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)X(\tau)d\tau \quad (6.12)$$

La ecuación (6.12) es un funcional del proceso $X(t)$ para la función $g(t)$ definida por la ecuación (6.11) y para el intervalo $-\infty < t < \infty$. Puesto que se partía de que $X(t)$ era un proceso Gaussiano, entonces cualquier funcional de $X(t)$ es una variable aleatoria Gaussiana. Por lo tanto como hemos puesto la variable Z como un funcional de $X(t)$, es una variable aleatoria Gaussiana. Ya que según la ecuación (6.9) Z era un funcional cualquiera del proceso $Y(t)$ y puesto que Z es Gaussiana, queda demostrado que $Y(t)$ es Gaussiano y que por lo tanto la salida de un sistema LTI estable para una señal Gaussiana es también Gaussiana.

Esta propiedad también se cumple si se supone para el sistema linealidad y estabilidad, pudiendo ser variante en el tiempo.

2. Un conjunto de variables aleatorias muestra $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ de un proceso Gaussiano $X(t)$ son Gaussianas. Además este conjunto de variables aleatorias Gaussianas son también Gaussianas de forma conjunta.

Si \mathbf{X} es el vector de variables aleatorias y viene dado por la ecuación (6.13), \mathbf{x} es un vector de variables independientes y viene dado por la ecuación (6.14), \mathbf{m}_X es el vector de las medias de las variables aleatorias y viene dado por la ecuación (6.15) y \mathbf{K}_X es la matriz de covarianza dada por la ecuación (6.16), la función densidad de probabilidad conjunta para esas variables aleatorias Gaussianas tomadas muestreando el proceso estocástico viene completamente determinada por la ecuación (6.17), donde $|\mathbf{K}_X|$ es el determinante de la matriz de covarianza y \mathbf{K}_X^{-1} es la inversa.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{m}_X = E[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} m_X(t_1) \\ m_X(t_2) \\ \vdots \\ m_X(t_n) \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

$$\mathbf{K}_X = E[(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)^T(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)]$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_X^2(t_1) & \dots & Cov[X(t_1), X(t_n)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov[X(t_n), X(t_1)] & \dots & \sigma_X^2(t_n) \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|\mathbf{K}_X|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_X)^T \mathbf{K}_X^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_X)\right] \quad (6.17)$$

Las ecuaciones (6.13), (6.14), (6.15) y (6.16) para el caso particular $n = 1$ (usamos la notación $X = X(t_1)$ para simplificar) pasan a ser las ecuaciones (6.18), (6.19), (6.20) y (6.21) respectivamente. Teniendo en cuenta las ecuaciones (6.22) y (6.23) y sustituyendo esas ecuaciones en la ecuación (6.17) se obtiene la ecuación (6.24), que es la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria Gaussiana como ya habíamos visto.

$$\mathbf{X} = [X] \quad (6.18)$$

$$\mathbf{x} = [x] \quad (6.19)$$

$$\mathbf{m}_X = [m_X] \quad (6.20)$$

$$\mathbf{K}_X = [\sigma_X^2] \quad (6.21)$$

$$|\mathbf{K}_X| = \sigma_X^2 \quad (6.22)$$

$$\mathbf{K}_X^{-1} = \left[\frac{1}{\sigma_X^2} \right] \quad (6.23)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x - m_X)^2}{\sigma_X^2}\right] \quad (6.24)$$

Las ecuaciones (6.13), (6.14) y (6.15) para el caso particular $n = 2$ (usamos la notación $X = X(t_1)$ e $Y = X(t_2)$ para simplificar) pasan a ser las ecuaciones (6.25), (6.26) y (6.27) respectivamente. La covarianza se puede poner utilizando el coeficiente de correlación y las desviaciones estándar de X e Y según la ecuación (6.28), entonces la ecuación (6.16) ahora es la ecuación (6.29). Teniendo en cuenta las ecuaciones (6.30) y (6.31) y sustituyendo esas ecuaciones en la ecuación (6.17) se obtiene la ecuación (6.32), que es la función densidad de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias Gaussianas.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

$$\mathbf{m}_X = \begin{bmatrix} m_X \\ m_Y \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

$$\text{Cov}[X, Y] = \rho\sigma_X\sigma_Y \quad (6.28)$$

$$\mathbf{K}_X = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

$$|\mathbf{K}_X| = \sigma_X^2\sigma_Y^2 - \rho^2\sigma_X^2\sigma_Y^2 = \sigma_X^2\sigma_Y^2(1 - \rho^2) \quad (6.30)$$

$$\mathbf{K}_X^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2} & \frac{-\rho}{\sigma_X\sigma_Y} \\ \frac{-\rho}{\sigma_X\sigma_Y} & \frac{1}{\sigma_Y^2} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} f_{XY}(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} [x - m_X \quad y - m_Y] \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2} & \frac{-\rho}{\sigma_X\sigma_Y} \\ \frac{-\rho}{\sigma_X\sigma_Y} & \frac{1}{\sigma_Y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - m_X \\ y - m_Y \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left[\frac{(x - m_X)^2}{\sigma_X^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\rho \frac{(x - m_X)(y - m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y - m_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.32)$$

En el caso de que X e Y sean incorreladas $\rho = 0$ y por lo tanto la ecuación (6.32) pasa a ser la ecuación (6.33) y como puede verse queda el producto de las funciones marginales y se tiene que x e y son independientes.

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp \left[-\frac{(x - m_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{(y - m_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right] = f_X(x)f_Y(y) \quad (6.33)$$

3. Un proceso estacionario en sentido amplio Gaussiano es estacionario en sentido estricto.

Se sigue inmediatamente de la segunda propiedad, puesto que la media y la covarianza identifican la función densidad de probabilidad, los conceptos de estacionariedad en sentido amplio y en sentido estricto coinciden.

4. Si se toman n muestras de un proceso estocástico Gaussiano $X(t)$, $X(t_1)$, $X(t_2)$, \dots , $X(t_n)$ y resulta que son variables aleatorias incorreladas según la ecuación (6.34) entonces son estadísticamente independientes.

$$E[(X(t_k) - m_X(t_k))(X(t_i) - m_X(t_i))] = 0 \quad i \neq k \quad (6.34)$$

En el caso de que las variables aleatorias $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ sean incorreladas, la matriz de covarianza es diagonal y viene dada por la ecuación (6.35), el determinante de esa matriz es el producto de los elementos de la diagonal según la ecuación (6.36) y la inversa es otra matriz diagonal cuyos elementos son los inversos de los elementos de la diagonal de la matriz de covarianza, según la ecuación (6.37).

$$\mathbf{K}_X = \begin{bmatrix} \sigma_{X(t_1)}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{X(t_2)}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{X(t_n)}^2 \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

$$|\mathbf{K}_X| = \sigma_{X(t_1)}^2 \sigma_{X(t_2)}^2 \dots \sigma_{X(t_n)}^2 \quad (6.36)$$

$$\mathbf{K}_X^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{X(t_1)}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{X(t_2)}^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_{X(t_n)}^2} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la función densidad de probabilidad conjunta se tendrá el desarrollo de la ecuación (6.38) y por lo tanto como la función densidad de probabilidad conjunta es igual al producto de las marginales, las variables aleatorias son independientes como se quería demostrar.

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sigma_{X(t_i)}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_X)^T \mathbf{K}_X^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_X) \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sigma_{X(t_i)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_{X(t_i)})^2}{\sigma_{X(t_i)}^2} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{X(t_i)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x_i - m_{X(t_i)})^2}{\sigma_{X(t_i)}^2} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n f_{X(t_i)}(x_i) \end{aligned} \quad (6.38)$$

7.1 TIPOS DE RUIDO.

El término ruido se utiliza comúnmente para designar las señales no deseadas que aparecen en los sistemas de comunicaciones y sobre las que no tenemos ningún control.

Existen dos tipos de ruido:

- Ruido externo al sistema, como por ejemplo ruido atmosférico, ruido galáctico y ruido producido por el hombre.
- Ruido interno al sistema. El más importante es el debido a las fluctuaciones aleatorias de los portadores dentro de los dispositivos utilizados.

El ruido interno está presente en todos los sistemas de comunicaciones y fija una limitación en la transmisión y detección. Los dos tipos más comunes de este ruido son **ruido impulsivo** o **ruido Shot** y **ruido térmico**.

7.1.1 Ruido Impulsivo.

Es debido a la naturaleza discreta del flujo de corriente.

Vamos a suponer que tenemos un circuito con un diodo de vacío como el que puede verse en la figura 7.1.

El cátodo se calienta de forma que emita electrones y el ánodo se mantiene positivo respecto al cátodo de forma que capte electrones. La diferencia de potencial entre el ánodo y cátodo suponemos que es

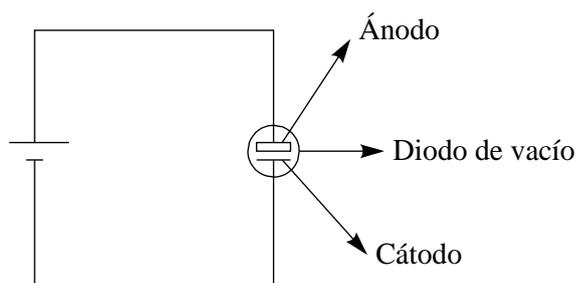


Figura 7.1 Diodo de vacío donde aparece el ruido tipo Shot.

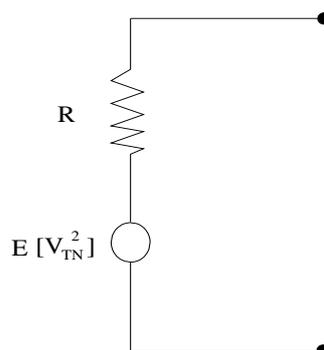


Figura 7.2 Equivalente Thevenin de una resistencia ruidosa.

suficientemente grande como para que los electrones sean emitidos por el cátodo de forma termoiónica y son captados por el ánodo. Los efectos de carga espacial se suponen despreciables.

La corriente vendrá dada por la tasa efectiva de electrones emitidos por el cátodo. Si se considera la corriente como la suma de la sucesión de impulsos de corriente debidos a la transición de un electrón desde el cátodo hasta el ánodo, se puede ver que el valor cuadrático medio de las componentes fluctuantes y por lo tanto ruidosas de la corriente viene dado por la ecuación (7.1), donde $e = 1,59 \cdot 10^{-9} C$ es la carga del electrón, I_0 es la corriente media medida en amperios y Δf es el ancho de banda considerado en Hz. Esta fórmula se denomina **fórmula de Schottky**.

$$E[I_{SN}^2] = 2eI_0\Delta f[Amp^2] \quad (7.1)$$

El tiempo medio de transición de un electrón desde el cátodo hasta el ánodo es de 10^{-9} s. A partir de la fórmula si la frecuencia de trabajo es pequeña comparada con el inverso del tiempo de transición del electrón, este tipo de ruido se puede despreciar.

Se puede aplicar el teorema del límite central pues el número de electrones que llegan al ánodo es muy elevado y se pueden considerar con iguales parámetros estadísticos e independientes. Entonces el ruido de tipo Shot es Gaussiano con media cero.

7.1.2 Ruido Térmico.

El ruido térmico es el nombre dado al ruido eléctrico debido al movimiento aleatorio de los electrones en un conductor. El valor cuadrático medio de la tensión medida en los terminales de una resistencia viene dado por la ecuación (7.2), donde Δf es el ancho de banda, K la constante de Boltzmann que vale $1,38 \cdot 10^{-23} J/K$, T es la temperatura absoluta en Kelvin y R es la resistencia en Ω .

$$E[V_{TN}^2] = 4KTR\Delta f[Volt^2] \quad (7.2)$$

Se puede modelar una resistencia mediante el **circuito equivalente de Thevenin** como se puede ver en la figura 7.2. Es una resistencia sin ruido de valor R en serie con un generador de tensión de ruido de valor cuadrático medio $E[V_{TN}^2]$.

Equivalentemente se puede utilizar el **circuito equivalente de Norton** de la figura 7.3. Es una conductancia sin ruido de valor $G = 1/R$ en paralelo con una fuente de corriente ruidosa de valor cuadrático medio $E[I_{TN}^2]$, que viene dado por la ecuación (7.3).

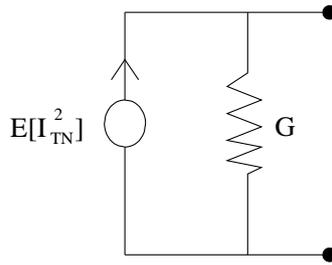


Figura 7.3 Equivalente Norton de una resistencia ruidosa.

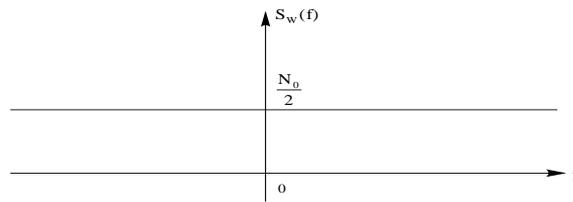


Figura 7.4 Densidad espectral de potencia del ruido blanco.

$$E[I_{TN}^2] = \frac{1}{R^2} E[V_{TN}^2] = 4KTG\Delta f [Amp^2] \quad (7.3)$$

Al igual que ocurría con el ruido tipo Shot, debido a que el número de electrones en el conductor es muy elevado, tienen igual propiedades estadísticas y son independientes entre sí, se puede aplicar el teorema del límite central y entonces el ruido térmico es Gaussiano con media cero.

Los cálculos se suelen hacer con **potencia transferida**. Normalmente se utiliza además el **teorema de máxima potencia transferida**, que dice que la potencia transferida a una carga R_L por una fuente con impedancia interna R ocurre cuando $R = R_L$. Bajo esta condición la potencia de la fuente se reparte por igual en la impedancia interna de la fuente y en la carga. La potencia disipada por la carga, que es la que nos interesa, se denomina en este caso **potencia disponible** y es la máxima posible que puede transferirse a una carga. La potencia de ruido disponible viene dada por la ecuación (7.4).

$$P_{TN} = KT\Delta f [W] \quad (7.4)$$

7.1.3 Ruido Blanco.

El análisis del ruido en los sistemas de comunicaciones se basa en una forma idealizada de ruido llamado **ruido blanco**, cuya densidad espectral de potencia es constante y no depende de la frecuencia. Se denomina blanco por analogía con la luz blanca que contiene componentes luminosas a todas las frecuencias con igual peso. La densidad espectral de potencia viene dada por la ecuación (7.5) y puede verse gráficamente en la figura 7.4.

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \quad (7.5)$$

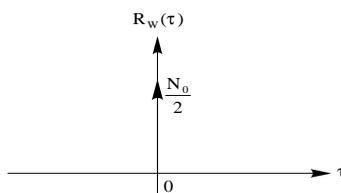


Figura 7.5 Autocorrelación del ruido blanco.

El factor $\frac{1}{2}$ se introduce en la ecuación (7.5) para indicar que la potencia se reparte por igual en frecuencias positivas y negativas. El valor N_0 viene dado en W/Hz. Este ruido no existe en la naturaleza puesto que su potencia media es infinita. N_0 se puede entender como la potencia media de ruido por unidad de ancho de banda.

Si se calcula la transformada inversa de Fourier de la densidad espectral de potencia se tendrá la autocorrelación que viene dada por la ecuación (7.6) y puede verse gráficamente en la figura 7.5. Puesto que la autocorrelación es cero para cualquier valor de τ excepto en el origen, se deduce que dos señales cualesquiera de ruido blanco están incorreladas.

$$R_W(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (7.6)$$

Si además el ruido es gaussiano, dos señales cualesquiera de ruido son estadísticamente independientes. El ruido blanco es útil en el análisis de sistemas de comunicaciones debido a que es muy sencillo trabajar con él gracias a sus propiedades. Interesa saber cual es la salida de un sistema cuando a la entrada hay ruido blanco. Si el ruido de entrada tiene un ancho de banda mayor que el ancho de banda del sistema, se puede sustituir el ruido a la entrada por ruido blanco, entonces el ruido a la salida es aproximadamente el mismo.

7.2 ANCHO DE BANDA EQUIVALENTE DE RUIDO O RECTANGULAR.

La potencia promedio del ruido de salida de un sistema paso bajo con **ancho de banda equivalente de ruido o rectangular** B cuando la entrada es ruido blanco es proporcional a dicho ancho de banda.

Si la densidad espectral de ruido a la entrada es $S_W(f) = \frac{N_0}{2}$, el ruido total a la salida suponiendo que $H(f)$ es la función de transferencia del sistema viene dado por la ecuación (7.7), donde se ha supuesto que la respuesta al impulso $h(t)$ es real y por lo tanto $|H(f)|$ par.

$$N = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = N_0 \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df \quad (7.7)$$

Si ahora tenemos la misma fuente de ruido y un filtro ideal paso bajo con ancho de banda B y amplitud en el origen la misma que el sistema $|H(0)|$, la potencia de ruido a la salida vendrá dada por la ecuación (7.8).

$$N = N_0 B |H(0)|^2 \quad (7.8)$$

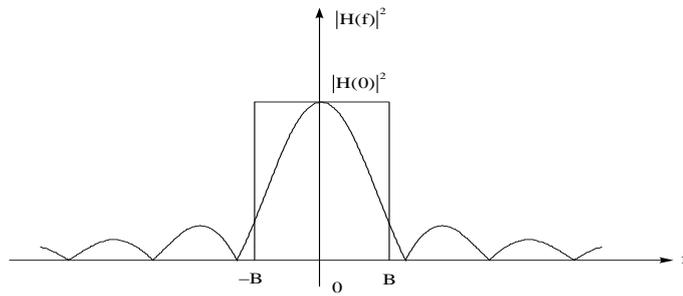


Figura 7.6 Definición del ancho de banda equivalente de ruido para un sistema paso bajo.

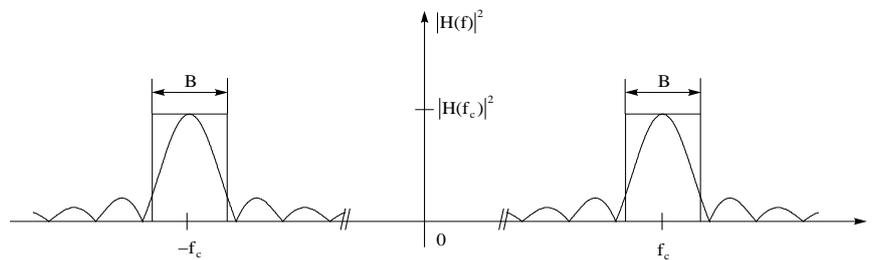


Figura 7.7 Definición de ancho de banda equivalente de ruido para un sistema paso banda.

Para que la potencia de ruido sea la misma en ambos casos igualando las ecuaciones (7.7) y (7.8) y despejando el valor de B se tiene la ecuación (7.9).

$$B = \frac{\int_0^{\infty} |H(f)|^2 df}{|H(0)|^2} \quad (7.9)$$

Por lo tanto el calcular el ancho de banda equivalente de ruido consiste en reemplazar el sistema paso bajo por un filtro ideal de ancho de banda el que se desea calcular y con amplitud el valor de la amplitud de la función de transferencia del sistema en el origen de modo que la potencia de ruido a la salida sea la misma cuando a la entrada hay ruido blanco. Esto puede verse en la figura 7.6.

Procediendo de forma similar para un sistema paso banda el ancho de banda equivalente de ruido o rectangular viene dado por la ecuación (7.10) y puede verse gráficamente en la figura 7.7, donde f_c es la frecuencia central de la banda de paso del sistema.

$$B = \frac{\int_0^{\infty} |H(f)|^2 df}{|H(f_c)|^2} \quad (7.10)$$

7.3 RUIDO DE BANDA ESTRECHA.

7.3.1 Definición.

En el receptor de los sistemas prácticos de comunicaciones que utilizan portadora, la señal de interés, junto con el ruido se suele procesar por filtros muy selectivos para dejar pasar únicamente la banda de frecuencias de interés, pero no el ruido fuera de dicha banda. Un filtro de este tipo suele ser un filtro de

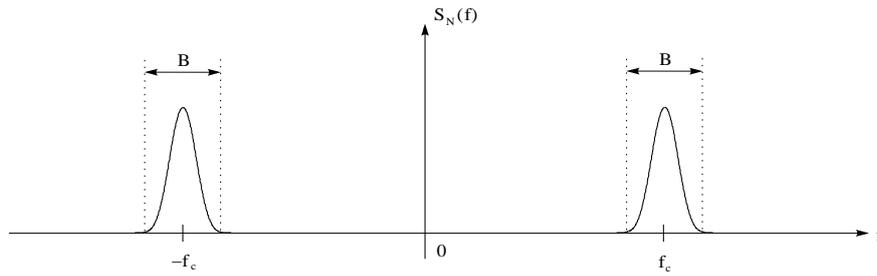


Figura 7.8 Ejemplo de ruido de banda estrecha en el dominio de la frecuencia.

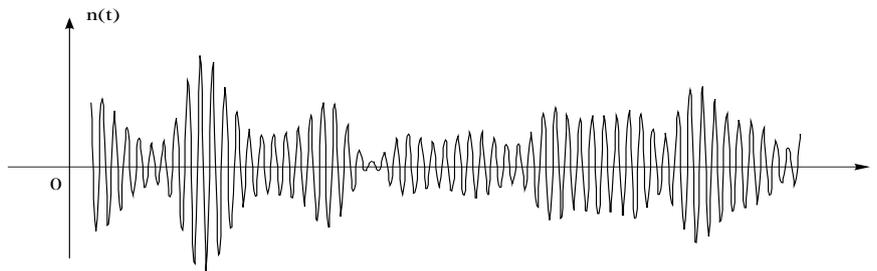


Figura 7.9 Ejemplo de ruido de banda estrecha en el dominio del tiempo.

banda estrecha para el que su frecuencia central es grande comparada con su ancho de banda. El ruido que aparece tras este tipo de filtros se denomina **ruido de banda estrecha** y un ejemplo de él puede verse en la figura 7.8 en el dominio de la frecuencia (densidad espectral de potencia) y en la figura 7.9 en el dominio del tiempo (una muestra del proceso estocástico ruidoso).

Consideremos un ruido $n(t)$ a la salida de un filtro paso banda de banda estrecha como respuesta a un ruido blanco, Gaussiano, de media cero y densidad espectral de potencia unidad, $w(t)$. Si $H(f)$ es la función de transferencia de ese filtro se tiene que la densidad espectral de potencia de ese ruido a la salida del sistema vendrá dada por la ecuación (7.11). En realidad cualquier ruido paso banda de banda estrecha se puede modelar como la salida de cierto sistema al que se aplica a su entrada ruido blanco.

$$S_N(f) = |H(f)|^2 \quad (7.11)$$

Se quiere representar el ruido $n(t)$ de banda estrecha en términos de sus componentes en fase y cuadratura de forma similar a como se hizo con señales determinísticas paso banda.

Vamos a suponer que f_c es la frecuencia central de la banda del ruido. La señal analítica positiva del ruido $n_+(t)$ se puede definir por la ecuación (7.12), donde $\hat{n}(t)$ es la transformada de Hilbert del ruido (de la muestra del ruido).

$$n_+(t) = n(t) + j\hat{n}(t) \quad (7.12)$$

La envolvente compleja del ruido $\tilde{n}(t)$ se puede calcular con la ecuación (7.13).

$$\tilde{n}(t) = n_+(t) \exp(-j2\pi f_c t) \quad (7.13)$$

La parte real de la envolvente compleja es la componente en fase $n_c(t)$ y la parte imaginaria es la componente en cuadratura $n_s(t)$, es decir se tiene la ecuación (7.14).

$$\tilde{n}(t) = n_c(t) + jn_s(t) \quad (7.14)$$

Otras expresiones para la componente en fase y la componente en cuadratura son las de las ecuaciones (7.15) y (7.16).

$$n_c(t) = n(t) \cos(2\pi f_c t) + \hat{n}(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (7.15)$$

$$n_s(t) = \hat{n}(t) \cos(2\pi f_c t) - n(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (7.16)$$

Eliminando $\hat{n}(t)$ en las ecuaciones (7.15) y (7.16) se llega a la forma canónica del ruido paso banda que es la ecuación (7.17).

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (7.17)$$

7.3.2 Propiedades.

1. Si el ruido paso banda $n(t)$ tiene media cero, sus componentes en fase y cuadratura también tienen media cero.

$\hat{n}(t)$ se calcula pasando el ruido $n(t)$ a través de un sistema cuya respuesta al impulso es $h(t) = \frac{1}{\pi t}$, por lo tanto si $n(t)$ tiene media cero $\hat{n}(t)$ también tiene media cero.

Según las ecuaciones (7.15) y (7.16), $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son sumas ponderadas de $n(t)$ y $\hat{n}(t)$, por lo tanto como $n(t)$ y $\hat{n}(t)$ tienen media cero se deduce que $n_c(t)$ y $n_s(t)$ también tiene media cero como se quería demostrar.

2. Si el ruido paso banda $n(t)$ es Gaussiano, entonces sus componentes en fase y cuadratura $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son Gaussianas cada una de ellas y además conjuntamente Gaussianas.

$\hat{n}(t)$ se calcula pasando el ruido $n(t)$ a través de un sistema cuya respuesta al impulso es $h(t) = \frac{1}{\pi t}$, por lo tanto si $n(t)$ es Gaussiano $\hat{n}(t)$ también y además $n(t)$ y $\hat{n}(t)$ son conjuntamente Gaussianos.

Según las ecuaciones (7.15) y (7.16), $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son combinación lineal de $n(t)$ y $\hat{n}(t)$, por lo tanto como $n(t)$ y $\hat{n}(t)$ son Gaussianos y conjuntamente Gaussianos se deduce que $n_c(t)$ y $n_s(t)$ también son Gaussianos y conjuntamente Gaussianos como se quería demostrar.

3. Si $n(t)$ es estacionario en sentido amplio y de media cero, entonces sus componentes en fase y cuadratura $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son estacionarios en sentido amplio y además conjuntamente estacionarios en sentido amplio.

Por la primera propiedad la medias de $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son cero y por lo tanto no dependen del tiempo. Vamos a ver que ocurre con las funciones de autocorrelación.

$\hat{n}(t)$ se calcula pasando el ruido $n(t)$ a través de un sistema cuya respuesta al impulso es $h(t) = \frac{1}{\pi t}$, por lo tanto si $n(t)$ es estacionario en sentido amplio $\hat{n}(t)$ también y además $n(t)$ y $\hat{n}(t)$ son estacionarios en sentido amplio de forma conjunta.

Pero ahora aunque por las ecuaciones (7.15) y (7.16), $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son combinación lineal de $n(t)$ y $\hat{n}(t)$, como los coeficientes $\cos(2\pi f_c t)$ y $\sin(2\pi f_c t)$ dependen del tiempo, no se puede deducir la estacionariedad de $n_c(t)$ y $n_s(t)$ directamente.

Sea $R_N(\tau)$ la función de autocorrelación del ruido $n(t)$. Puesto que la transformada de Hilbert únicamente modifica la información de fase del ruido y la autocorrelación solo depende de la información de amplitud, se tiene directamente la ecuación (7.18).

$$R_{\hat{N}}(\tau) = R_N(\tau) \quad (7.18)$$

Para calcular la correlación cruzada de $n(t)$ con $\hat{n}(t)$, $R_{N\hat{N}}(\tau)$, se tiene el desarrollo de la ecuación (7.19).

$$\begin{aligned} R_{N\hat{N}}(\tau) &= E[n(t+\tau)\hat{n}(t)] = E\left[n(t+\tau)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n(\lambda)}{t-\lambda}d\lambda\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E[n(t+\tau)n(\lambda)]}{t-\lambda}d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_N(t+\tau-\lambda)}{t-\lambda}d\lambda \\ &= \left|\begin{array}{l} t+\tau-\lambda = \lambda' \\ -d\lambda = d\lambda' \end{array}\right| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_N(\lambda')}{\lambda'-\tau}d\lambda' \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_N(\lambda')}{\tau-\lambda'}d\lambda' = -\hat{R}_N(\tau) \end{aligned} \quad (7.19)$$

Ahora para calcular la correlación cruzada de $\hat{n}(t)$ con $n(t)$, $R_{\hat{N}N}(\tau)$ se tiene el desarrollo de la ecuación (7.20).

$$\begin{aligned} R_{\hat{N}N}(\tau) &= R_{N\hat{N}}(-\tau) = -\hat{R}_N(-\tau) \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_N(\lambda)}{-\tau-\lambda}d\lambda = \left|\begin{array}{l} \lambda' = -\lambda \\ d\lambda' = -d\lambda \end{array}\right| \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_N(\lambda')}{-\tau+\lambda'}d\lambda' = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_N(\lambda')}{\tau-\lambda'}d\lambda' \\ &= \hat{R}_N(\tau) \end{aligned} \quad (7.20)$$

Usando las ecuaciones (7.18), (7.19) y (7.20) se puede determinar la autocorrelación de la componente en fase según el desarrollo de la ecuación (7.21). Como no depende de t la componente en fase es estacionaria en sentido amplio.

$$\begin{aligned} R_{N_c}(\tau) &= E[n_c(t+\tau)n_c(t)] \\ &= E[(n(t+\tau)\cos(2\pi f_c(t+\tau)) + \hat{n}(t+\tau)\sin(2\pi f_c(t+\tau))) \\ &\quad (n(t)\cos(2\pi f_c t) + \hat{n}(t)\sin(2\pi f_c t))] \\ &= R_N(\tau)[\cos(2\pi f_c(t+\tau))\cos(2\pi f_c t) \\ &\quad + \sin(2\pi f_c(t+\tau))\sin(2\pi f_c t)] \\ &\quad + \hat{R}_N(\tau)[\sin(2\pi f_c(t+\tau))\cos(2\pi f_c t) \\ &\quad - \cos(2\pi f_c(t+\tau))\sin(2\pi f_c t)] \\ &= R_N(\tau)\cos(2\pi f_c \tau) + \hat{R}_N(\tau)\sin(2\pi f_c \tau) \end{aligned} \quad (7.21)$$

Usando las ecuaciones (7.18), (7.19) y (7.20) se puede determinar la autocorrelación de la componente en cuadratura según el desarrollo de la ecuación (7.22). Como no depende de t la componente en cuadratura es estacionaria en sentido amplio.

$$\begin{aligned}
R_{N_s}(\tau) &= E[n_s(t+\tau)n_s(t)] \\
&= E[(\hat{n}(t+\tau)\cos(2\pi f_c(t+\tau)) - n(t+\tau)\sin(2\pi f_c(t+\tau))) \\
&\quad (\hat{n}(t)\cos(2\pi f_c t) - n(t)\sin(2\pi f_c t))] \\
&= R_N(\tau)[\cos(2\pi f_c(t+\tau))\cos(2\pi f_c t) \\
&\quad + \sin(2\pi f_c(t+\tau))\sin(2\pi f_c t)] \\
&\quad + \hat{R}_N(\tau)[\sin(2\pi f_c(t+\tau))\cos(2\pi f_c t) \\
&\quad - \cos(2\pi f_c(t+\tau))\sin(2\pi f_c t)] \\
&= R_N(\tau)\cos(2\pi f_c \tau) + \hat{R}_N(\tau)\sin(2\pi f_c \tau)
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Comparando las ecuaciones (7.21) y (7.22) se puede ver que la autocorrelación de la componente en fase y la de la componente en cuadratura coinciden, es decir se tiene la ecuación (7.23).

$$R_{N_c}(\tau) = R_{N_s}(\tau) \tag{7.23}$$

Usando las ecuaciones (7.18), (7.19) y (7.20) se puede determinar la correlación cruzada de la componente en fase con la componente en cuadratura según el desarrollo de la ecuación (7.24). Como no depende de t la componente en fase y cuadratura son conjuntamente estacionarias en sentido amplio.

$$\begin{aligned}
R_{N_c N_s}(\tau) &= E[n_c(t+\tau)n_s(t)] \\
&= E[(n(t+\tau)\cos(2\pi f_c(t+\tau)) + \hat{n}(t+\tau)\sin(2\pi f_c(t+\tau))) \\
&\quad (\hat{n}(t)\cos(2\pi f_c t) - n(t)\sin(2\pi f_c t))] \\
&= R_N(\tau)[\sin(2\pi f_c(t+\tau))\cos(2\pi f_c t) \\
&\quad - \cos(2\pi f_c(t+\tau))\sin(2\pi f_c t)] \\
&\quad + \hat{R}_N(\tau)[- \cos(2\pi f_c(t+\tau))\cos(2\pi f_c t) \\
&\quad - \sin(2\pi f_c(t+\tau))\sin(2\pi f_c t)] \\
&= R_N(\tau)\sin(2\pi f_c \tau) - \hat{R}_N(\tau)\cos(2\pi f_c \tau)
\end{aligned} \tag{7.24}$$

La correlación cruzada de la componente en cuadratura con la componente en fase viene dada por la ecuación (7.25).

$$\begin{aligned}
R_{N_s N_c}(\tau) &= R_{N_c N_s}(-\tau) \\
&= R_N(-\tau)\sin(-2\pi f_c \tau) - \hat{R}_N(-\tau)\cos(-2\pi f_c \tau) \\
&= \hat{R}_N(\tau)\cos(2\pi f_c \tau) - R_N(\tau)\sin(2\pi f_c \tau)
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Comparando las ecuaciones (7.24) y (7.25) se puede ver que cual es la relación entre la correlación cruzada de la componente en fase y la componente en cuadratura y la correlación cruzada de la componente en cuadratura y la componente en fase según la ecuación (7.26).

$$R_{N_c N_s}(\tau) = -R_{N_s N_c}(\tau) \tag{7.26}$$

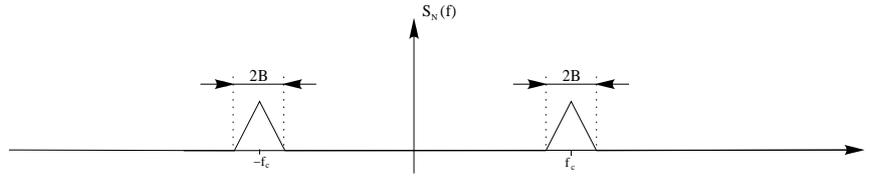


Figura 7.10 Densidad espectral de potencia del ruido paso banda, $S_N(f)$.

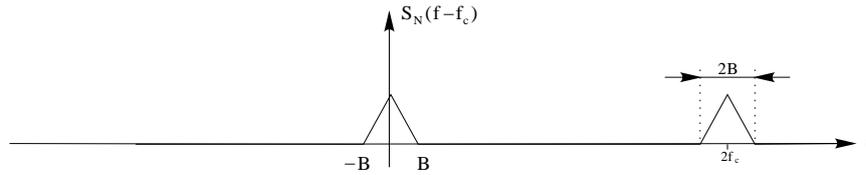


Figura 7.11 Densidad espectral de potencia de $S_N(f - f_c)$.

4. La componente en fase y la componente en cuadratura tienen la misma densidad espectral de potencia que viene dada por la ecuación (7.27). Donde se supone que $S_N(f)$ ocupa el intervalo de frecuencias $f_c - B \leq |f| \leq f_c + B$ y $B \ll f_c$.

$$S_{N_c}(f) = S_{N_s}(f) = \begin{cases} S_N(f - f_c) + S_N(f + f_c) & -B \leq f \leq B \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad (7.27)$$

Se puede utilizar el desarrollo de la ecuación (7.28) para calcular la transformada de Fourier de $\hat{R}_N(\tau)$, donde $S_N(f)$ es la densidad espectral de potencia del ruido.

$$F[\hat{R}_N(\tau)] = -j \operatorname{sgn}(f)F[R_N(\tau)] = -j \operatorname{sgn}(f)S_N(f) \quad (7.28)$$

Teniendo en cuenta las (7.22), (7.23) y (7.28), se puede determinar la densidad espectral de la componente en fase y cuadratura siguiendo el desarrollo de la ecuación (7.29).

$$\begin{aligned} S_{N_c}(f) &= S_{N_s}(f) = \frac{1}{2}[S_N(f - f_c) + S_N(f + f_c)] \\ &- \frac{1}{2}[S_N(f - f_c) \operatorname{sgn}(f - f_c) - S_N(f + f_c) \operatorname{sgn}(f + f_c)] \\ &= \frac{1}{2}S_N(f - f_c)[1 - \operatorname{sgn}(f - f_c)] \\ &+ \frac{1}{2}S_N(f + f_c)[1 + \operatorname{sgn}(f + f_c)] \end{aligned} \quad (7.29)$$

Suponiendo que la densidad espectral de potencia del ruido paso banda, $S_N(f)$ sea la que se puede ver en la figura 7.10, entonces $S_N(f - f_c)$ será desplazarse hacia la derecha f_c dicha densidad espectral como puede verse en la figura 7.11 y $S_N(f + f_c)$ desplazarse hacia la izquierda f_c como puede verse en la figura 7.12. La función $1 - \operatorname{sgn}(f - f_c)$ puede verse en la figura 7.13 y la función $1 + \operatorname{sgn}(f + f_c)$ en la figura 7.14. Estas dos últimas funciones tienen amplitud 2 que se va con el factor $\frac{1}{2}$ de la ecuación (7.29). Teniendo en cuenta las figuras 7.11, 7.12, 7.13 y 7.14 se puede ver que las ecuaciones (7.27) y (7.29) son iguales quedando demostrada la propiedad.

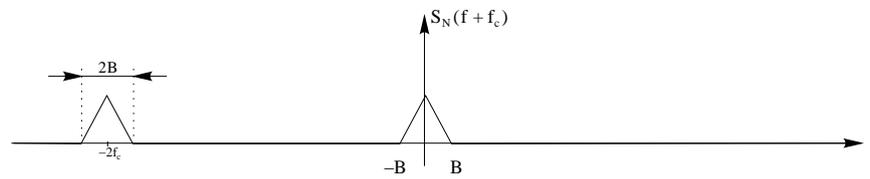


Figura 7.12 Densidad espectral de potencia de $S_N(f + f_c)$.

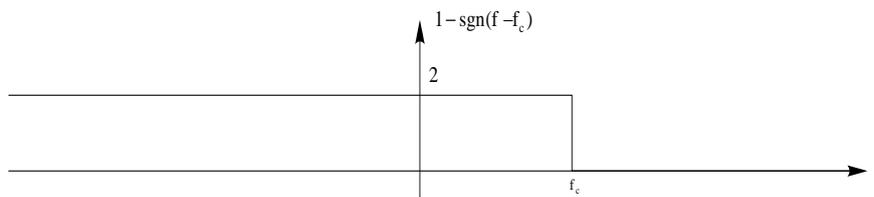


Figura 7.13 Función $1 - \operatorname{sgn}(f - f_c)$.

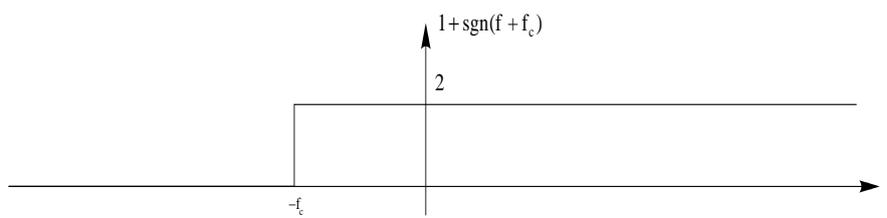


Figura 7.14 Función $1 + \operatorname{sgn}(f + f_c)$.

5. Si un ruido de banda estrecha $n(t)$ tiene media cero, entonces la componentes en fase $n_c(t)$ y la componente en cuadratura $n_s(t)$ tienen la misma varianza que $n(t)$.

Por la primera propiedad si el ruido $n(t)$ tiene media cero, las componentes en fase y cuadratura también tienen media cero. El área debajo de la densidad espectral de potencia es igual al valor cuadrático medio, pero por tener medias cero, entonces el valor cuadrático medio y la varianza coinciden, por lo tanto el área debajo de la densidad espectral de potencia es la varianza tanto para el ruido $n(t)$ como para las componentes en fase y cuadratura. Según la ecuación (7.27) puede verse que el área debajo de la densidad espectral de potencia de $n(t)$ coincide con el área debajo de la componente en fase $n_c(t)$ y con el área debajo de la componente en cuadratura $n_s(t)$. Entonces las varianzas serán iguales según lo dicho anteriormente.

6. La densidad espectral cruzada de las componentes en fase y cuadratura viene dada por la ecuación (7.30).

$$S_{N_c N_s}(f) = -S_{N_s N_c}(f) = \begin{cases} j[S_N(f + f_c) - S_N(f - f_c)] & -B \leq f \leq B \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad (7.30)$$

Tomando transformada de Fourier a las ecuaciones (7.24) y (7.25) se tiene el desarrollo de la ecuación (7.31).

$$\begin{aligned} S_{N_c N_s}(f) &= -S_{N_s N_c}(f) = -\frac{j}{2}[S_N(f - f_c) - S_N(f + f_c)] \\ &+ \frac{j}{2}[S_N(f - f_c) \operatorname{sgn}(f - f_c) + S_N(f + f_c) \operatorname{sgn}(f + f_c)] \\ &= \frac{j}{2}S_N(f + f_c)[1 + \operatorname{sgn}(f + f_c)] \\ &- \frac{j}{2}S_N(f - f_c)[1 - \operatorname{sgn}(f - f_c)] \end{aligned} \quad (7.31)$$

Teniendo en cuenta las figuras 7.11, 7.12, 7.13 y 7.14 se puede ver que las ecuaciones (7.30) y (7.31) son iguales quedando demostrada la propiedad.

7. Si un ruido paso banda $n(t)$ es Gaussiano con media cero y su densidad espectral de potencia $S_N(f)$ es localmente simétrica alrededor de $\pm f_c$, su componente en fase $n_c(t)$ y su componente en cuadratura $n_s(t)$ son estadísticamente independientes.

Si $S_N(f)$ es localmente simétrica respecto a $\pm f_c$ se cumple la ecuación (7.32).

$$S_N(f - f_c) = S_N(f + f_c) \quad \text{para } -B < f < B \quad (7.32)$$

Si se calcula la densidad espectral cruzada $S_{N_c N_s}(f) = -S_{N_s N_c}(f)$ utilizando la ecuación (7.30) y se tiene en cuenta la ecuación (7.32) es igual a cero. Por lo tanto se tiene la ecuación (7.33) y entonces la componente en fase $n_c(t)$ y la componente en cuadratura $n_s(t)$ son ortogonales.

$$E[N_c(t_k + \tau)N_s(t_k)] = 0 \quad \forall \tau \quad (7.33)$$

Si $n(t)$ es gaussiano con media cero, por la primera y segunda propiedad $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son también Gaussianos y con media cero y además conjuntamente Gaussianos. Por ser $n_c(t)$ y $n_s(t)$ ortogonales y con media cero son también incorrelados y por ser Gaussianos estadísticamente independientes como se quería demostrar.

Por lo tanto se puede poner la función densidad de probabilidad conjunta de la componente en fase y de la componente en cuadratura como el producto de las marginales según la ecuación (7.34).

$$\begin{aligned}
f_{N_c(t_k)N_s(t_i)}(n_c, n_s) &= f_{N_c(t_k)}(n_c)f_{N_s(t_i)}(n_s) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{n_c^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{n_s^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{n_c^2 + n_s^2}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned} \tag{7.34}$$

7.3.3 Representación de un Ruido de Banda Estrecha en Función de su Envolvente y Fase.

Se ha considerado la representación de un ruido de banda estrecha $n(t)$ en términos de la componente en fase $n_c(t)$ y la componente en cuadratura $n_s(t)$. También se puede representar el ruido $n(t)$ en términos de la envolvente $r(t)$ y la fase $\psi(t)$. La expresión del ruido $n(t)$ en función de la envolvente y la fase puede verse en la ecuación (7.35).

$$n(t) = r(t) \cos(2\pi f_c t + \psi(t)) \tag{7.35}$$

La relación entre la envolvente y la fase y las componentes en fase y cuadratura puede verse en la ecuación (7.36) y (7.37).

$$r(t) = \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} \tag{7.36}$$

$$\psi(t) = \arctan\left(\frac{n_s(t)}{n_c(t)}\right) \tag{7.37}$$

Si se desea saber cual es la relación entre las componentes en fase y cuadratura y la envolvente y fase se pueden utilizar las ecuaciones (7.38) y (7.39).

$$n_c(t) = r(t) \cos(\psi(t)) \tag{7.38}$$

$$n_s(t) = r(t) \sin(\psi(t)) \tag{7.39}$$

Vamos a suponer que el ruido $n(t)$ es Gaussiano y de media cero, entonces por la primera y segunda propiedad se tiene que las componentes en fase y cuadratura también son Gaussianas y de media cero. Nos interesa saber cual es la distribución estadística de la envolvente y de la fase. Sean N_c y N_s las variables aleatorias obtenidas a partir de la componente en fase y de la componente en cuadratura fijando un instante determinado del tiempo. Suponiendo que se pueda aplicar la propiedad siete, dichas variables aleatorias son Gaussianas independientes, con media cero y varianza σ^2 , la función densidad de probabilidad conjunta dada por la ecuación (7.40).

$$f_{N_c, N_s}(n_c, n_s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{n_c^2 + n_s^2}{2\sigma^2}\right) \tag{7.40}$$

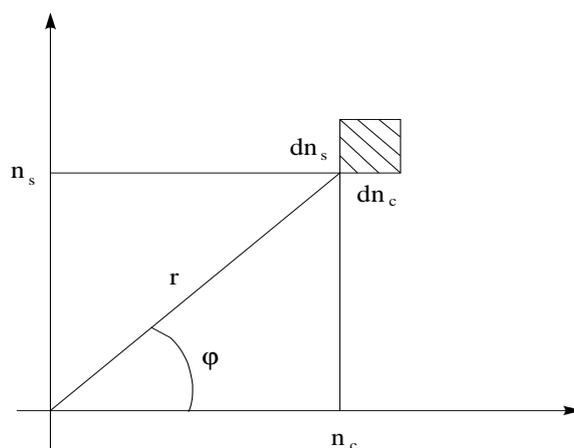


Figura 7.15 Para el cálculo de la probabilidad de estar en la zona rayada para N_c y N_s .

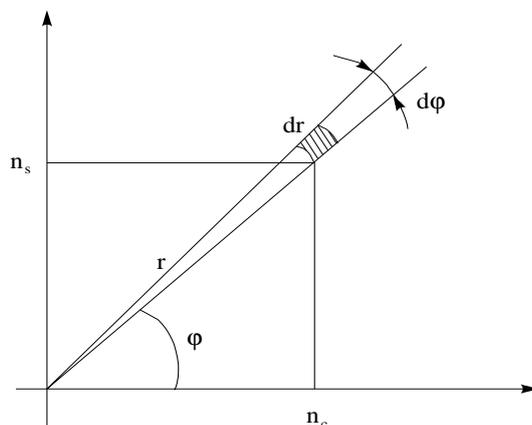


Figura 7.16 Para el cálculo de la probabilidad de estar en la zona rayada para R y Ψ .

La probabilidad de que la variable aleatoria N_c suceda entre n_c y $n_c + dn_c$ y N_s suceda entre n_s y $n_s + dn_s$, se dice, la zona rayada de la figura 7.15 viene dada por la ecuación (7.41).

$$f_{N_c, N_s}(n_c, n_s) dn_c dn_s = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{n_c^2 + n_s^2}{2\sigma^2}\right) dn_c dn_s \quad (7.41)$$

Si definimos la transformación de la ecuación (7.42), el área de la zona rayada de la figura 7.15 se puede igualar de forma diferencial al área rayada de la figura 7.16 es decir se cumpliría la ecuación (7.43).

$$\begin{aligned} n_c &= r \cos \psi & r &= \sqrt{n_c^2 + n_s^2} \\ n_s &= r \sin \psi & \psi &= \arctan\left(\frac{n_s}{n_c}\right) \end{aligned} \quad (7.42)$$

$$dn_c dn_s = r dr d\psi \quad (7.43)$$

Si se definen las variables aleatorias R y Ψ obtenidas a partir de la envolvente y la fase fijando un instante de tiempo, la probabilidad de la ecuación (7.41) se puede poner según la ecuación (7.44).

$$\frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr d\psi \quad (7.44)$$

Por lo tanto a partir de la ecuación (7.44) se puede deducir que la función densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias R y Ψ viene dada por la ecuación (7.45).

$$f_{R,\Psi}(r, \psi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (7.45)$$

La función densidad de probabilidad de la ecuación (7.45) no depende la variable aleatoria angular ψ , por lo que se puede deducir que R y Ψ son estadísticamente independientes. Entonces la función densidad de probabilidad conjunta se puede poner como el producto de las marginales según la ecuación (7.46).

$$f_{R,\Psi}(r, \psi) = f_R(r)f_\Psi(\psi) \quad (7.46)$$

Se tiene que la variable aleatoria R solo tiene sentido para valores positivos y la variable aleatoria Ψ para valores en un intervalo de 2π , por ejemplo de 0 a 2π y en particular esta última es una variable aleatoria uniforme, es decir su función densidad de probabilidad está dada por la ecuación (7.47). La función densidad de probabilidad de la envolvente viene dada por la ecuación (7.48).

$$f_\Psi(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq \psi < 2\pi \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases} \quad (7.47)$$

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) & r \geq 0 \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases} \quad (7.48)$$

Una variable aleatoria con una función densidad de probabilidad como la dada en la ecuación (7.48) para R , se dice que tiene **distribución de Rayleigh**.

Si la normalizamos respecto a σ para dibujarla utilizando el cambio de variable de la ecuación (7.49) y si tenemos en cuenta que para que el área debajo de la función densidad de probabilidad siga siendo unidad es necesario realizar el escalado en amplitud de se indica en la ecuación (7.50), la función de distribución normalizada de Rayleigh es la dada por la ecuación (7.51).

$$\nu = \frac{r}{\sigma} \quad (7.49)$$

$$f_V(\nu) = \sigma f_R(r) \quad (7.50)$$

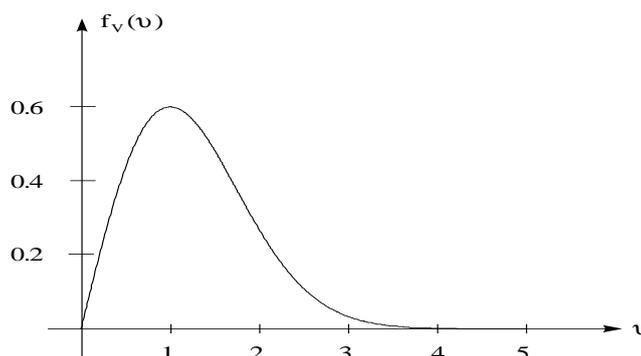


Figura 7.17 Función densidad de probabilidad de una variable aleatoria Rayleigh.

$$f_V(\nu) = \begin{cases} \nu \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right) & \nu \geq 0 \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases} \quad (7.51)$$

La función densidad de probabilidad de una variable Rayleigh dada por la ecuación (7.51) puede verse gráficamente en la figura 7.17. Tiene un máximo para $\nu = 1$ donde la función vale $f_V(\nu) = 0,607$. Para valores negativos de ν vale cero puesto que la envolvente nunca puede tomar un valor negativo.

7.3.4 Envolvente de una Señal Sinusoidal junto con Ruido de Banda Estrecha.

Tenemos una señal sinusoidal $A \cos(2\pi f_c t)$, donde A y f_c son constantes, y un ruido de banda estrecha $n(t)$ centrado en f_c . Una señal muestra $x(t)$ vendrá dada por la ecuación (7.52).

$$x(t) = A \cos(2\pi f_c t) + n(t) \quad (7.52)$$

Si se representa la señal de la ecuación (7.52) de forma canónica se tiene la ecuación (7.53), donde $n_c(t)$ es la componente en fase del ruido $n(t)$, $n_s(t)$ es la componente en cuadratura y $n_c'(t)$ viene dado por la ecuación (7.54).

$$x(t) = n_c'(t) \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (7.53)$$

$$n_c'(t) = n_c(t) + A \quad (7.54)$$

Si se asume que $n(t)$ es Gaussiano con media cero, varianza σ^2 y que se cumple la propiedad siete se tiene lo siguiente:

1. $n_c'(t)$ y $n_s(t)$ son Gaussianos y estadísticamente independientes.
2. La media de $n_c'(t)$ es A y la de $n_s(t)$ es cero.

3. La varianza de $n_c'(t)$ y de $n_s(t)$ es σ^2 .

Entonces si N_c' y N_s son variables aleatorias correspondientes a los procesos $n_c'(t)$ y $n_s(t)$ para un instante de tiempo fijado, su función densidad de probabilidad conjunta vendrá dada por la ecuación (7.55).

$$f_{N_c', N_s}(n_c', n_s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{(n_c' - A)^2 + n_s^2}{2\sigma^2} \right] \quad (7.55)$$

Si $r(t)$ es la envolvente y $\psi(t)$ la fase de la señal $x(t)$, estarán relacionadas con $n_c'(t)$ y $n_s(t)$ por la ecuación (7.56) o por la ecuación (7.57).

$$\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{(n_c'(t))^2 + n_s^2(t)} \\ \psi(t) &= \arctan \left(\frac{n_s(t)}{n_c'(t)} \right) \end{aligned} \quad (7.56)$$

$$\begin{aligned} n_c'(t) &= r(t) \cos(\psi(t)) \\ n_s(t) &= r(t) \sin(\psi(t)) \end{aligned} \quad (7.57)$$

Si R y Ψ son dos variables aleatorias obtenidas a partir de $r(t)$ y $\psi(t)$ fijado un determinado instante de tiempo, siguiendo un procedimiento similar al desarrollado en el apartado 7.3.3 se puede calcular la función densidad de probabilidad conjunta en R y Ψ viendo dada por la ecuación (7.58). Hay que tener en cuenta que la envolvente nunca puede tomar valores negativos y que la fase toma valores dentro de un intervalo de tamaño 2π , por ejemplo entre 0 y 2π .

$$f_{R, \Psi}(r, \psi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp \left(-\frac{r^2 + A^2 - 2Ar \cos \psi}{2\sigma^2} \right) \quad (7.58)$$

Como puede verse en la ecuación (7.58) es imposible poner la función densidad de probabilidad conjunta en R y Ψ como el producto de las densidades de probabilidad marginales y por lo tanto R y Ψ no son estadísticamente independientes, salvo que A sea cero. Esto es debido al término $r \cos \psi$.

Estamos interesados en saber cual es la función densidad de probabilidad de R , para ello hay que integrar la función densidad de probabilidad conjunta en R y Ψ entre 0 y 2π según la ecuación (7.59).

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_0^{2\pi} f_{R, \Psi}(r, \psi) d\psi \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp \left(-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma^2} \right) \int_0^{2\pi} \exp \left(\frac{Ar}{\sigma^2} \cos \psi \right) d\psi \end{aligned} \quad (7.59)$$

La integral de la derecha no se puede resolver de forma analítica y constituye una de las familias de **funciones Bessel**, en particular es la función de Bessel modificada de primera clase y orden cero. La expresión general para dicha integral puede verse en la ecuación (7.60). Entonces la función densidad de probabilidad marginal de R vendrá dada por la ecuación (7.61) haciendo $x = \frac{Ar}{\sigma^2}$.

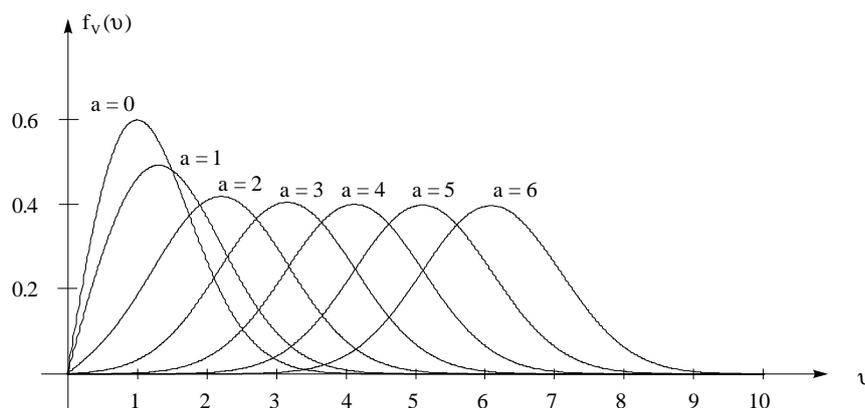


Figura 7.18 Función densidad de probabilidad de una variable aleatoria Rician.

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos \psi) d\psi \quad (7.60)$$

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{Ar}{\sigma^2}\right) \quad (7.61)$$

Una variable aleatoria que tenga por función densidad de probabilidad la dada por la ecuación (7.61) se dice que tiene **distribución de Rician**.

Para poder dibujarla se la puede normalizar respecto a σ haciendo el cambio de variable de la ecuación (7.62). Para que el área debajo de la función densidad de probabilidad siga siendo unidad, es necesario escalar la amplitud según se indica en la ecuación (7.63). Entonces la función densidad de probabilidad de la envolvente normalizada vendrá dada por la ecuación (7.64).

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{r}{\sigma} \\ a &= \frac{A}{\sigma} \end{aligned} \quad (7.62)$$

$$f_V(\nu) = \sigma f_R(r) \quad (7.63)$$

$$f_V(\nu) = \nu \exp\left(-\frac{\nu^2 + a^2}{2}\right) I_0(a\nu) \quad (7.64)$$

La función densidad de probabilidad de una variable Rician dada por la ecuación (7.64) puede verse en la figura 7.18. Se ha tomado como parámetro el valor a .

A partir de la ecuación (7.64) y de la figura 7.18 se puede ver lo siguiente:

1. Para $a = 0$ tenemos la distribución de Rayleigh.

2. Para un entorno de $\nu = a$ y para valores de a grandes, la distribución de la variable aleatoria se puede considerar aproximadamente Gaussiana. El que a sea grande es equivalente a que A sea grande respecto a σ , se decir, que la portadora sea grande frente al ruido.

ANCHO DE BANDA DE UNA SEÑAL.

Muchas veces al analizar un sistema de comunicaciones interesa trabajar con señales estrictamente limitadas en banda, lo que significa que no haya componentes relevantes de señal fuera de la banda de interés. Pero dichas señales son irrealizables temporalmente puesto que una señal estrictamente limitada en banda tiene duración infinita en el tiempo. Por otro lado una señal realizable temporalmente (finita) va a tener ancho de banda infinito, por ello que no existe un criterio único para la definición del ancho de banda.

8.1 SEÑALES Y SISTEMAS BANDA BASE.

Utilizando la figura 8.1 como densidad espectral de energía para señales de energía, como densidad espectral de potencia para señales de potencia y como módulo al cuadrado de la función de transferencia para sistemas los criterios, ordenados de menor a mayor, son los siguientes:

1. **Ancho de Banda a 3 dB.** Para señales de energía es aquella frecuencia para la que la densidad espectral de energía a caído a la mitad del máximo. Para frecuencias mayores no se supera ese valor.
Para señales de potencia es aquella frecuencia para la que la densidad espectral de potencia a caído a la mitad del máximo. Para frecuencias mayores no se supera ese valor.
Para sistemas es aquella frecuencia para la que el módulo al cuadrado de la función de transferencia a caído a la mitad del máximo. Para frecuencias mayores no se supera ese valor.
2. **Ancho de Banda Equivalente Rectangular.** Para señales de energía se construye una densidad espectral de energía rectangular con igual energía que la señal original y amplitud igual al valor máximo de la densidad espectral de energía. En ancho de banda será la frecuencia a partir de la cual la densidad espectral construida vale siempre cero.
Para señales de potencia se construye una densidad espectral de potencia rectangular con igual potencia que la señal original y amplitud igual al valor máximo de la densidad espectral de potencia. En ancho de banda será la frecuencia a partir de la cual la densidad espectral construida vale siempre cero.
Para sistemas se construye una función de transferencia cuyo módulo al cuadrado sea rectangular con igual área que la del módulo al cuadrado de la función de transferencia original y amplitud igual al valor máximo de la función de transferencia. En ancho de banda será la frecuencia a partir de la cual la función de transferencia construida vale siempre cero.
3. **Ancho de Banda hasta Nulo.** Para señales de energía es aquella frecuencia que contiene el lóbulo principal de la señal o la primera frecuencia a la que la densidad espectral de energía se hace cero.
Para señales de potencia es aquella frecuencia que contiene el lóbulo principal de la señal o la primera frecuencia a la que la densidad espectral de potencia se hace cero.
Para sistemas es aquella frecuencia que contiene el lóbulo principal de la función de transferencia o la primera frecuencia a la que la función de transferencia se hace cero.
4. **Ancho de Banda que Contiene una Fracción de la Energía, Potencia o área.** Para señales de energía es aquella frecuencia que contiene el 99% de la energía de la señal, es decir, el 0,5% de energía

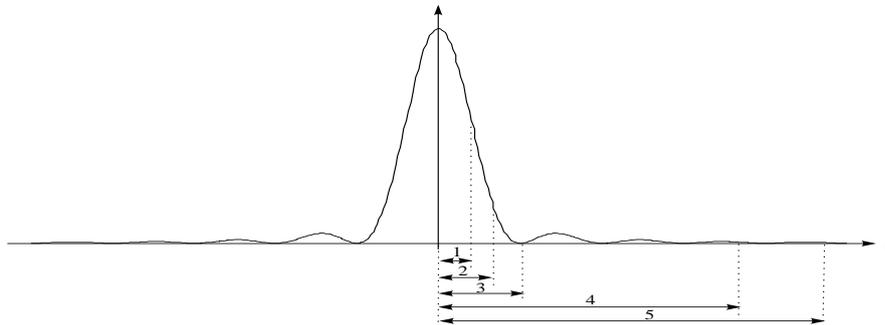


Figura 8.1 Criterios de ancho de banda para una señal banda base.

cae fuera de su ancho de banda para frecuencias positivas y el 0,5 % de energía cae fuera de su ancho de banda para frecuencias negativas.

Para señales de potencia es aquella frecuencia que contiene el 99 % de la potencia de la señal, es decir, el 0,5 % de potencia cae fuera de su ancho de banda para frecuencias positivas y el 0,5 % de potencia cae fuera de su ancho de banda para frecuencias negativas.

Para sistemas es aquella frecuencia que contiene el 99 % del área debajo del módulo al cuadrado de la función de transferencia, es decir, el 0,5 % del área cae fuera de su ancho de banda para frecuencias positivas y el 0,5 % del área cae fuera de su ancho de banda para frecuencias negativas.

5. **Densidad Espectral o Módulo de la Función de Transferencia Acotada.** Para señales de energía es aquella frecuencia a partir de la cual la densidad espectral de energía ya no supera un determinado umbral de atenuación respecto al valor máximo de la densidad espectral. Ese umbral de atenuación se suele tomar de 35 o de 50 dB.

Para señales de potencia es aquella frecuencia a partir de la cual la densidad espectral de potencia ya no supera un determinado umbral de atenuación respecto al valor máximo de la densidad espectral. Ese umbral de atenuación se suele tomar de 35 o de 50 dB.

Para sistemas es aquella frecuencia a partir de la cual el módulo al cuadrado de la función de transferencia ya no supera un determinado umbral de atenuación respecto al valor máximo del módulo al cuadrado de la función de transferencia. Ese umbral de atenuación se suele tomar de 35 o de 50 dB.

6. **Ancho de Banda Absoluto.** Para señales de energía es aquella frecuencia a partir de la cual la densidad espectral de energía es nula. Para señales de energía realizables temporalmente este ancho de banda es infinito.

Para señales de potencia es aquella frecuencia a partir de la cual la densidad espectral de potencia es nula. Para señales de potencia realizables temporalmente este ancho de banda es infinito.

Para sistemas es aquella frecuencia a partir de la cual la función de transferencia es nula. Para sistemas realizables temporalmente este ancho de banda es infinito.

8.2 SEÑALES Y SISTEMAS PASO BANDA.

Utilizando la figura 8.2 como densidad espectral de energía para señales de energía, como densidad espectral de potencia para señales de potencia y como módulo al cuadrado de la función de transferencia para sistemas los criterios, ordenados de menor a mayor, son los siguientes:

1. **Ancho de Banda a 3 dB.** Para señales de energía es aquel intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia central para el que la densidad espectral de energía ha caído a la mitad del máximo. Para frecuencias mayores o menores no se supera ese valor.

Para señales de potencia es aquel intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia central para el que la densidad espectral de potencia ha caído a la mitad del máximo. Para frecuencias mayores o menores no se supera ese valor.

Para sistemas es aquel intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia central para la que el módulo al cuadrado de la función de transferencia ha caído a la mitad del máximo. Para frecuencias mayores o menores no se supera ese valor.

2. **Ancho de Banda Equivalente Rectangular.** Para señales de energía se construye una densidad espectral de energía rectangular en torno a la frecuencia central con igual energía que la señal original y amplitud igual al valor máximo de la densidad espectral de energía. En ancho de banda será el intervalo de frecuencias fuera del cual la densidad espectral construida vale siempre cero.

Para señales de potencia se construye una densidad espectral de potencia rectangular en torno a la frecuencia central con igual potencia que la señal original y amplitud igual al valor máximo de la densidad espectral de potencia. En ancho de banda será el intervalo de frecuencias fuera del cual la densidad espectral construida vale siempre cero.

Para sistemas se construye una función de transferencia cuyo módulo al cuadrado sea rectangular en torno a la frecuencia central con igual área que la del módulo al cuadrado de la función de transferencia original y amplitud igual al valor máximo de la función de transferencia. En ancho de banda será el intervalo de frecuencias fuera del cual la función de transferencia construida vale siempre cero.

3. **Ancho de Banda Nulo a Nulo.** Para señales de energía es aquel intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia central que contiene el lóbulo principal de la señal o el intervalo de frecuencias menor en cuyos extremos la densidad espectral de energía se hace cero.

Para señales de potencia es aquel intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia central que contiene el lóbulo principal de la señal o el intervalo de frecuencias menor en cuyos extremos la densidad espectral de potencia se hace cero.

Para sistemas es aquel intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia central que contiene el lóbulo principal de la función de transferencia o el intervalo de frecuencias menor en cuyos extremos la función de transferencia se hace cero.

4. **Ancho de Banda que Contiene una Fracción de la Energía, Potencia o área.** Para señales de energía es aquel intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia central que contiene el 99 % de la energía de la señal, es decir, el 0,5 % de energía cae fuera de su ancho de banda para frecuencias positivas y el 0,5 % de energía cae fuera de su ancho de banda para frecuencias negativas.

Para señales de potencia es aquel intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia central que contiene el 99 % de la potencia de la señal, es decir, el 0,5 % de potencia cae fuera de su ancho de banda para frecuencias positivas y el 0,5 % de potencia cae fuera de su ancho de banda para frecuencias negativas.

Para sistemas es aquel intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia central que contiene el 99 % del área debajo del módulo al cuadrado de la función de transferencia, es decir, el 0,5 % del área cae fuera de su ancho de banda para frecuencias positivas y el 0,5 % del área cae fuera de su ancho de banda para frecuencias negativas.

5. **Densidad Espectral o Módulo de la Función de Transferencia Acotada.** Para señales de energía es aquel intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia central a partir del cual la densidad espectral de energía ya no supera un determinado umbral de atenuación respecto al valor máximo de la densidad espectral. Ese umbral de atenuación se suele tomar de 35 o de 50 dB.

Para señales de potencia es aquel intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia central a partir del cual la densidad espectral de potencia ya no supera un determinado umbral de atenuación respecto al valor máximo de la densidad espectral. Ese umbral de atenuación se suele tomar de 35 o de 50 dB.

Para sistemas es aquel intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia central a partir del cual el módulo al cuadrado de la función de transferencia ya no supera un determinado umbral de atenuación respecto al valor máximo del módulo al cuadrado de la función de transferencia. Ese umbral de atenuación se suele tomar de 35 o de 50 dB.

6. **Ancho de Banda Absoluto.** Para señales de energía es aquel intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia central a partir del cual la densidad espectral de energía es nula. Para señales de energía realizables temporalmente este ancho de banda es infinito.

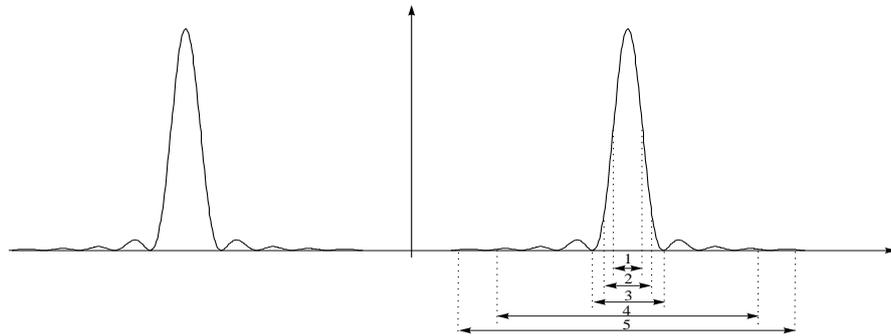


Figura 8.2 Criterios de ancho de banda para una señal paso banda.

Para señales de potencia es aquel intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia central a partir del cual la densidad espectral de potencia es nula. Para señales de potencia realizables temporalmente este ancho de banda es infinito.

Para sistemas es aquel intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia central a partir del cual la función de transferencia es nula. Para sistemas realizables temporalmente este ancho de banda es infinito.