

MODULACIONES ANGULARES

Marcos Martín Fernández
E. T. S. de Ingenieros de Telecomunicación
Universidad de Valladolid

11 de marzo de 2013

Índice general

1. Modulación de Fase (PM) y Modulación de Frecuencia (FM)	1
2. Modulación en Frecuencia de un Tono Simple	5
2.1. Características Generales	5
2.2. FM de Banda Estrecha	6
2.3. FM de Banda Ancha	7
3. Señal FM Multitono	14
4. Ancho de Banda de Señales FM	17
5. Generación de Señales FM	20
5.1. FM Indirecta	20
5.2. FM Directa	22
6. Demodulación de FM	24
7. Respuesta de Filtros Lineales a Señales FM	29
8. Efectos no Lineales en Sistemas FM	30

Capítulo 1

Modulación de Fase (PM) y Modulación de Frecuencia (FM)

En las modulaciones de amplitud, la amplitud de la señal portadora seguía las variaciones de la señal moduladora banda base. En el caso de las modulaciones angulares, es la fase de la señal portadora la que sigue las variaciones de la señal banda base de información. En este tipo de modulaciones la amplitud de la portadora se mantiene constante. Las modulaciones angulares permiten discriminar de forma más eficiente el ruido y las interferencias que en el caso de las modulaciones de amplitud. Esta mejora trae consigo que el ancho de banda de la señal modulada sea bastante mayor que en el caso de modulaciones de amplitud. Las modulaciones angulares proveen un mecanismo mediante el cuál se puede intercambiar ancho de banda y prestaciones frente al ruido.

Hay dos tipos de modulación angular: **modulación en frecuencia (FM: Frequency Modulation)** y **modulación en fase (PM: Phase Modulation)**. Los dos son muy similares y están relacionados entre sí. Sin embargo, FM posee características más adecuadas frente al ruido, por lo que nos centraremos en este tipo de modulación.

Si $\theta_i(t)$ es el ángulo de una portadora que lleva información (modulada por tanto) en la fase, entonces se tiene que

$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)], \quad (1.1)$$

donde A_c es la amplitud de la portadora que en este caso es siempre constante. A $\theta_i(t)$ también se la puede denominar *fase instantánea* de la señal modulada. Una oscilación completa ocurre siempre que $\theta_i(t)$ cambia 2π radianes. Si $\theta_i(t)$ crece de forma monótona en el tiempo, la frecuencia promedio en Hz en el intervalo $(t, t + \Delta t)$ viene dada por

$$f_{\Delta t}(t) = \frac{\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t)}{2\pi\Delta t}. \quad (1.2)$$

Se puede entonces definir la **frecuencia instantánea** de la señal modulada angularmente según

$$f_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f_{\Delta t}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t)}{2\pi\Delta t} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt}. \quad (1.3)$$

Despejando la fase de la ecuación anterior se tiene que

$$\theta_i(t) = 2\pi \int f_i(t) dt. \quad (1.4)$$

La señal $s(t)$ se puede interpretar como un fasor que gira en el plano complejo de amplitud constante A_c y de fase instantánea $\theta_i(t)$. La velocidad angular de dicho fasor es $2\pi f_i(t)$. En el caso de que la portadora esté sin modular su fase instantánea vendrá dada por

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \phi_c, \quad (1.5)$$

que no es más que un fasor que gira a una velocidad angular constante e igual a $2\pi f_c$, siendo ϕ_c la fase en el origen de tiempos. En este caso la frecuencia instantánea es constante e igual a f_c , es decir, $f_i(t) = f_c$.

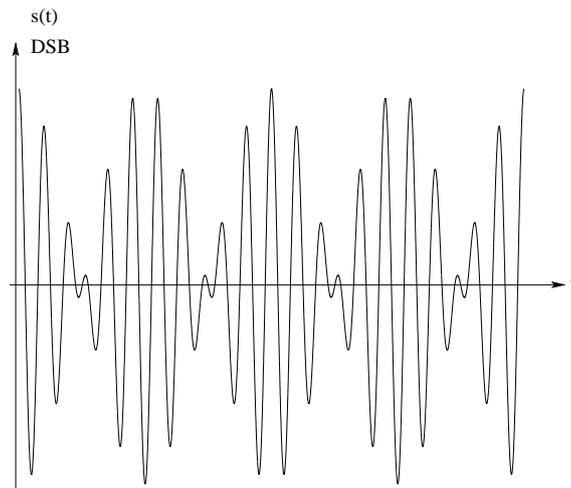


Figura 1.1: Señal modulada DSB.

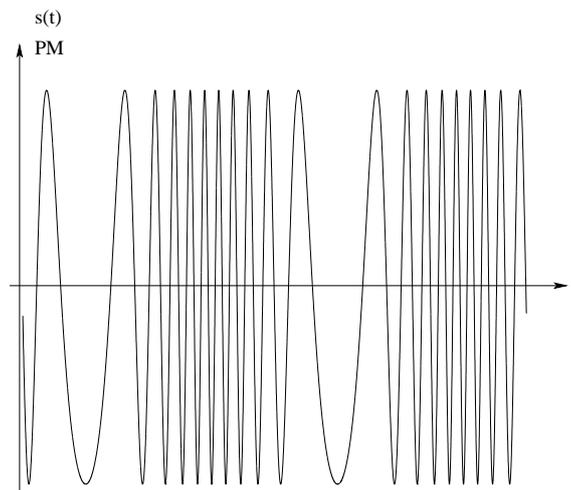


Figura 1.2: Señal modulada PM.

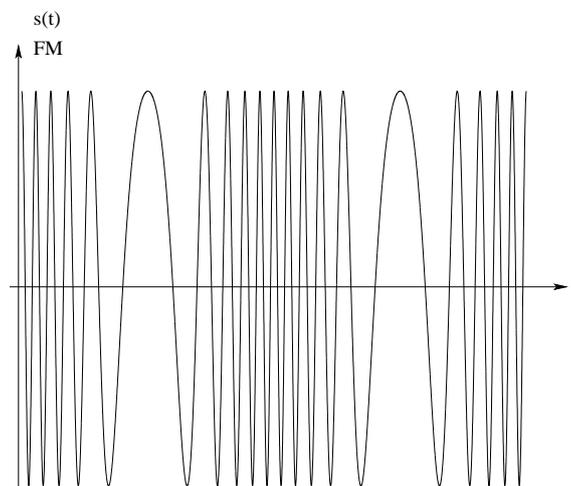


Figura 1.3: Señal modulada FM.

Existen muchas formas de que la fase instantánea $\theta_i(t)$ siga las variaciones de la señal moduladora $m(t)$. En nuestro caso, vamos a considerar dos métodos:

PM: En este caso la fase instantánea $\theta_i(t)$ de la señal modulada tiene una relación lineal con la señal moduladora $m(t)$ según

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t), \quad (1.6)$$

donde $2\pi f_c t$ es el ángulo de la portadora sin modular y la constante k_p es la **sensibilidad en fase** del modulador. Vamos a suponer a partir de ahora que ϕ_c es cero. Utilizando la ecuación (1.3) se tiene que la frecuencia instantánea de la señal PM viene dada por

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt}. \quad (1.7)$$

La expresión de la señal modulada, teniendo en cuenta la ecuación (1.1), viene dada entonces por

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m(t)]. \quad (1.8)$$

FM: En este caso la frecuencia instantánea $f_i(t)$ de la señal modulada tiene una relación lineal con la señal moduladora $m(t)$ según

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t), \quad (1.9)$$

donde f_c es la frecuencia de la portadora sin modular y la constante k_f es la **sensibilidad en frecuencia** del modulador. Utilizando la ecuación (1.4) se tiene que la fase instantánea de la señal FM viene dada por

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int m(t) dt. \quad (1.10)$$

La expresión de la señal modulada, teniendo en cuenta la ecuación (1.1), viene dada entonces por

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int m(t) dt] \quad (1.11)$$

En las figuras 1.1, 1.2 y 1.3 podemos ver tres señales moduladas para los casos DSB, PM y FM, respectivamente.

Una consecuencia de que $\theta_i(t)$ dependa de $m(t)$ es que las señales PM y FM no tienen regularidad con respecto a los cruces por cero, a diferencia de las señales moduladas en amplitud que siempre tenían los cruces por cero regulares e iguales a los de portadora sin modular. Otra diferencia importante es que la envolvente de las señales PM y FM es constante e igual a la amplitud de la portadora, mientras que en el caso de modulaciones de amplitud la envolvente dependía de la señal moduladora $m(t)$. Como se puede ver una señal con modulación lineal o de amplitud se distingue claramente de otra con modulación angular

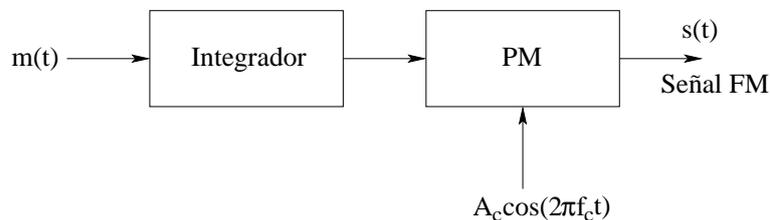


Figura 1.4: Esquema de un modulador de frecuencia utilizando PM.

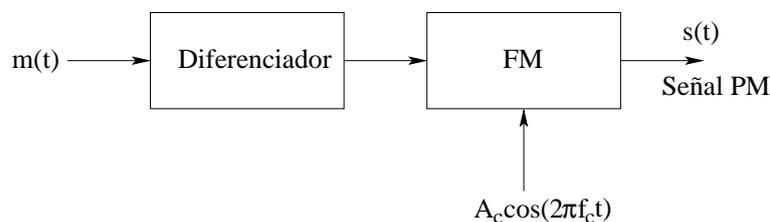


Figura 1.5: Esquema de un modulador de fase utilizando FM.

observando su envolvente y los cruces por cero. Sin embargo, dentro de las modulaciones angulares PM y FM, estas no se pueden distinguir entre sí puesto que ambas tienen envolvente constante y cruces por cero variables. Solamente se puede distinguir PM de FM si se conoce cuál es la señal moduladora $m(t)$ original. Esto quiere decir que existe una gran relación entre una señal PM y otra FM. Comparando las ecuaciones (1.8) y (1.11) se puede ver que FM es equivalente a modular en fase en lugar de $m(t)$ su integral, como puede verse en la figura 1.4. Equivalentemente, PM es equivalente a modular en frecuencia en lugar de $m(t)$ su derivada, como puede verse en la figura 1.5.

Capítulo 2

Modulación en Frecuencia de un Tono Simple

2.1. Características Generales

La señal $s(t)$ es una función no lineal de la señal moduladora $m(t)$. La modulación en frecuencia es, por tanto, un proceso no lineal. A diferencia de lo que ocurría con AM, el espectro FM no está relacionado de forma sencilla con el de $m(t)$. Además, como veremos más adelante, el ancho de banda de la señal FM es mucho mayor que en el caso AM.

En el análisis espectral de FM consideraremos en primer lugar el caso más sencillo en el que la moduladora $m(t)$ sea sinusoidal o, lo que es lo mismo, un tono simple, para posteriormente generalizar este caso para varios tonos. El objetivo de este análisis es poder establecer una relación empírica entre el ancho de banda de una señal FM y el ancho de banda de la señal moduladora $m(t)$.

Consideremos una señal moduladora $m(t)$ sinusoidal según

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t), \quad (2.1)$$

donde A_m y f_m son la amplitud y la frecuencia, respectivamente, de la señal moduladora $m(t)$. En este caso la frecuencia instantánea $f_i(t)$ viene dada por

$$f_i(t) = f_c + k_f A_m \cos(2\pi f_m t) = f_c + \Delta f \cos(2\pi f_m t), \quad (2.2)$$

donde Δf dado por

$$\Delta f = k_f A_m \quad (2.3)$$

es la **desviación máxima en frecuencia** y representa la máxima separación de la frecuencia instantánea $f_i(t)$ con respecto a la de la portadora f_c sin modular. Una característica propia de la señal FM es que la desviación máxima en frecuencia Δf no depende de la frecuencia de la portadora, sino que depende de la amplitud de la señal moduladora $m(t)$.

La fase instantánea $\theta_i(t)$ viene dada por

$$\theta_i(t) = 2\pi \int f_i(t) dt = 2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin(2\pi f_m t). \quad (2.4)$$

El cociente entre la desviación máxima en frecuencia Δf y la frecuencia de la señal moduladora, f_m , se denomina **índice de modulación** β y viene dado por

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m}, \quad (2.5)$$

por lo que podemos escribir

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t) \quad (2.6)$$

para la fase instantánea $\theta_i(t)$. El índice de modulación β representa la máxima desviación de la fase instantánea $\theta_i(t)$ con respecto a la fase de la portadora sin modular $2\pi f_c t$.

La señal FM viene dada por

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]. \quad (2.7)$$

Dependiendo del valor del índice de modulación β se pueden distinguir dos casos de modulación en frecuencia:

- FM de **banda estrecha**, para β pequeño.
- FM de **banda ancha**, para β grande.

Como ya veremos, en el primer caso el ancho de banda es aproximadamente el doble que el de la señal moduladora, mientras que en el segundo caso, el ancho de banda excede este valor y puede llegar a ser mucho mayor.

2.2. FM de Banda Estrecha

Si consideramos la expresión de la señal FM para un tono dada por la ecuación (2.7) y la expandimos obtenemos

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) \cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] - A_c \sin(2\pi f_c t) \sin[\beta \sin(2\pi f_m t)]. \quad (2.8)$$

Si suponemos que β toma un valor pequeño comparado con 1 radian, se pueden hacer las aproximaciones dadas por las expresiones siguientes

$$\cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] \approx 1 \quad (2.9)$$

$$\sin[\beta \sin(2\pi f_m t)] \approx \beta \sin(2\pi f_m t), \quad (2.10)$$

por lo que sustituyendo dichas expresiones en la ecuación (2.8) se puede obtener para la señal FM de banda estrecha la aproximación dada por

$$s(t) \approx A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \beta \sin(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_m t). \quad (2.11)$$

Esta ecuación nos da la expresión aproximada de una señal FM de banda estrecha modulada por una señal moduladora $m(t)$ sinusoidal. De esta expresión se puede obtener fácilmente el **modulador en frecuencia de banda estrecha** como se puede ver esquemáticamente en la figura 2.1. Este modulador requiere que la señal portadora siga dos caminos. Un camino directo y otro en el cual la portadora se desfasa 90° y modula, usando un modulador producto, una versión integrada de la señal moduladora $m(t)$ dando lugar, por tanto, a una señal DSB. La combinación de estas dos señales, la portadora y la señal DSB, dará lugar a una señal FM de banda estrecha con algo de distorsión debido a la aproximación.

Idealmente, una señal FM debería tener envolvente constante y, para el caso especial de señal moduladora sinusoidal $m(t)$ a la frecuencia f_m , el ángulo $\theta_i(t)$ también debería ser sinusoidal a la misma frecuencia f_m . El modulador de banda estrecha de la figura 2.1 presenta dos diferencias con respecto al caso ideal (antes de hacer la aproximación):

- La envolvente ya no es constante y tiene una modulación de amplitud residual por lo que la envolvente varía con el tiempo.
- La fase instantánea $\theta_i(t)$ ya no es sinusoidal a la frecuencia f_m , aunque sí periódica con frecuencia fundamental f_m , pero con distorsión armónica debido a la presencia de armónicos a partir de $3f_m$.

Para que ambos efectos de distorsión estén dentro de unos márgenes aceptables, el índice de modulación debe ser menor de 0,3 radianes. En este caso las aproximaciones dadas por las ecuaciones (2.9) y (2.10) son adecuadas o lo que es lo mismo, la distorsión de envolvente y la distorsión armónica de la fase son despreciables.

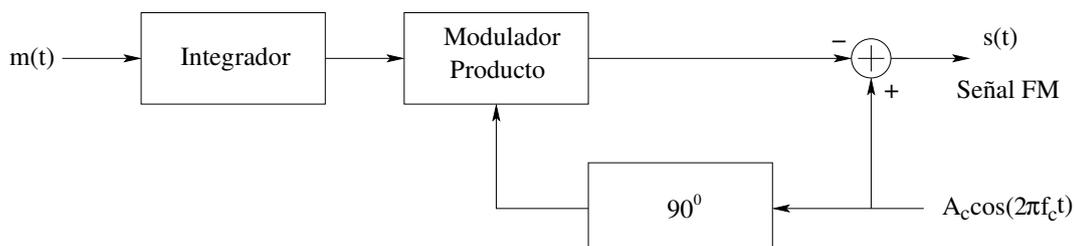


Figura 2.1: Modulador FM de banda estrecha.

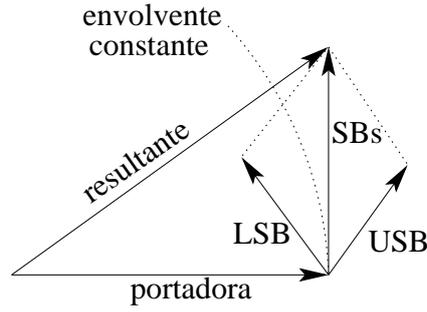


Figura 2.2: Diagrama fasorial para una señal FM de banda estrecha.

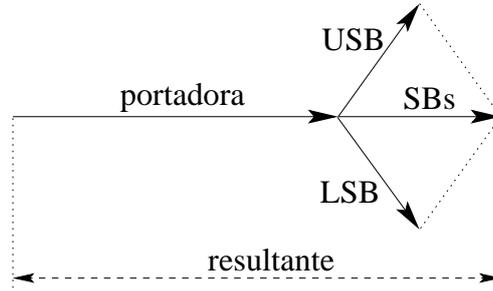


Figura 2.3: Diagrama fasorial para una señal AM.

Si expandimos la ecuación (2.11), se puede obtener igualmente

$$s(t) \approx A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c \beta}{2} [\cos[2\pi(f_c + f_m)t] - \cos[2\pi(f_c - f_m)t]] \quad (2.12)$$

para la señal FM de banda estrecha. La expresión de la señal FM de banda estrecha dada por la ecuación (2.12) se parece bastante a la expresión de una señal AM, que venía dada por

$$s_{AM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c \mu}{2} [\cos[2\pi(f_c + f_m)t] + \cos[2\pi(f_c - f_m)t]] \quad (2.13)$$

usando también moduladora sinusoidal, siendo μ el índice de modulación de la señal AM. Si comparamos ambas expresiones, la única diferencia es que el signo de la banda lateral inferior es el contrario. Por lo tanto, en el caso de FM de banda estrecha con moduladora sinusoidal, el ancho de banda es esencialmente el mismo que en AM, que es $B_T = 2f_m$, es decir, el doble que el de la señal moduladora. En la figura 2.2 podemos ver un diagrama fasorial para una señal FM de banda estrecha y en la figura 2.3 para una señal AM. En ambos casos se ha tomado la portadora sin modular como referencia. En el caso de FM de banda estrecha se puede ver que la resultante (señal modulada) tiene una envolvente ligeramente mayor que la de la portadora (distorsión de envolvente). En este caso la señal suma de las dos bandas laterales siempre está en cuadratura con la portadora. La resultante es un fasor con envolvente aproximadamente constante pero con fase diferente a la de la portadora. En el caso de la señal AM sin embargo la suma de las bandas laterales siempre está en fase con la portadora. De hecho, la resultante (señal modulada) también está siempre en fase con la señal modulada. La fase de la señal modulada es siempre la misma que la de la portadora. Sin embargo, en este caso la envolvente ya no es constante, sino que varía en el tiempo con respecto a la de la señal portadora (que es constante).

2.3. FM de Banda Ancha

Ahora estamos interesados en determinar el espectro de una señal FM para moduladora sinusoidal (un tono simple), pero para un valor arbitrario de β . En general una señal FM generada a partir de una señal moduladora sinusoidal no es periódica a menos que la frecuencia de la portadora f_c sea múltiplo (o venga dada por una relación entre números enteros) de la frecuencia de la moduladora f_m . Sin embargo, podemos escribir

$$s(t) = \Re[A_c \exp(j2\pi f_c t + j\beta \sin(2\pi f_m t))] = \Re[\tilde{s}(t) \exp(j2\pi f_c t)], \quad (2.14)$$

donde $\tilde{s}(t)$ es la envolvente compleja de la señal FM. A partir de esta ecuación se puede determinar de forma sencilla la envolvente compleja de la señal FM, obteniéndose

$$\tilde{s}(t) = \exp[j\beta \sin(2\pi f_m t)]. \quad (2.15)$$

Ahora resulta que la envolvente compleja sí que es periódica con frecuencia fundamental igual a la frecuencia de la señal moduladora f_m . La envolvente compleja $\tilde{s}(t)$ de la señal FM se va a poder entonces representar en serie de Fourier compleja según

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n f_m t). \quad (2.16)$$

Para determinar los coeficientes complejos c_n de la serie se tiene que

$$c_n = f_m \int_{-\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} \tilde{s}(t) \exp(-j2\pi n f_m t) dt = f_m A_c \int_{-\frac{1}{2f_m}}^{\frac{1}{2f_m}} \exp[j\beta \sin(2\pi f_m t) - j2\pi n f_m t] dt. \quad (2.17)$$

Haciendo el cambio de variable $x = 2\pi f_m t$ en la ecuación anterior se tiene

$$c_n = \frac{A_c}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[j(\beta \sin(x) - nx)] dx. \quad (2.18)$$

La integral que aparece en la ecuación (2.18) no se puede evaluar directamente. El resultado de dicha integral como función del índice de modulación β y del valor de n se conoce como *función de Bessel de primera clase*, de argumento β y orden n . Se denota con $J_n(\beta)$ y viene dada por

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[j(\beta \sin(x) - nx)] dx. \quad (2.19)$$

Entonces los coeficientes c_n se relacionan directamente con dicha función según

$$c_n = A_c J_n(\beta). \quad (2.20)$$

Sustituyendo el resultado de esta ecuación en la expresión de la serie de Fourier para la envolvente compleja $\tilde{s}(t)$ dada por la ecuación (2.16), se tiene

$$\tilde{s}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp(j2\pi n f_m t). \quad (2.21)$$

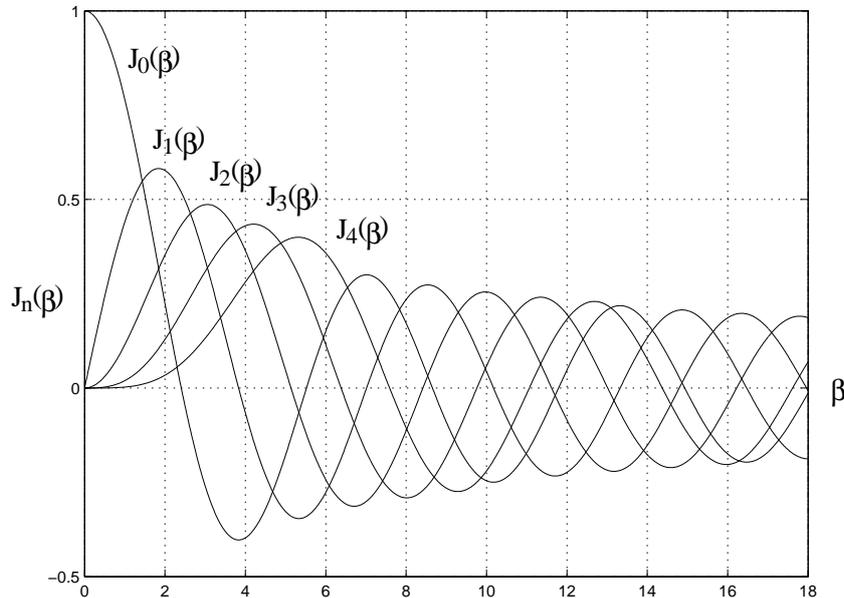


Figura 2.4: Función de Bessel para varios valores de n como función de β .

Juntando entonces las ecuaciones (2.14) y (2.21) se tiene

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + nf_m)t]. \quad (2.22)$$

Esta es la representación en serie de Fourier de una señal FM cuando la moduladora es un tono simple a frecuencia f_m para un valor arbitrario del índice de modulación β .

El espectro de la señal FM se puede obtener calculando la transformada de Fourier de la ecuación (2.22), obteniéndose de forma directa

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_c - nf_m) + \delta(f + f_c + nf_m)]. \quad (2.23)$$

Para ver cómo es el espectro de la señal FM vamos a analizar la función de Bessel. En la figura 2.4 podemos ver estas funciones para varios valores de n como función de β . En la tabla 2.1 se tienen valores numéricos para varios valores de n y β .

Además se pueden utilizar las siguientes propiedades:

- Para n par se tiene que

$$J_n(\beta) = J_{-n}(\beta) \quad (2.24)$$

y para n impar

$$J_n(\beta) = -J_{-n}(\beta). \quad (2.25)$$

Estas dos ecuaciones se pueden juntar según

$$J_n(\beta) = (-1)^n J_{-n}(\beta). \quad (2.26)$$

- Para valores pequeños de β se pueden utilizar las aproximaciones dadas por

$$J_0(\beta) \approx 0 \quad (2.27)$$

$$J_1(\beta) \approx \frac{\beta}{2} \quad (2.28)$$

$$J_n(\beta) \approx 0 \quad n > 1. \quad (2.29)$$

- Se cumple para todo β que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1. \quad (2.30)$$

$n \setminus \beta$	0.5	1	2	3	4	6	8	10	12
0	0.9385	0.7652	0.2239	-0.2601	-0.3971	0.1506	0.1717	-0.2459	0.0477
1	0.2423	0.4401	0.5767	0.3391	-0.0660	-0.2767	0.2346	0.0435	-0.2234
2	0.0306	0.1149	0.3528	0.4861	0.3641	-0.2429	-0.1130	0.2546	-0.0849
3	0.0026	0.0196	0.1289	0.3091	0.4302	0.1148	-0.2911	0.0584	0.1951
4	0.0002	0.0025	0.0340	0.1320	0.2811	0.3576	-0.1054	-0.2196	0.1825
5		0.0002	0.0070	0.0430	0.1321	0.3621	0.1858	-0.2341	-0.0735
6			0.0012	0.0114	0.0491	0.2458	0.3376	-0.0145	-0.2437
7			0.0002	0.0025	0.0152	0.1296	0.3206	0.2167	-0.1703
8				0.0005	0.0040	0.0565	0.2235	0.3179	0.0451
9				0.0001	0.0009	0.0212	0.1263	0.2919	0.2304
10					0.0002	0.0070	0.0608	0.2075	0.3005
11						0.0020	0.0256	0.1231	0.2704
12						0.0005	0.0096	0.0634	0.1953
13						0.0001	0.0033	0.0290	0.1201
14							0.0010	0.0120	0.0650

Tabla 2.1: Función de Bessel para varios valores de β y n .

Usando las propiedades y la figura 2.4 (o la tabla 2.1) podemos decir, para el espectro de la señal FM, dado por la ecuación (2.23), cuando la moduladora es un tono simple, lo siguiente:

- El espectro FM consiste en una componente portadora f_c y en un número infinito de bandas laterales colocadas de forma simétrica con respecto a f_c a frecuencias $f_m, 2f_m, 3f_m$ y así sucesivamente. Este es una diferencia importante con respecto a AM donde sólo se tenía dos bandas laterales.
- Para el caso especial en el que β sea pequeño comparado con la unidad, sólo los coeficientes $J_0(\beta)$ y $J_1(\beta)$ son significativos, de modo que la señal FM está formada por una portadora a f_c y únicamente dos bandas laterales a $f_c \pm f_m$. Este es el caso ya analizado de FM de banda estrecha.
- La amplitud de la portadora varía con β de acuerdo con $J_0(\beta)$. Ahora a diferencia de AM, la amplitud de la portadora depende del índice de modulación. La explicación de esta propiedad es debido a que la envolvente es constante por lo que la potencia de la portadora y de la señal FM es la misma. La potencia de la portadora es sencillo ver que viene dada por

$$P_c = \frac{A_c^2}{2}. \quad (2.31)$$

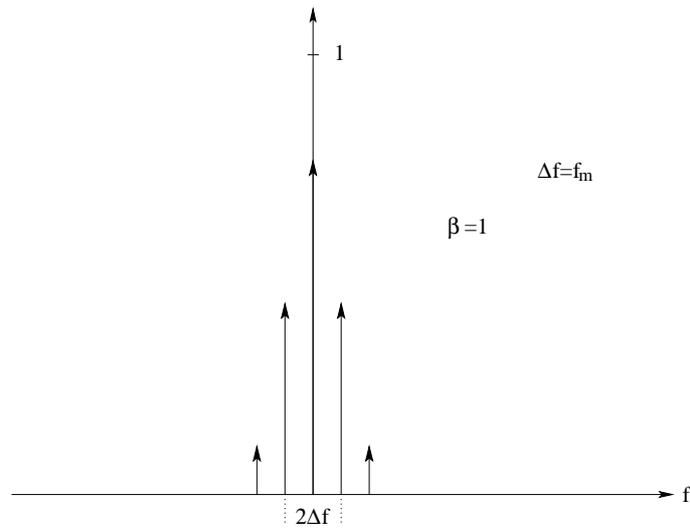
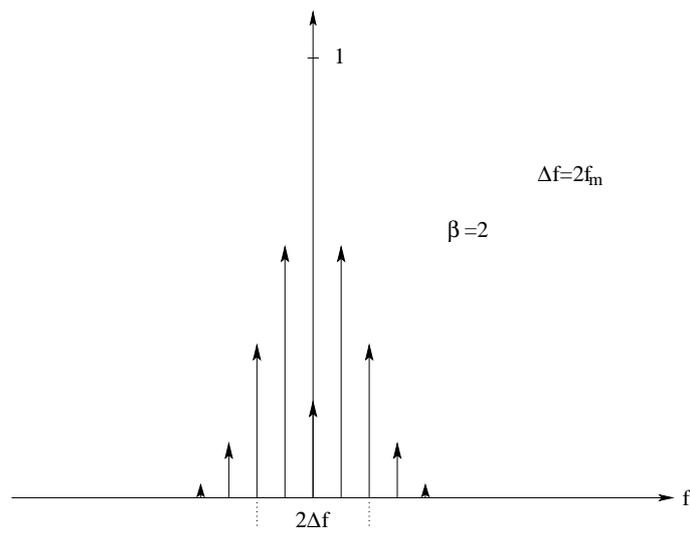
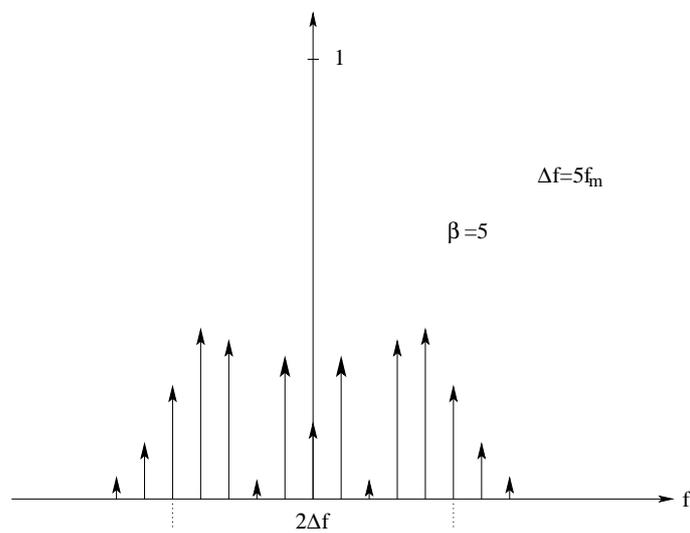
A partir de la ecuación (2.23) se puede determinar fácilmente la potencia de la señal FM, que gracias a la propiedad de las funciones de Bessel dada por la ecuación (2.30) se tiene que

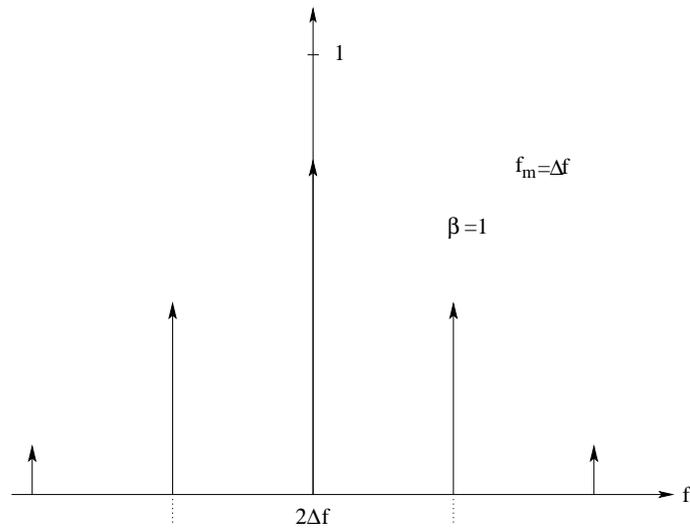
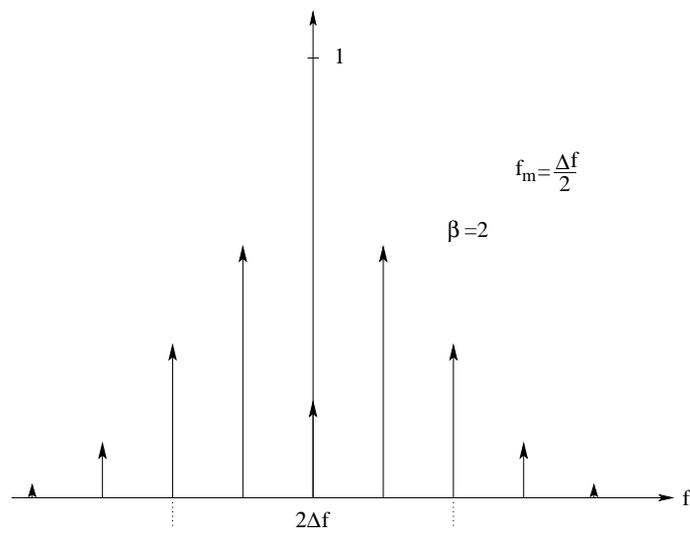
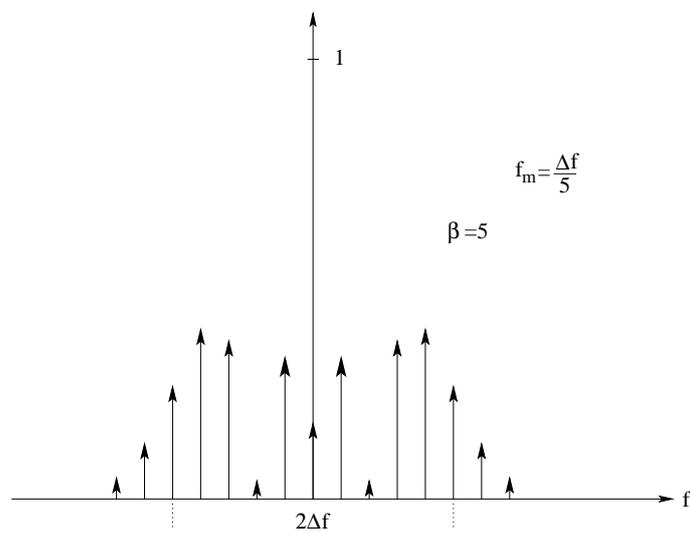
$$P_s = \frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = \frac{A_c^2}{2}. \quad (2.32)$$

Es debido a esta propiedad, que la potencia de la señal FM es igual a la potencia de la portadora, que la potencia de las bandas laterales aparece debido únicamente a expensas de quitar potencia a la componente portadora. Por esto mismo, como la potencia de las bandas laterales depende del índice de modulación para que se conserve la potencia, la potencia y, equivalentemente, la amplitud de la portadora, tiene obligatoriamente que depender también del índice de modulación. De hecho hay valores del índice de modulación β para los cuáles la componente a la frecuencia de la portadora f_c de la señal FM desaparece (tiene amplitud nula). Esto ocurrirá para cuando la función de Bessel $J_0(\beta)$ valga cero, cosa que sí que puede ocurrir como se puede ver en la figura 2.4.

Vamos a representar el espectro de la señal FM dado por la ecuación (2.23) en dos casos:

1. Ponemos el valor de la frecuencia de la moduladora f_m a un valor constante y vamos variando la amplitud de la señal moduladora A_m variando la desviación máxima de frecuencia Δf , para tres casos del índice de modulación $\beta = \Delta f/f_m$. En la figura 2.5 podemos ver el módulo del espectro para $\beta = 1$. En este caso la desviación máxima de frecuencia es $\Delta f = f_m$. En la figura 2.6 podemos ver el módulo del espectro para $\beta = 2$. En este caso la desviación máxima de frecuencia es $\Delta f = 2f_m$. Finalmente, en la figura 2.7 podemos ver el módulo del espectro para $\beta = 5$. En este caso la desviación máxima de frecuencia es $\Delta f = 5f_m$. En cualquier caso las deltas siempre están separadas f_m . No se ha tenido en cuenta el factor $A_c/2$ de la ecuación (2.23) y sólo se han dibujado las deltas correspondientes a frecuencias positivas, por lo que el espectro está centrado con respecto a la frecuencia de la portadora f_c . Como se puede deducir de las figuras 2.5, 2.6 y 2.7 el valor $2\Delta f$ puede servir de una primera aproximación (no demasiado exacta) para el ancho de banda de la señal FM. El efecto de aumentar la amplitud de la moduladora A_m o lo que es lo mismo la desviación máxima en frecuencia Δf , manteniendo constante la frecuencia de la moduladora f_m es aumentar el número de bandas laterales manteniendo constante la separación entre ellas, con lo que el ancho de banda va a aumentar.
2. Ponemos el valor de la amplitud de la moduladora A_m a un valor constante, manteniendo constante el valor de la desviación máxima en frecuencia Δf y vamos variando la frecuencia de la señal moduladora f_m , para tres casos del índice de modulación $\beta = \Delta f/f_m$. En la figura 2.8 podemos ver el módulo del espectro para $\beta = 1$. En este caso la frecuencia de la moduladora es $f_m = \Delta f$. En la figura 2.9 podemos ver el módulo del espectro para $\beta = 2$. En este caso la frecuencia de la moduladora es $f_m = \Delta f/2$. Finalmente, en la figura 2.10 podemos ver el módulo del espectro para $\beta = 5$. En este caso la frecuencia de la moduladora es $f_m = \Delta f/5$. En cualquier caso las deltas siempre están separadas f_m , que en este caso es variable. No se ha tenido en cuenta el factor $A_c/2$ de la ecuación (2.23) y sólo se han dibujado las deltas correspondientes a frecuencias positivas, por lo que el espectro está centrado con respecto a la frecuencia de la portadora f_c . Como se puede deducir de las figuras 2.5,

Figura 2.5: Espectro de la señal FM en el primer caso para $\beta = 1$.Figura 2.6: Espectro de la señal FM en el primer caso para $\beta = 2$.Figura 2.7: Espectro de la señal FM en el primer caso para $\beta = 5$.

Figura 2.8: Espectro de la señal FM en el segundo caso para $\beta = 1$.Figura 2.9: Espectro de la señal FM en el segundo caso para $\beta = 2$.Figura 2.10: Espectro de la señal FM en el segundo caso para $\beta = 5$.

2.6 y 2.7 el valor $2\Delta f$ puede servir de una primera aproximación (no demasiado exacta) para el ancho de banda de la señal FM. El efecto de disminuir la frecuencia de la moduladora f_m , manteniendo constante la amplitud de la moduladora A_m y por tanto la desviación máxima en frecuencia Δf es aumentar el número de bandas laterales pero disminuyendo la separación entre las mismas, de forma que el ancho de banda se mantiene aproximadamente constante. De hecho incluso cuando el índice de modulación β se va haciendo cada vez mayor, o lo que es lo mismo la frecuencia de la moduladora f_m cada vez menor, el ancho de banda sigue viniendo dado por $2\Delta f$.

Capítulo 3

Señal FM Multitono

En la práctica, la señal $m(t)$ no tiene sólo un tono, sino que es una señal multitono, es decir, consistirá en un grupo de frecuencias diferentes relacionadas de forma armónica o no. Si la señal portadora $c(t)$ se modula mediante una señal moduladora $m(t)$ formada por dos tonos con frecuencias f_1 y f_2 y con amplitudes A_1 y A_2 , respectivamente, la señal modulada $s(t)$ resultante vendrá dada por

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_1 \sin(2\pi f_1 t) + \beta_2 \sin(2\pi f_2 t)], \quad (3.1)$$

siendo β_1 y β_2 los índices de modulación del primer y segundo tono dados por

$$\beta_1 = \frac{k_f A_1}{f_1} \quad (3.2)$$

$$\beta_2 = \frac{k_f A_2}{f_2}, \quad (3.3)$$

respectivamente, donde k_f es la sensibilidad en frecuencia del modulador. Siguiendo un procedimiento similar al hecho para el caso de un único tono, se puede llegar a

$$s(t) = A_c \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(\beta_1) J_n(\beta_2) \cos[2\pi(f_c + m f_1 + n f_2)t] \quad (3.4)$$

para la señal modulada por dos tonos. La transformada de Fourier en este caso se puede determinar también de forma sencilla obteniéndose

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(\beta_1) J_n(\beta_2) [\delta(f - f_c - m f_1 - n f_2) + \delta(f + f_c + m f_1 + n f_2)]. \quad (3.5)$$

En la ecuación (3.5) se pueden distinguir los siguientes términos (para frecuencias positivas):

- Componente portadora de amplitud $J_0(\beta_1)J_0(\beta_2)$ y frecuencia f_c .
- Un conjunto de bandas laterales correspondientes a la primera frecuencia moduladora f_1 con amplitudes $J_m(\beta_1)J_0(\beta_2)$ y frecuencias $f_c \pm m f_1$, con $m = 1, 2, 3, \dots$
- Un conjunto de bandas laterales correspondientes a la segunda frecuencia moduladora f_2 con amplitudes $J_0(\beta_1)J_n(\beta_2)$ y frecuencias $f_c \pm n f_2$, con $n = 1, 2, 3, \dots$
- Un conjunto de bandas laterales correspondientes a términos de intermodulación de ambas frecuencias moduladoras f_1 y f_2 con amplitudes $J_m(\beta_1)J_n(\beta_2)$ y frecuencias $f_c \pm m f_1 \pm n f_2$, con $m = 1, 2, 3, \dots$ y $n = 1, 2, 3, \dots$

Es interesante comparar esta situación con la correspondiente modulación en amplitud. En este caso cuando una portadora se modula en amplitud por las frecuencias f_1 y f_2 , el espectro de la señal AM consiste en la frecuencia portadora f_c y las frecuencias $f_c \pm f_1$ y $f_c \pm f_2$, exclusivamente. Es decir, se cumple la superposición debido a que la modulación de amplitud es lineal (sólo aparecen los tres primeros términos de los citados anteriormente y no los cuartos). En el caso de FM no se cumple la superposición debido a

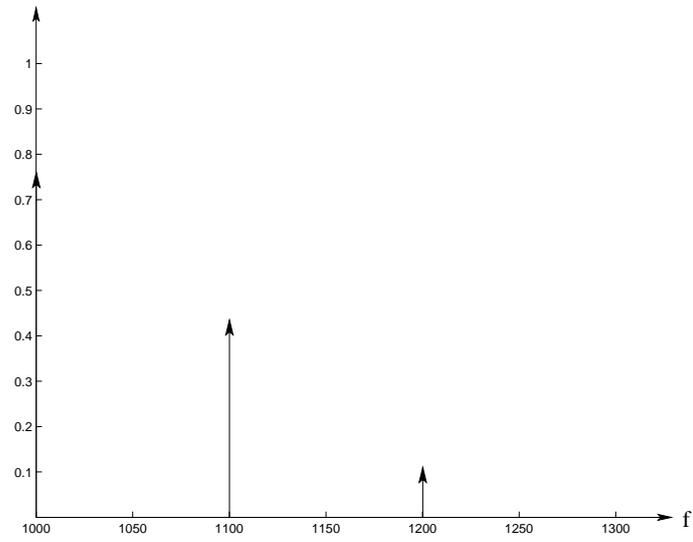


Figura 3.1: Espectro de la señal FM para el primer tono.

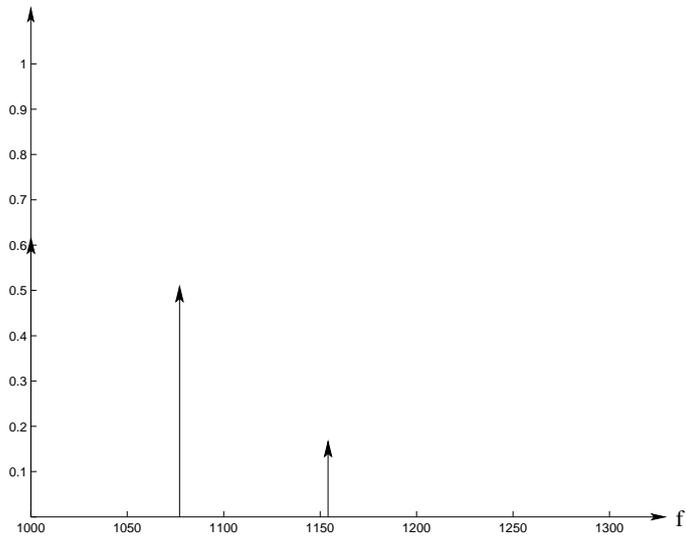


Figura 3.2: Espectro de la señal FM para el segundo tono.

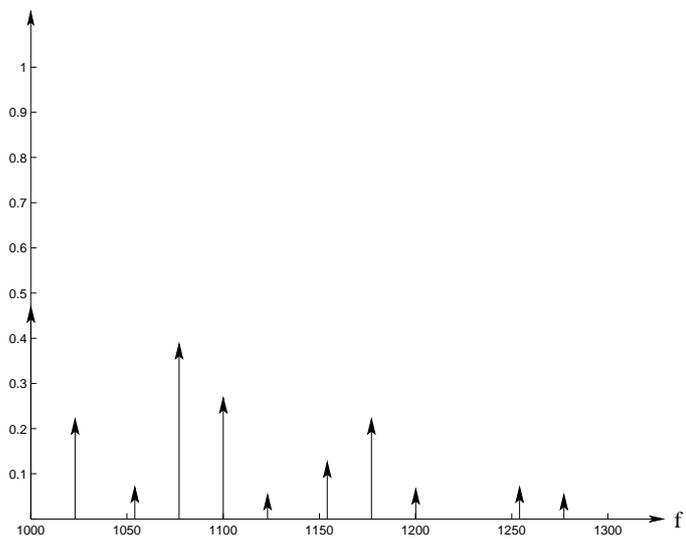


Figura 3.3: Espectro de la señal FM para ambos tonos.

que es un proceso no lineal y aparecen términos de intermodulación a frecuencias sumas y diferencias de las frecuencias moduladoras.

Vamos a analizar un ejemplo. Consideramos que $f_1 = 100$ Hz y que $f_2 = 77$ Hz, con índices de modulación $\beta_1 = 1$ y $\beta_2 = 1,3$ y frecuencia de la portadora $f_c = 1000$ Hz. Vamos a representar el módulo del espectro dado por la ecuación (3.5) sin tener en cuenta el factor $A_c/2$ para las frecuencias positivas y sólo para las frecuencias laterales superiores (sólo las componentes mayores que la frecuencia de la portadora f_c). En la figura 3.1 se representan dichas componentes del módulo del espectro de la señal modulada para cuando la señal moduladora viene dada por el primer tono exclusivamente. Como puede verse, estas componentes están separadas $f_1 = 100$ Hz. En la figura 3.2 se representan dichas componentes del módulo del espectro de la señal modulada para cuando la señal moduladora viene dada por el segundo tono exclusivamente. Como puede verse, estas componentes están separadas $f_2 = 77$ Hz. Finalmente, en la figura 3.3 se puede ver el módulo del espectro de la señal modulada para cuando la señal moduladora viene dada por ambos tonos. Como puede verse, el espectro resultante de ambos tonos moduladores no es simplemente la suma de las señales moduladas cuando dichos tonos se consideran por separado, sino que aparecen otras componentes no presentes en las señales moduladas con sólo un tono, correspondientes a productos de intermodulación en frecuencias sumas y diferencias de las frecuencias moduladoras f_1 y f_2 . En las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 sólo se han representado aquellas componentes frecuenciales con amplitud mayor de 0,05 en la señal modulada con ambos tonos.

El caso en el que la señal moduladora $m(t)$ sea arbitraria es muy complicado y no se va a analizar. Este caso se puede simular mediante ordenador.

Capítulo 4

Ancho de Banda de Señales FM

En teoría una señal FM tiene un número infinito de bandas laterales, por eso su ancho de banda absoluto es infinito. En la práctica, se suele considerar únicamente un número finito de bandas laterales compatible con una cantidad tolerable de distorsión. Así se va a poder determinar el **ancho de banda efectivo de transmisión**. Si consideramos el caso de una señal FM modulada por un único tono a la frecuencia f_m , las bandas laterales están separadas precisamente f_m . Además como ya se ha visto, las bandas laterales separadas una cantidad mayor que la desviación máxima en frecuencia Δf con respecto a la frecuencia portadora f_c decrecen rápidamente a cero, de modo que el ancho de banda será algo mayor que $2\Delta f$, pero limitado. De hecho ya se ha dicho que para cuando el índice de modulación β tiende a infinito el ancho de banda tiende a $2\Delta f$. Además para cuando el índice de modulación β tiende a cero, estamos en el caso de FM de banda estrecha para el que el ancho de banda es $2f_m$. Por todo ello, una regla para el cálculo del ancho de banda denominada **regla de Carson** es la que viene dada por

$$B_T = 2\Delta f + 2f_m = 2\Delta f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = 2f_m(1 + \beta). \quad (4.1)$$

Como puede verse la regla de Carson sigue manteniendo que $B_T \approx 2\Delta f$ para índices de modulación muy grandes y $B_T \approx 2f_m$ para índices de modulación muy pequeños.

Otro criterio algo más preciso que el dado por la regla de Carson es aquel que basa su definición en un ancho de banda que retenga el máximo número de frecuencias laterales cuya amplitud sea mayor que un valor dado. Un valor conveniente para este valor es el 1% de la amplitud de la portadora sin modular. Se define entonces el ancho de banda de una señal FM mediante el **criterio del 1%** como el ancho del intervalo frecuencial de tamaño mínimo que contenga todas las bandas laterales con amplitud mayor que el 1% de la amplitud de la portadora sin modular o, lo que es equivalente, como el ancho del intervalo frecuencial de tamaño mínimo fuera del cual todas las bandas laterales tienen una amplitud menor que el 1% de la amplitud de la portadora sin modular. Para definir dicho ancho de banda se consideran exclusivamente las frecuencias positivas. El ancho de banda usando el criterio del 1% viene dado por

$$B_T = 2n_{max}f_m = \frac{2n_{max}\Delta f}{\beta}, \quad (4.2)$$

β	n_{max}
0,1	1
0,3	2
0,5	2
1,0	3
2,0	4
5,0	8
10,0	14
20,0	25
30,0	35

Tabla 4.1: n_{max} como función del índice de modulación β .

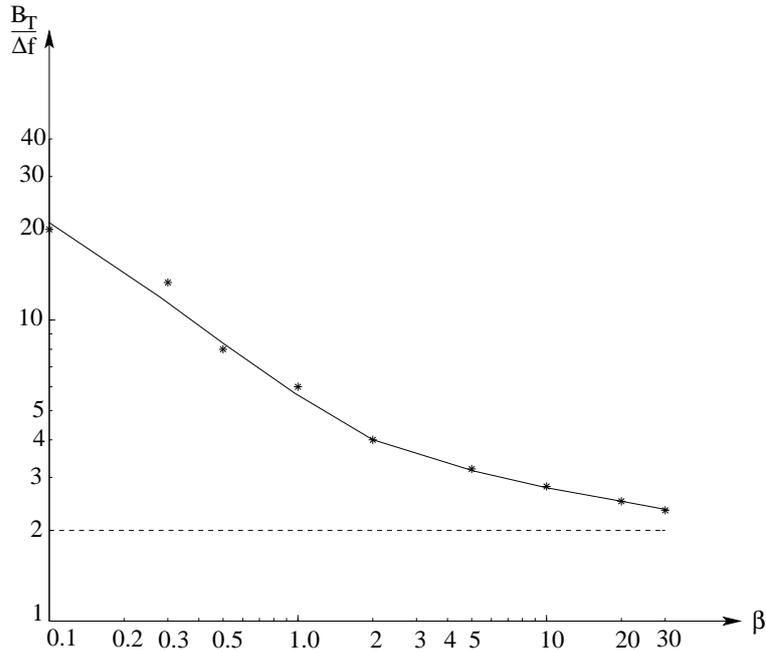


Figura 4.1: Gráfica universal para determinar el ancho de banda usando el criterio del uno por ciento.

donde n_{max} es el máximo valor de n para el que se satisface

$$|J_n(\beta)| > 0,01. \quad (4.3)$$

El valor n_{max} sólo depende del índice de modulación β y puede determinarse de forma sencilla a partir de gráficas o tablas de las funciones de Bessel, como las vistas en el capítulo 2. En la tabla 4.1 se ha calculado n_{max} para varios valores del índice de modulación β .

Una gráfica que se suele emplear para determinar el ancho de banda siguiendo el criterio del 1% es la de la figura 4.1 en la que se representa el ancho de banda normalizado a la desviación máxima en frecuencia, $B_T/\Delta f$, con respecto al índice de modulación β . Esta gráfica se puede construir a partir de la tabla 4.1 poniendo la ecuación (4.2) según

$$\frac{B_T}{\Delta f} = \frac{2n_{max}}{\beta}. \quad (4.4)$$

Cada punto de la gráfica dada por la figura 4.1 se ha determinado multiplicando la segunda columna de la tabla 4.1 por dos y dividiéndola entre la primera columna y dibujando los valores resultantes como función de la primera columna (el índice de modulación β). Después los valores intermedios se determinan mediante interpolación.

A partir de la gráfica de la figura 4.1 se puede determinar el ancho de banda eligiendo la ordenada de la curva para una abscisa igual al índice de modulación β empleado y multiplicando dicha ordenada por la desviación máxima en frecuencia Δf . Como puede observarse, dicha gráfica tiene una asíntota horizontal en 2, es decir, cuando el índice de modulación β tiende a infinito se tiene que $B_T/\Delta f$ tiende a 2 o lo que es lo mismo el ancho de banda B_T tiende a $2\Delta f$, como ya habíamos dicho.

Consideremos ahora una señal moduladora arbitraria $m(t)$ con ancho de banda W . En este caso el ancho de banda de la señal FM se puede determinar moviendo un tono de prueba a la frecuencia f_m en el ancho de banda W de $m(t)$ y considerando el caso peor, que es para $f_m = W$. Por lo tanto, en lo dicho hasta ahora bastaría con cambiar f_m por W . En este caso, el cociente entre la desviación máxima en frecuencia Δf y el ancho de banda W (antes f_m) que debería dar lugar al índice de modulación β , ahora se denomina de forma diferente. Se define la **relación de desviación** para una señal FM modulada por una señal moduladora $m(t)$ arbitraria con ancho de banda W por

$$D = \frac{\Delta f}{W}. \quad (4.5)$$

Esta relación de desviación D juega el mismo papel en el caso de moduladora $m(t)$ arbitraria que el índice de modulación β para el caso de moduladora sinusoidal. Reemplazando el índice de modulación β por la relación de desviación D y la frecuencia de la moduladora f_m por el ancho de banda de la señal moduladora

W en la regla de Carson y en la del 1% podemos determinar ahora el ancho de banda B_T de cualquier señal FM para moduladora $m(t)$ arbitraria. La regla de Carson dada antes por la ecuación (4.1) va a venir ahora dada por

$$B_T = 2\Delta f + 2W = 2\Delta f \left(1 + \frac{1}{D}\right) = 2W(1 + D). \quad (4.6)$$

La regla del 1% dada antes por la ecuación (4.2) va a venir ahora dada por

$$B_T = 2n_{max}W = \frac{2n_{max}\Delta f}{D}. \quad (4.7)$$

En general, la regla de Carson da lugar a un valor menor del real en la estimación del ancho de banda de transmisión B_T de la señal FM, mientras que la regla del 1% da lugar a un valor mayor del real. Por eso, el valor que se usa en la práctica debe estar comprendido entre estos dos valores. Por ejemplo, la media de ambos sería una buena estimación para el ancho de banda de transmisión B_T de la señal FM.

En radiodifusión de FM monofónica se trabaja con un ancho de banda de señal moduladora de $W = 15$ KHz (tipo señal musical) y se fija una desviación máxima en frecuencia de $\Delta f = 75$ KHz. En este caso la relación de desviación es de $D = 5$. El ancho de banda de transmisión B_T según la regla de Carson es de 180 KHz y según la regla del 1% de 240 KHz. En este caso, un valor de $B_T = 210$ KHz sería adecuado.

Capítulo 5

Generación de Señales FM

Vamos a ver dos métodos para generar señales FM: el método indirecto y el directo. En el método indirecto se utiliza modulación FM de banda estrecha y multiplicación en frecuencia para incrementar el nivel de desviación en frecuencia hasta el valor deseado. Por otro lado, en el método directo, se varía directamente la frecuencia de la portadora de acuerdo con la señal moduladora.

5.1. FM Indirecta

En la figura 5.1 se puede ver un esquema de este tipo de modulador. La señal banda base $m(t)$ se integra y sirve de entrada a un modulador de fase que modula una portadora procedente de un oscilador de cristal controlado. Para minimizar la distorsión de fase inherente en el modulador de fase de banda estrecha, el valor del índice de modulación β debe ser pequeño. Así a la salida del modulador de fase tendremos una señal con modulación FM de banda estrecha. Esta señal se multiplica en frecuencia mediante un multiplicador en frecuencia para dar lugar a una señal FM de banda ancha. El esquema del modulador de banda estrecha es el que se vio en el capítulo 1.

La señal $s_1(t)$ a la salida del modulador de FM de banda estrecha viene dada por

$$s_1(t) = A_1 \cos \left[2\pi f_1 t + 2\pi k_f \int m(t) dt \right], \quad (5.1)$$

donde f_1 es la frecuencia del oscilador de cristal controlado y k_f la sensibilidad en frecuencia del modulador. Si la señal moduladora $m(t)$ es sinusoidal entonces la ecuación (5.1) se puede poner según

$$s_1(t) = A_1 \cos [2\pi f_1 t + \beta_1 \sin(2\pi f_m t)], \quad (5.2)$$

donde β_1 es el índice de modulación del modulador de banda estrecha que debe mantenerse por debajo de 0,3 radianes para que la distorsión de fase sea aceptable. La salida del modulador de fase de banda estrecha pasa por un multiplicador de frecuencia que multiplica tanto la fase como la frecuencia de la señal de entrada por un factor n , dando lugar a la señal FM de banda ancha $s(t)$ dada por

$$s(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi n k_f \int m(t) dt \right], \quad (5.3)$$

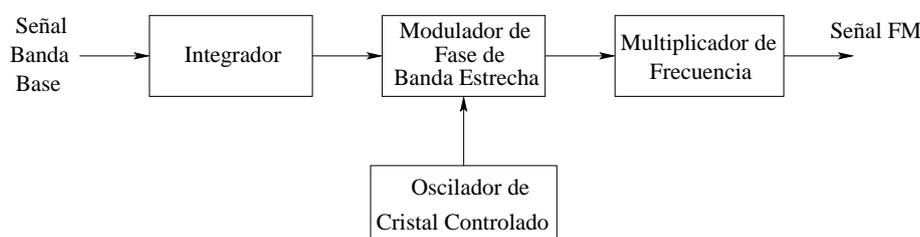


Figura 5.1: Esquema de un modulador de FM mediante el método indirecto.

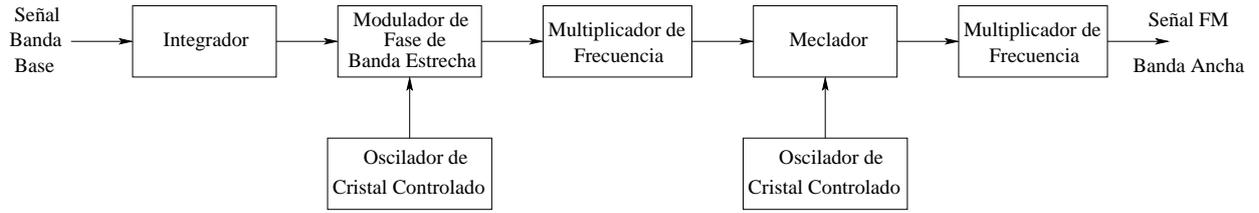


Figura 5.2: Esquema alternativo de un modulador de FM mediante el método indirecto.

donde f_c viene dado por

$$f_c = n f_1. \quad (5.4)$$

En el caso de que la señal moduladora $m(t)$ sea sinusoidal la ecuación (5.3) se puede poner según

$$s(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)], \quad (5.5)$$

donde β viene dado por

$$\beta = n \beta_1. \quad (5.6)$$

Eligiendo de forma apropiada el valor de n , se puede obtener el índice de modulación deseado para la señal FM de banda ancha.

En la práctica, dada una frecuencia portadora f_c y un índice de modulación β de transmisión, puesto que muchas veces f_1 y β_1 vienen dados, no es posible encontrar un valor de n que satisfaga simultáneamente las ecuaciones (5.4) y (5.6). Por ello, normalmente se emplea el esquema de la figura 5.2 en lugar del esquema de la figura 5.1. Utilizando este esquema vamos a ver como sí que se puede ajustar, para un caso general, tanto la frecuencia de la portadora f_c como la desviación máxima en frecuencia Δf de la señal a la salida. Vamos a suponer que en el esquema de la figura 5.2 la desviación máxima en frecuencia de la señal FM de banda estrecha (a la salida del modulador de fase de banda estrecha) es Δf_1 . También supondremos que la frecuencia del primer oscilador de cristal controlado es f_1 y la del segundo f_2 . Además, el primer multiplicador de frecuencia viene caracterizado por el factor n_1 y el segundo por n_2 . Finalmente, vamos a suponer que el mezclador selecciona la banda correspondiente a la frecuencia diferencia y elimina la banda correspondiente a la frecuencia suma. En la tabla 5.1 se recogen los valores para las frecuencias portadoras y para las desviaciones máximas en frecuencia a la salida del modulador de fase de banda estrecha, del primer multiplicador de frecuencia, del mezclador y del segundo multiplicador de frecuencia, respectivamente. En este caso, las ecuaciones (5.4) y (5.6) pasan a ser

$$f_c = n_2 f_2 - n_1 n_2 f_1 \quad (5.7)$$

$$\Delta f = n_1 n_2 \Delta f_1. \quad (5.8)$$

Ahora como tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas, n_1 y n_2 , se pueden ajustar simultáneamente la frecuencia de la portadora f_c y la desviación máxima en frecuencia Δf de la señal FM de banda ancha final.

	A la salida del modulador de fase	A la salida del primer multiplicador	A la salida del mezclador	A la salida del segundo multiplicador
Frecuencia Portadora	f_1	$n_1 f_1$	$f_2 - n_1 f_1$	$n_2 f_2 - n_1 n_2 f_1$
Desviación Máxima en Frecuencia	Δf_1	$n_1 \Delta f_1$	$n_1 \Delta f_1$	$n_1 n_2 \Delta f_1$

Tabla 5.1: Valores de la frecuencia portadora y de la desviación máxima en frecuencia para el método indirecto de generación de FM.

5.2. FM Directa

En este método, la frecuencia instantánea de la portadora se varía de forma directa de acuerdo con la variación temporal de la señal banda base utilizando un dispositivo que se denomina **oscilador controlado por tensión** (VCO: Voltage Controlled Oscillator). Una forma de implementar este dispositivo consiste en utilizar un oscilador sinusoidal cuya frecuencia venga determinada por una red reactiva con un elevado factor Q . En dicha red se va a controlar la frecuencia de oscilación mediante una variación simétrica de los componentes reactivos. Un ejemplo de este dispositivo es el **oscilador Hartley** cuyo esquema simplificado se muestra en la figura 5.3.

Vamos a suponer que en la red que determina la frecuencia de oscilación (bobinas y condensador), el condensador tiene una capacidad fija y otra variable cuya capacidad depende de la tensión aplicada. La capacidad resultante es $C(t)$. Un condensador cuya capacidad depende de la tensión aplicada se denomina **varicap**. Este dispositivo se puede hacer con un diodo en inversa donde la capacidad depende de la tensión aplicada: cuanto mayor sea la tensión aplicada, menor será la capacidad. La frecuencia instantánea $f_i(t)$ del oscilador Hartley dado por la figura 5.3, viene dada por

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C(t)}}, \quad (5.9)$$

donde $C(t)$ es la suma de la capacidad fija y de la variable, y L_1 y L_2 son la inductancia de las bobinas de la red osciladora, respectivamente. Si la señal aplicada al condensador variable es sinusoidal a la frecuencia f_m , la capacidad $C(t)$ viene dada por

$$C(t) = C_0 + \Delta C \cos(2\pi f_m t), \quad (5.10)$$

donde C_0 es la capacidad fija en ausencia de modulación y ΔC es el valor máximo de la variación de la capacidad con respecto al valor fijo C_0 . La frecuencia instantánea $f_i(t)$ se puede poner según

$$f_i(t) = f_0 \left[1 + \frac{\Delta C}{C_0} \cos(2\pi f_m t) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.11)$$

donde f_0 es la frecuencia de oscilación en ausencia de modulación que viene dada por

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C_0}}. \quad (5.12)$$

Si ΔC es pequeño comparado con la capacidad sin modulación C_0 , la frecuencia instantánea se puede aproximar por

$$f_i(t) \approx f_0 \left[1 - \frac{\Delta C}{2C_0} \cos(2\pi f_m t) \right]. \quad (5.13)$$

Si ahora se define la desviación máxima de frecuencia Δf de modo que se cumpla

$$\frac{\Delta C}{2C_0} = -\frac{\Delta f}{f_0}, \quad (5.14)$$

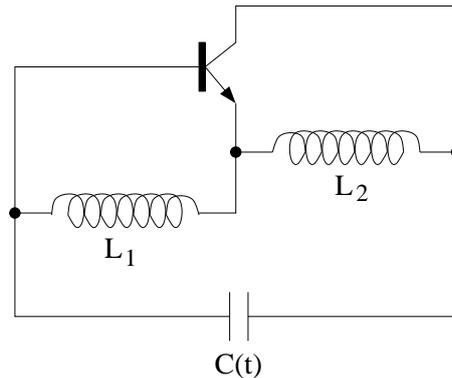


Figura 5.3: Esquema de un modulador de FM mediante el método directo.

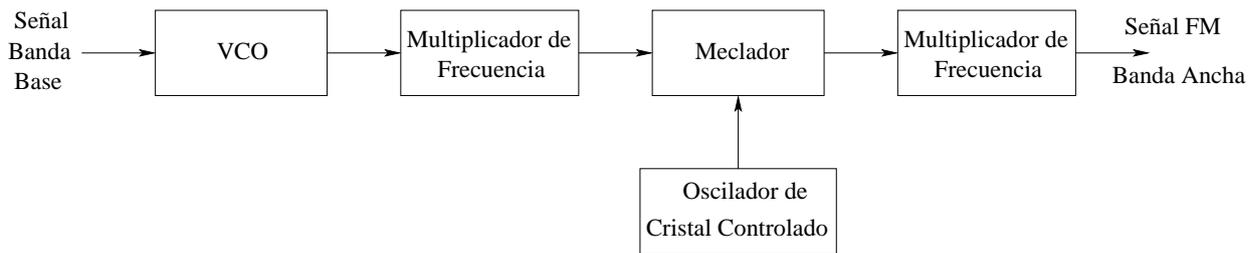


Figura 5.4: Esquema de un modulador de FM de banda ancha mediante el método directo.

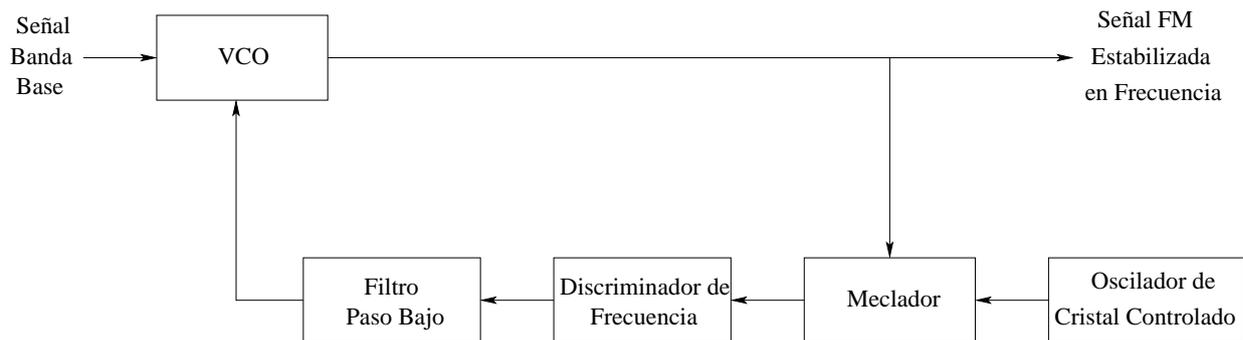


Figura 5.5: Esquema para estabilizar la frecuencia en el método de generación de FM directo.

se obtiene

$$f_i(t) \approx f_0 + \Delta f \cos(2\pi f_m t) \quad (5.15)$$

para la frecuencia instantánea del oscilador Hartley, que es la expresión deseada de la frecuencia instantánea de la señal FM. Hemos supuesto que ΔC es pequeño comparado con C_0 . A partir de la ecuación (5.14) se deduce que Δf es igualmente pequeño con respecto a f_0 por lo que la señal FM obtenida es de banda estrecha. Para conseguir la señal de banda ancha requerida se puede utilizar una técnica similar a la vista en la sección 5.1 para el método indirecto como se puede ver en la figura 5.4. En este esquema tras el VCO se tiene una serie de multiplicadores de frecuencia y mezcladores para poder ajustar tanto la frecuencia de la portadora como la desviación máxima en frecuencia de la señal FM de banda ancha final.

El método FM directo tiene un problema: la frecuencia portadora no se obtiene a partir de un oscilador de cristal estable, sino a partir del oscilador Hartley. En la práctica, es necesario estabilizar la frecuencia portadora para poder controlar las posibles variaciones de la frecuencia f_0 del VCO. Un método para hacer esto es el que se puede ver esquemáticamente en la figura 5.5. La señal modulada en FM de banda estrecha a la salida del VCO se aplica a un mezclador junto con una señal sinusoidal pura procedente de un oscilador de cristal estable a la frecuencia f_0 . La salida del mezclador es una señal cuya frecuencia es la diferencia entre las componentes frecuenciales de la señal FM y la del cristal. Esta señal se aplica a un discriminador de frecuencia cuya señal de salida es proporcional a la frecuencia de la señal de entrada. Cuando la señal FM está a la frecuencia f_0 , la señal a la salida del filtro paso bajo es cero. Si por alguna razón el VCO tiene una cierta deriva en frecuencia con respecto a f_0 , la salida del filtro paso bajo será distinta de cero y con la polaridad adecuada de forma que el VCO puede utilizarla como señal de control para modificar su frecuencia hasta que se ajuste a f_0 y vuelva a ser cero la señal a la salida del filtro paso bajo. Este filtro elimina la componente moduladora presente a la salida del discriminador de frecuencia y deja pasar únicamente la señal paso bajo debida a la deriva en frecuencia del VCO con respecto a f_0 .

Capítulo 6

Demodulación de FM

La demodulación en frecuencia es el proceso que permite recuperar la señal moduladora a partir de la señal FM. La salida del demodulador va a ser proporcional a la frecuencia instantánea de la señal a la entrada. El esquema más sencillo para demodular una señal FM se denomina **discriminador en frecuencia**. Un discriminador en frecuencia consiste en un **circuito pendiente** seguido de un detector de envolvente. Un circuito pendiente es un sistema cuya función de transferencia $H_1(f)$ es imaginaria pura y tiene una variación lineal dentro del ancho de banda de transmisión B_T de la señal FM. En la figura 6.1 podemos ver gráficamente la función de transferencia de dicho circuito. La expresión analítica de la función de transferencia $H_1(f)$ viene dada por

$$H_1(f) = \begin{cases} j2\pi a (f - f_c + \frac{B_T}{2}) & f_c - \frac{B_T}{2} < f < f_c + \frac{B_T}{2} \\ j2\pi a (f + f_c - \frac{B_T}{2}) & -f_c - \frac{B_T}{2} < f < -f_c + \frac{B_T}{2} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (6.1)$$

donde a es una constante característica del demodulador.

Se quiere evaluar la salida $s_1(t)$ del circuito pendiente cuando la entrada es una señal FM $s(t)$ centrada en la frecuencia de la portadora f_c y de ancho de banda B_T . Por lo tanto, vamos a suponer que el espectro de la señal $s(t)$ es cero fuera del intervalo $f_c - B_T/2 < |f| < f_c + B_T/2$. Para evaluar la señal $s_1(t)$ es conveniente utilizar la representación paso bajo equivalente, determinando la envolvente compleja de la función de transferencia del circuito pendiente, $\tilde{H}_1(f)$. La expresión

$$\tilde{H}_1(f - f_c) = \begin{cases} H_1(f) & f > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.2)$$

nos da la relación entre la función de transferencia $H_1(f)$ y su envolvente compleja $\tilde{H}_1(f)$. Gráficamente

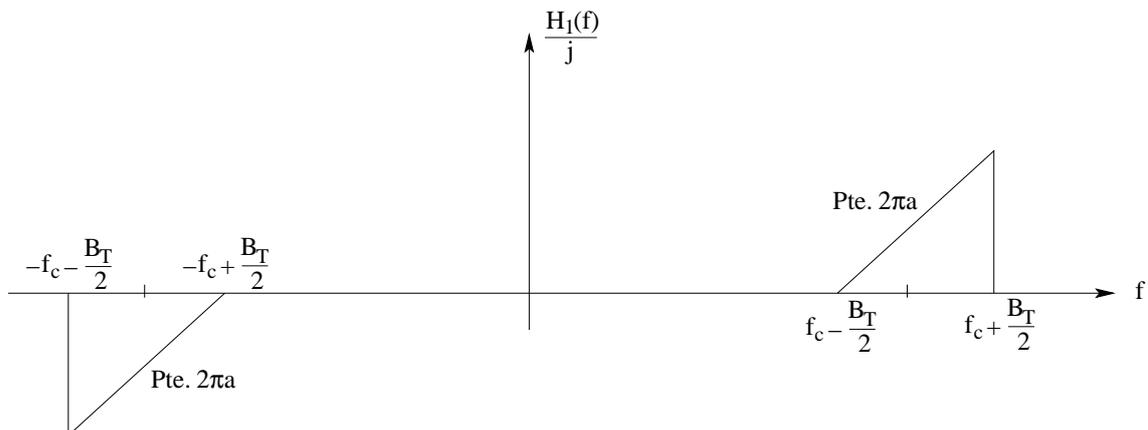


Figura 6.1: Función de transferencia del circuito pendiente.

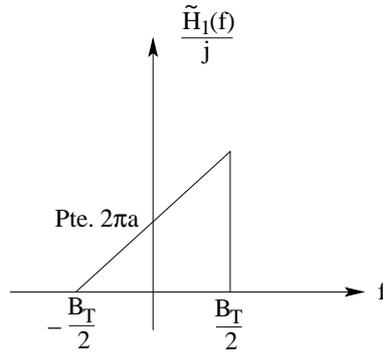


Figura 6.2: Envolvente compleja de la función de transferencia del circuito pendiente.

consiste en poner a cero la parte correspondiente a frecuencias negativas y desplazar el espectro correspondiente a frecuencias positivas f_c hacia la izquierda hasta el origen de frecuencias. Si hacemos esto a partir de la figura 6.1 obtenemos la figura 6.2 para $\tilde{H}_1(f)$.

Usando las ecuaciones (6.1) y (6.2) se puede calcular la expresión analítica para $\tilde{H}_1(f)$ obteniéndose

$$\tilde{H}_1(f) = \begin{cases} j2\pi a \left(f + \frac{B_T}{2}\right) & -\frac{B_T}{2} < f < \frac{B_T}{2} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (6.3)$$

La señal FM $s(t)$ de entrada al discriminador viene dada por

$$s(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int m(t) dt \right]. \quad (6.4)$$

La envolvente compleja de la señal FM viene dada por

$$\tilde{s}(t) = A_c \exp \left[j2\pi k_f \int m(t) dt \right]. \quad (6.5)$$

Si $\tilde{s}_1(t)$ es la envolvente compleja de la señal a la salida del circuito pendiente, entonces su transformada de Fourier $\tilde{S}_1(f)$ viene dada por

$$\tilde{S}_1(f) = \tilde{H}_1(f) \tilde{S}(f) = \begin{cases} j2\pi a \left(f + \frac{B_T}{2}\right) \tilde{S}(f) & -\frac{B_T}{2} < f < \frac{B_T}{2} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (6.6)$$

donde $\tilde{S}(f)$ es la transformada de Fourier de $\tilde{s}(t)$. Puesto que el espectro de la señal $s(t)$ es cero fuera del intervalo $f_c - B_T/2 < |f| < f_c + B_T/2$, se tiene

$$\tilde{S}_1(f) = j2\pi a \left(f + \frac{B_T}{2}\right) \tilde{S}(f). \quad (6.7)$$

Recordando una propiedad de la transformada de Fourier por la cual multiplicar en frecuencia por $j2\pi f$ es equivalente a derivar en el dominio del tiempo, la versión temporal de la ecuación (6.7) es

$$\tilde{s}_1(t) = a \left[\frac{d\tilde{s}(t)}{dt} + j\pi B_T \tilde{s}(t) \right]. \quad (6.8)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (6.5) la ecuación (6.8) se puede poner

$$\tilde{s}_1(t) = j\pi B_T a A_c \left[1 + \frac{2k_f}{B_T} m(t) \right] \exp \left[j2\pi k_f \int m(t) dt \right]. \quad (6.9)$$

La señal paso banda a la salida del circuito pendiente se puede determinar

$$s_1(t) = \Re \left[\tilde{s}_1(t) \exp(j2\pi f_c t) \right] = \pi B_T a A_c \left[1 + \frac{2k_f}{B_T} m(t) \right] \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int m(t) dt + \frac{\pi}{2} \right]. \quad (6.10)$$

La señal $s_1(t)$ a la salida del circuito pendiente es entonces una señal con modulación **híbrida**, de modo que tanto la amplitud como la frecuencia de la señal varían siguiendo a la señal moduladora $m(t)$. Si se comprueba que

$$\left| \frac{2k_f}{B_T} m(t) \right| < 1 \quad \forall t, \quad (6.11)$$

la señal $s_1(t)$ no tendrá sobremodulación y se puede utilizar un detector de envolvente para recuperar la señal moduladora, salvo por un término de continua. La ecuación (6.11) se puede poner de forma equivalente según

$$\frac{B_T}{\Delta f} > 2, \quad (6.12)$$

que siempre es cierta observando la figura 4.1 del capítulo 4 que permitía determinar el ancho de banda según la regla del 1%.

La señal a la salida de un detector de envolvente ideal colocado después del circuito pendiente va a venir dada por

$$|\tilde{s}_1(t)| = \pi B_T a A_c \left[1 + \frac{2k_f}{B_T} m(t) \right]. \quad (6.13)$$

El término de continua es proporcional a la pendiente a de la función de transferencia del circuito pendiente. Esto nos sugiere que se puede eliminar esta componente continua restando a la salida del detector de envolvente $|\tilde{s}_1(t)|$ la salida de un segundo detector de envolvente precedido de un circuito pendiente complementario con función de transferencia $H_2(f)$ según la figura 6.3. Procediendo de igual forma que antes para el circuito pendiente complementario $H_2(f)$ deberíamos determinar la transformada de Fourier de su envolvente compleja, $\tilde{H}_2(f)$, sin embargo ya que este circuito pendiente es complementario de $H_1(f)$ se puede ver que se cumple

$$\tilde{H}_2(f) = \tilde{H}_1(-f) \quad (6.14)$$

para las transformadas de Fourier de las envolventes complejas de ambos circuitos pendiente. Teniendo en cuenta la ecuación (6.14) y el procedimiento llevado a cabo para determinar la envolvente a la salida del

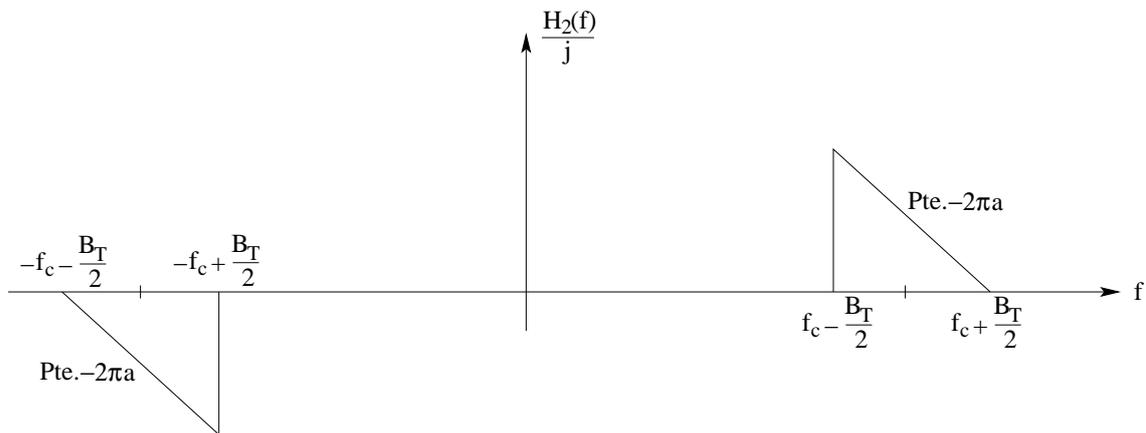


Figura 6.3: Función de transferencia del circuito pendiente complementario.

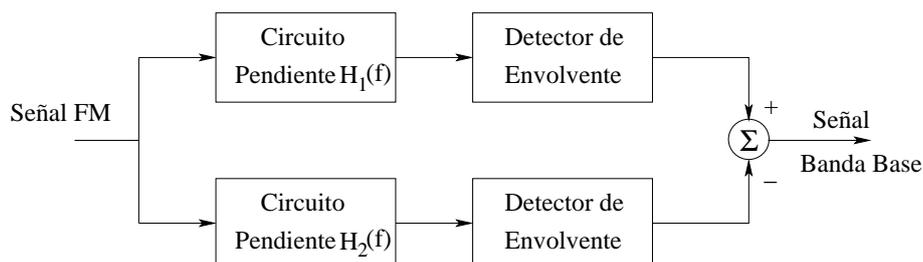


Figura 6.4: Esquema del discriminador de frecuencia balanceado.

primer circuito pendiente, se puede determinar la envolvente ideal para la señal a la salida del segundo circuito pendiente, $s_2(t)$, obteniéndose

$$|\tilde{s}_2(t)| = \pi B_T a A_c \left[1 - \frac{2k_f}{B_T} m(t) \right]. \quad (6.15)$$

La señal $s_0(t)$ diferencia entre las envolventes de las señales $s_1(t)$ y $s_2(t)$ será la salida del demodulador completo y va a venir dada por

$$s_0(t) = |\tilde{s}_1(t)| - |\tilde{s}_2(t)| = 4\pi k_f a A_c m(t). \quad (6.16)$$

Como puede verse hemos eliminado la componente continua.

En la figura 6.4 podemos el esquema completo del discriminador de frecuencia balanceado formado por los circuitos pendiente complementarios, dos detectores de envolvente y un sumador. Además en la figura 6.5 podemos observar una implementación real de dicho discriminador balanceado. Los filtros paso banda resonantes superior e inferior están sintonizados a frecuencias ligeramente superior e inferior a la de la portadora sin modular, respectivamente. Estos filtros tienen un factor de calidad Q elevado. En la figura 6.6 podemos ver la respuesta en frecuencia típica de los filtros paso banda de la figura 6.5 que implementan

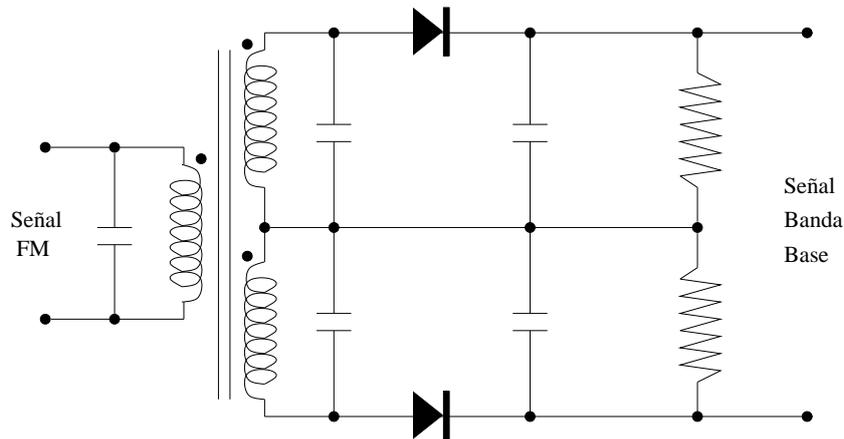


Figura 6.5: Una implementación del discriminador de frecuencia balanceado.

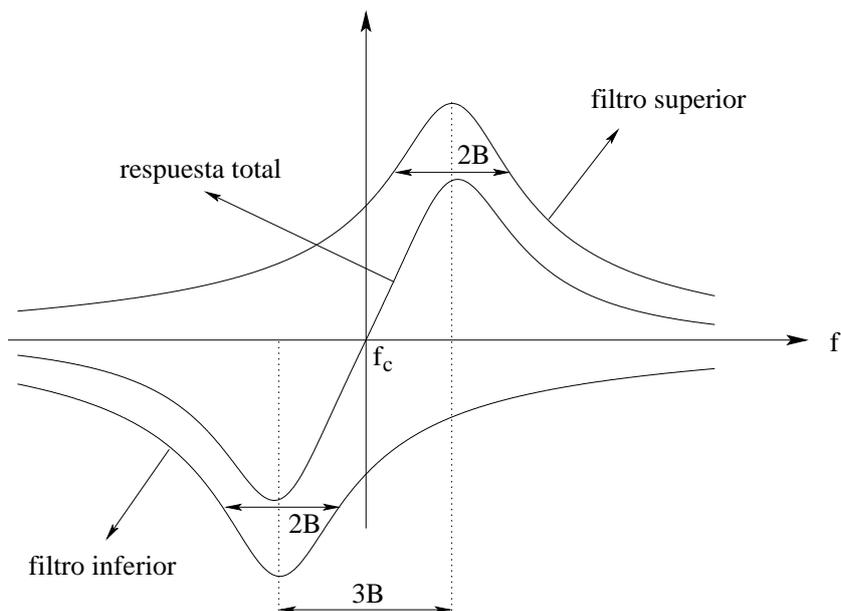


Figura 6.6: Función de transferencia de los filtros paso banda que implementan los circuitos pendiente balanceados.

los circuitos pendiente. La linealidad de la sección útil de la respuesta total centrada en f_c está determinada por la separación de las dos frecuencias resonantes. Una separación de $3B$ da resultados satisfactorios, siendo $2B$ el ancho de banda a 3 dB de cada filtro, como aparece reflejado en la figura 6.6.

El esquema de la figura 6.5 junto con la función de transferencia de los filtros de la figura 6.6 se diferencia del caso ideal debido a los siguientes términos de distorsión:

- El espectro de la señal de entrada $s(t)$ no es exactamente cero para frecuencias fuera del rango $f_c - B_T/2 < |f| < f_c + B_T/2$, por lo que dichas componentes fuera de banda darán lugar a distorsión.
- La salida de los filtros sintonizados no está limitada en banda por lo que los filtros paso bajo RC tras los diodos introducen distorsión.
- La característica de los filtros sintonizados no es ideal (la respuesta total no es lineal) en toda la banda de frecuencias de la señal FM $s(t)$.

Sin embargo, con un diseño apropiado, es posible mantener la distorsión dentro de unos límites aceptables.

Capítulo 7

Respuesta de Filtros Lineales a Señales FM

Cuando se aplica una señal FM a un filtro lineal e invariante en el tiempo caracterizado por una distorsión de amplitud y fase, la señal de salida va a tener una modulación de amplitud residual, además de una distorsión de fase de las componentes angulares de la señal FM.

Mientras que la modulación de amplitud residual se puede eliminar empleando unos dispositivos que se denominan **limitadores**, la distorsión de fase no se puede eliminar y aparecerá en la señal demodulada. Esta distorsión es debida a que las bandas laterales de la señal FM son atenuadas de forma diferente cada una de ellas al pasar la señal FM por el filtro.

El cálculo de la distorsión producida al pasar una señal FM a través de un filtro lineal e invariante ha sido uno de los problemas más difíciles de resolver dentro de la teoría de modulación no lineal. Este cálculo se complica debido a la naturaleza no lineal propia de la señal FM.

Debido al desarrollo de los ordenadores, es posible analizar la respuesta de un filtro lineal e invariante cuya entrada sea una señal FM, analizando numéricamente dicho proceso. La precisión de los resultados obtenidos depende de la capacidad del ordenador y del coste temporal de cada simulación.

Para analizar numéricamente este problema es conveniente:

- Reemplazar la señal FM por sus componentes en fase y cuadratura.
- Reemplazar el filtro lineal e invariante por su complejo paso bajo equivalente.
- Evaluar la respuesta del filtro debido a la combinación de las componentes en fase y cuadratura.
- Determinar la señal paso banda a la salida a partir de las componentes en fase y cuadratura de la señal de salida del filtro.
- Comparando la señal FM a la entrada con la señal paso banda a la salida calcular la distorsión producida.

Capítulo 8

Efectos no Lineales en Sistemas FM

En los sistemas reales se presentan no linealidades. Existen dos clases básicas de no linealidades:

Fuerte: si la no linealidad ha sido introducida de forma intencionada por parte del diseñador del sistema.

Podemos considerar ejemplos de este tipo de no linealidad: el limitador, el detector de envolvente y el modulador en cuadratura.

Débil: cuando se desea que el sistema sea lineal y aparecen no linealidades no deseadas.

Vamos a examinar los efectos de no linealidades débiles en señales FM. Para ello, vamos a suponer un canal de comunicación cuya función de transferencia entrada salida viene dada por

$$v_0(t) = a_1 v_i(t) + a_2 v_i^2(t) + a_3 v_i^3(t), \quad (8.1)$$

donde $v_i(t)$ y $v_0(t)$ son la señal de entrada y la señal de la salida, respectivamente, y a_1 , a_2 y a_3 son constantes. Se supone además que el sistema no tiene memoria, es decir, $v_0(t)$ es una función instantánea de $v_i(t)$. Deseamos determinar el efecto de transmitir una señal FM $v_i(t)$ a través de este canal. La señal FM $v_i(t)$ vendrá dada por

$$v_i(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)], \quad (8.2)$$

donde $\phi(t)$ es la fase de la envolvente compleja de la señal FM dada por

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int m(t) dt. \quad (8.3)$$

Introduciendo la señal FM $v_i(t)$ dada por la ecuación (8.2) en la ecuación (8.1), se puede poner la señal a la salida $v_0(t)$ según

$$v_0(t) = a_1 A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] + a_2 A_c^2 \cos^2[2\pi f_c t + \phi(t)] + a_3 A_c^3 \cos^3[2\pi f_c t + \phi(t)]. \quad (8.4)$$

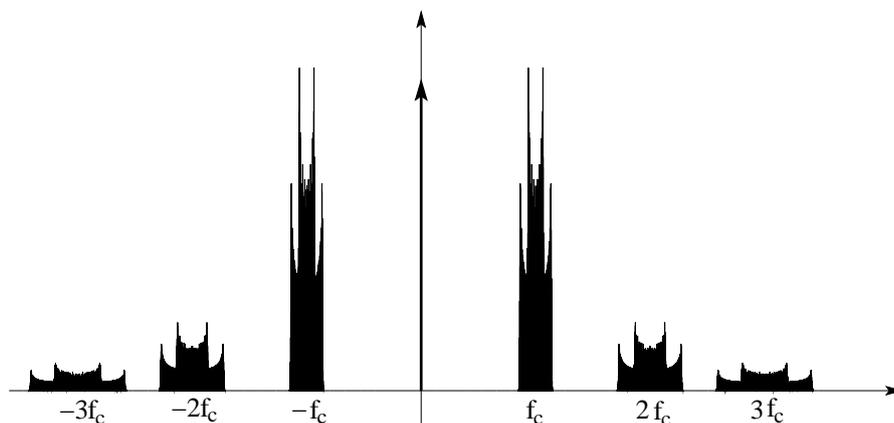


Figura 8.1: Un caso particular para el espectro de la señal a la salida.

Expandiendo los términos de la ecuación anterior y sacando factor común se puede obtener

$$v_0(t) = \frac{1}{2}a_2A_c^2 + \left[a_1A_c + \frac{3}{4}a_3A_c^3 \right] \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] + \frac{1}{2}a_2A_c^2 \cos[4\pi f_c t + 2\phi(t)] + \frac{1}{4}a_3A_c^3 \cos[6\pi f_c t + 3\phi(t)]. \quad (8.5)$$

En la figura 8.1 podemos ver el espectro en un caso particular para la señal $v_0(t)$. Si la señal FM de entrada $v_i(t)$ tiene frecuencia portadora f_c y desviación máxima en frecuencia Δf , la señal de salida $v_0(t)$ tiene las siguientes componentes:

- Componente continua.
- Componente FM a frecuencia portadora f_c con desviación máxima de frecuencia Δf .
- Componente FM a frecuencia portadora $2f_c$ con desviación máxima de frecuencia $2\Delta f$.
- Componente FM a frecuencia portadora $3f_c$ con desviación máxima de frecuencia $3\Delta f$.

La señal FM original se puede separar de la señal de salida $v_0(t)$ mediante un filtro paso banda centrado en la frecuencia f_c y de ancho de banda el dado por la regla de Carson: si W es el ancho de banda de la señal moduladora, el ancho de banda de la componente centrada en f_c será $2\Delta f + 2W$. Para que esto sea posible la componente a $2f_c$ debe estar separada frecuencialmente de la componente a f_c . Según la regla de Carson el ancho de banda de la componente a $2f_c$ es $4\Delta f + 2W$, puesto que esta componente tiene doble desviación máxima de frecuencia. La condición de que la componente a f_c no se solape en frecuencia con la componente a $2f_c$ viene expresada analíticamente por

$$2f_c - (2\Delta f + W) > f_c + (\Delta f + W). \quad (8.6)$$

Simplificando se obtiene

$$f_c > 3\Delta f + 2W \quad (8.7)$$

para que se puede recuperar la señal FM original. Esta condición en general se cumple puesto que la frecuencia de la portadora f_c suele ser varios órdenes de magnitud mayor que tanto el ancho de banda W de la señal moduladora como la desviación máxima de frecuencia Δf .

Si denominamos $y(t)$ a la señal a la salida del filtro paso banda, que como ya hemos dicho, tiene como frecuencia central f_c y de ancho de banda $2\Delta f + 2W$, vendrá dada por

$$y(t) = \left[a_1A_c + \frac{3}{4}a_3A_c^3 \right] \cos[2\pi f_c t + \phi(t)]. \quad (8.8)$$

Como se puede observar el único efecto de pasar una señal FM a través de un canal o a través de un sistema no lineal, siempre que se cumpla la ecuación (8.7) y filtremos adecuadamente la señal, es multiplicar su amplitud por una constante. A diferencia de lo que ocurre en las modulaciones de amplitud, una señal FM no se ve afectada por la distorsión debida a no linealidades. Esta es la razón por la que la modulación en frecuencia se utiliza de forma amplia en enlaces de microondas y enlaces de satélite, debido a que permite el uso de amplificadores de potencia altamente no lineales, que son muy importantes desde el punto de vista de mayor potencia a esas frecuencias.

Sin embargo, un sistema FM es muy sensible a no linealidades de fase. Un tipo muy común de este tipo de no linealidad es la conversión AM-PM. Esto es debido a que, en general, las características de fase de los amplificadores y repetidores utilizados en los sistemas de comunicación dependen de la amplitud instantánea de la señal de entrada. En la práctica, la conversión AM-PM se caracteriza por una constante K medida en grados/dB, que debe interpretarse como el cambio de fase de pico (en grados) de la señal de salida por cada cambio de 1 dB en la envolvente de la señal de entrada. Cuando una señal FM se transmite a través de un enlace de radio recoge variaciones aleatorias en su envolvente debido al ruido e interferencias presentes durante su propagación. Si ahora esta señal se pasa a través de un repetidor con conversión AM-PM, la salida tendrá una modulación no deseada de fase, debido a la variación de la envolvente de la señal de entrada, que dará lugar a una distorsión en la señal demodulada. Este efecto se puede cancelar en parte haciendo uso de limitadores. En un repetidor de FM es muy importante mantener la conversión AM-PM a un nivel por debajo de 2^0 /dB para mantener la distorsión de fase dentro de unos límites aceptables.