

# MODULACIÓN ANALÓGICA Y DIGITAL DE PULSOS

Marcos Martín Fernández  
E. T. S. de Ingenieros de Telecomunicación  
Universidad de Valladolid

11 de marzo de 2013

# Índice general

<b>1. Teorema de Muestreo</b>	<b>1</b>
<b>2. Muestreo de Señales Paso Banda</b>	<b>7</b>
<b>3. Aspectos Prácticos del Muestreo</b>	<b>12</b>
3.1. Muestreo de Duración Finita . . . . .	12
3.2. Muestras Planas o Flat-Top . . . . .	14
<b>4. Reconstrucción de una Señal Aleatoria Muestreada</b>	<b>17</b>
<b>5. Multiplexación por División en el Tiempo (TDM)</b>	<b>19</b>
<b>6. Modulación de pulsos en Amplitud (PAM)</b>	<b>21</b>
<b>7. Modulación de Pulsos en el Tiempo (PPM y PDM)</b>	<b>24</b>
<b>8. Modulación Digital de Pulsos (PCM)</b>	<b>29</b>
8.1. Muestreo . . . . .	30
8.2. Cuantificación . . . . .	30
8.3. Codificación . . . . .	35
8.4. Regeneración . . . . .	37
8.5. Decodificación . . . . .	38
8.6. Filtrado . . . . .	38
8.7. Multiplexado . . . . .	38
8.8. Sincronización . . . . .	38
8.9. Ejemplo Sistema T1 . . . . .	39
<b>9. Análisis de la Calidad en PCM</b>	<b>40</b>
9.1. Ruido de Transmisión y Probabilidad de Error . . . . .	40
9.2. Ruido de Cuantificación . . . . .	44

# Capítulo 1

## Teorema de Muestreo

Una operación que es básica para diseñar todos los sistemas de modulación de pulsos es el **proceso de muestreo**, donde una señal analógica se convierte en una secuencia de números que normalmente están uniformemente espaciados en el tiempo. Para que dicho proceso tenga utilidad práctica es necesario elegir la tasa de muestreo adecuadamente de modo que esa secuencia de números identifique de forma única a la señal analógica original. Esta es la esencia del teorema de muestreo.

Consideremos una señal arbitraria  $g(t)$  de energía finita como la que se muestra en la figura 1.1. Supongamos que muestreamos la señal  $g(t)$  de forma instantánea a una tasa uniforme cada  $T_s$  segundos. Como resultado de este proceso se obtiene una secuencia de números espaciados  $T_s$  y que podemos denotar mediante  $\{g(nT_s)\}$ , donde  $n$  puede tomar cualquier valor entero,  $T_s$  es el **periodo de muestreo** y  $f_s = 1/T_s$  es la **frecuencia de muestreo**. Esta forma ideal de muestreo recibe el nombre de **muestreo instantáneo**.

Sea  $g_\delta(t)$  la señal obtenida multiplicando la secuencia de números  $\{g(nT_s)\}$  por un tren de deltas espaciados  $T_s$ , entonces se puede expresar según

$$g_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (1.1)$$

A esta señal  $g_\delta(t)$  se la denomina **señal muestreada ideal**. En la figura 1.2 se puede ver el resultado de este tipo de muestreo aplicado a la señal de la figura 1.1. De forma equivalente se puede expresar  $g_\delta(t)$  como el producto de la señal original  $g(t)$  por la **función de muestreo ideal**  $\delta_{T_s}(t)$ , tren de deltas periódico con periodo  $T_s$ , dado por

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s), \quad (1.2)$$

es decir

$$g_\delta(t) = g(t)\delta_{T_s}(t) = g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (1.3)$$

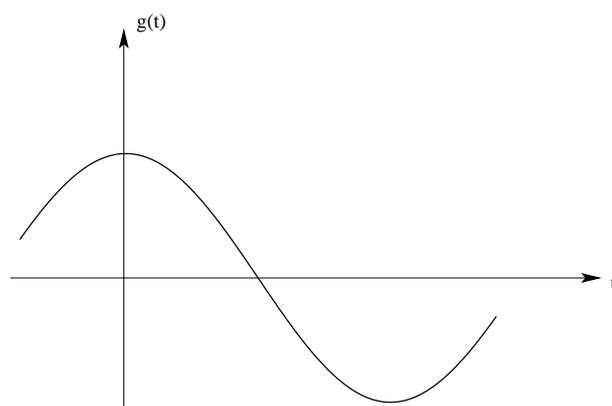


Figura 1.1: Señal arbitraria de energía finita.

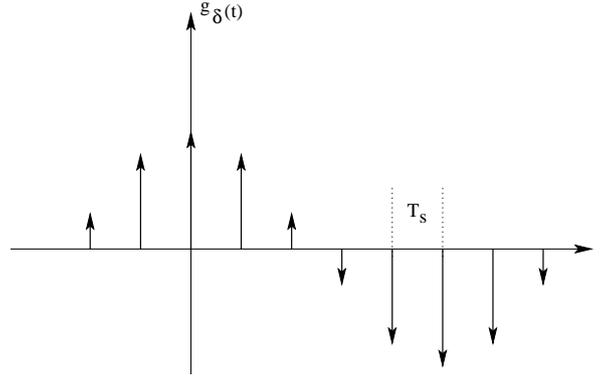


Figura 1.2: La señal de la figura 1.1 muestreada idealmente.

Se puede determinar la transformada de Fourier de la señal muestreada  $g_\delta(t)$  convolucionando la transformada de Fourier de  $g(t)$  con la transformada de Fourier de la función de muestreo ideal  $\delta_{T_s}(t)$ , que viene dada por

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \iff \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right). \quad (1.4)$$

Como se puede apreciar en la ecuación anterior la señal periódica  $\delta_{T_s}(t)$  tiene todos los coeficientes de su serie Fourier iguales,  $c_n = \frac{1}{T_s}$ , por lo que su transformada de Fourier es también un tren de deltas equiespaciadas a  $f_s = \frac{1}{T_s}$  (periódico por tanto en el dominio de Fourier). Entonces si  $G(f)$  es la transformada de Fourier de  $g(t)$ , la transformada de Fourier  $G_\delta(f)$  de la señal muestreada  $g_\delta(t)$  va a venir dada por

$$G_\delta(f) = G(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right). \quad (1.5)$$

Si intercambiamos el orden del sumatorio y la convolución se obtiene

$$G_\delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f) * \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right). \quad (1.6)$$

La convolución de una señal cualquiera con una delta desplazada, desplaza la señal según

$$G(f) * \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = G\left(f - \frac{n}{T_s}\right), \quad (1.7)$$

por lo que se tiene finalmente

$$G_\delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{n}{T_s}\right). \quad (1.8)$$

$G_\delta(f)$  representa un espectro continuo periódico con periodo  $f_s = 1/T_s$  en el dominio de Fourier. Se puede decir entonces que el proceso de muestreo uniforme de una señal en el dominio del tiempo da lugar a un espectro periódico en el dominio de la frecuencia con periodo igual a la frecuencia de muestreo.

A partir de la ecuación (1.1) tomando transformada de Fourier en ambos lados se obtiene

$$G_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) \exp(-j2\pi n f T_s). \quad (1.9)$$

Esta ecuación se puede ver como una representación en serie compleja de Fourier de la señal periódica en la frecuencia  $G_\delta(f)$ , siendo los coeficientes complejos de la expansión la secuencia de muestras  $\{g(nT_s)\}$ , por lo que se tiene que

$$g(nT_s) = T_s \int_0^{f_s} G_\delta(f) \exp(j2\pi n f T_s) df, \quad (1.10)$$

que es la ecuación análisis de la expansión en serie compleja de Fourier de la señal periódica en frecuencia  $G_\delta(f)$ . Hay que tener en cuenta que en las ecuaciones (1.9) y (1.10) se han intercambiado el papel habitual del tiempo y de la frecuencia.

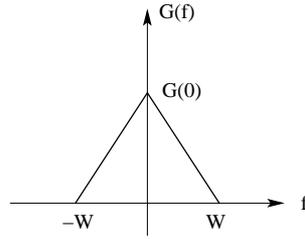


Figura 1.3: Espectro de la señal a muestrear limitado a la banda  $W$ .

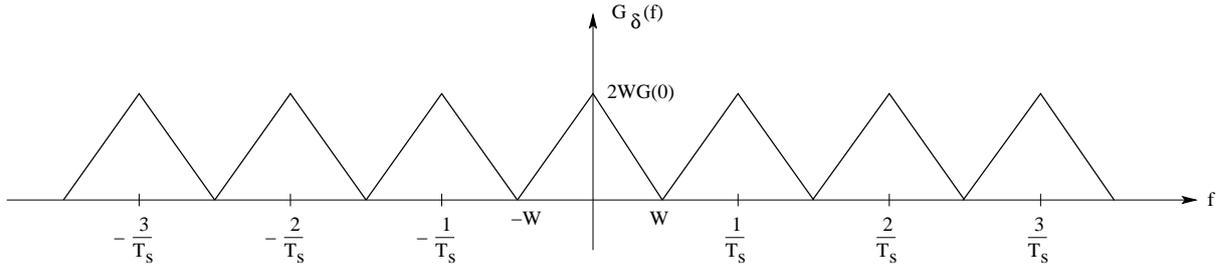


Figura 1.4: Espectro de la señal a muestreada para el caso  $f_s = 2W$ .

Todas las relaciones anteriores se pueden aplicar a cualquier señal continua  $g(t)$  de energía finita y de duración finita. Vamos a suponer ahora que la señal es estrictamente limitada a la banda  $W$ , es decir, la transformada de Fourier  $G(f)$  de la señal  $g(t)$  no tiene componentes frecuenciales fuera de  $|f| < W$ . En la figura 1.3 podemos ver el espectro  $G(f)$  limitado a la banda  $W$ . La forma de este espectro se considera triangular para simplificar las figuras, pero en la práctica puede tener cualquier otra forma. Vamos a suponer igualmente que se elige un periodo de muestreo  $T_s = \frac{1}{2W}$  o lo que es lo mismo, una tasa de muestreo  $f_s = 2W$ . En este caso se puede ver el espectro de  $G_\delta(f)$  en la figura 1.4. En este caso en particular la ecuación (1.9) se puede volver a escribir según

$$G_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2W}\right) \exp\left(-\frac{j\pi n f}{W}\right). \quad (1.11)$$

Comparando las figuras 1.3 y 1.4 se puede comprobar que se puede recuperar el espectro original  $G(f)$  a partir del espectro de la señal muestreada  $G_\delta(f)$  según

$$G(f) = \frac{1}{2W} G_\delta(f) \quad -W \leq f \leq W. \quad (1.12)$$

Juntando las ecuaciones (1.11) y (1.12) se tiene que

$$G(f) = \frac{1}{2W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2W}\right) \exp\left(-\frac{j\pi n f}{W}\right) \quad -W \leq f \leq W. \quad (1.13)$$

Si se conoce el valor de todas las muestras  $\{g(\frac{n}{2W})\}$  de la señal  $g(t)$ , entonces la transformada de Fourier  $G(f)$  de la señal  $g(t)$  está unívocamente determinada por la representación en serie de Fourier dada por la ecuación (1.13). Además puesto que  $g(t)$  se puede determinar a partir de su espectro  $G(f)$  utilizando la transformada inversa de Fourier, la señal original  $g(t)$  está también unívocamente determinada por las muestras  $\{g(\frac{n}{2W})\}$ . En otras palabras, la secuencia  $\{g(\frac{n}{2W})\}$  contiene toda la información de la señal  $g(t)$ . Vamos a considerar entonces el problema de recuperar la señal  $g(t)$  a partir de las muestras  $\{g(\frac{n}{2W})\}$ . Usando la ecuación (1.13) y la expresión de la transformada inversa de Fourier se puede escribir

$$g(t) = \int_{-W}^W G(f) \exp(j2\pi f t) df = \int_{-W}^W \frac{1}{2W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2W}\right) \exp\left(-\frac{j\pi n f}{W}\right) \exp(j2\pi f t) df. \quad (1.14)$$

Si intercambiamos el orden del sumatorio y la integral en la ecuación anterior se puede escribir

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{1}{2W} \int_{-W}^W \exp\left[j2\pi f \left(t - \frac{n}{2W}\right)\right] df. \quad (1.15)$$

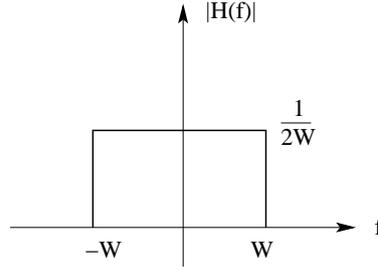


Figura 1.5: Filtro ideal de reconstrucción.

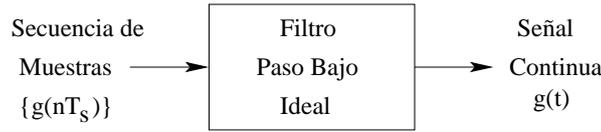


Figura 1.6: Esquema del proceso de recuperación de la señal a partir de las muestras.

La integral de la derecha de esta ecuación es inmediata y se puede calcular directamente obteniéndose finalmente

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin(2\pi Wt - n\pi)}{2\pi Wt - n\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - n). \quad (1.16)$$

La ecuación anterior se conoce como **fórmula de interpolación** para reconstruir la señal original  $g(t)$  a partir de las muestras  $\{g(\frac{n}{2W}) = g(nT_s)\}$ , siendo la función  $h(t) = \text{sinc}(2Wt) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$  la **función interpoladora**. Cada muestra se multiplica por una versión retardada de la función interpoladora y el resultado se suma para obtener la señal original  $g(t)$ . Se puede ver que esta ecuación representa la respuesta de un filtro paso bajo ideal de ancho de banda  $W$ , con retardo cero y cuya entrada es la señal muestreada  $g_\delta(t)$ . Esto se puede comprobar de forma intuitiva viendo los espectros  $G_\delta(f)$  y  $G(f)$  en las figuras 1.3 y 1.4 o a partir de la ecuación (1.12). En la figura 1.5 se puede ver la función de transferencia del filtro de reconstrucción. En la figura 1.6 se puede ver esquemáticamente el proceso de recuperación de la señal original  $g(t)$  a partir de las secuencia de muestras  $\{g(\frac{n}{2W})\}$ . En ese caso  $h(t)$  sería la respuesta al impulso del sistema lineal e invariante que lleva a cabo el proceso de interpolación y  $H(f)$  su función de transferencia, por lo que se tendría en el dominio de la frecuencia que

$$G(f) = G_\delta(f)H(f) \quad (1.17)$$

y en el dominio del tiempo

$$g(t) = g_\delta(t) * h(t) \quad (1.18)$$

Vamos a ver otra interpretación de la fórmula de interpolación dada por la ecuación (1.16) utilizando la propiedad de que la función interpoladora desplazada  $\text{sinc}(2Wt - n)$  forma una familia de funciones mutuamente ortogonales. Vamos a comenzar probando esta última afirmación en primer lugar. Vamos a considerar una versión generalizada del teorema de energía de Rayleigh dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(f)G_2^*(f)df, \quad (1.19)$$

siendo  $g_1(t)$  y  $g_2(t)$  dos señales de energía cualesquiera y  $G_1(f)$  y  $G_2(f)$  sus transformadas de Fourier, respectivamente. Vamos a aplicar este teorema a las señales que nos interesa según

$$g_1(t) = \text{sinc}(2Wt - n) = \text{sinc}\left[2W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right] \quad (1.20)$$

$$g_2(t) = \text{sinc}(2Wt - m) = \text{sinc}\left[2W\left(t - \frac{m}{2W}\right)\right], \quad (1.21)$$

siendo  $n$  y  $m$  dos enteros cualesquiera. Utilizando la transformada inmediata dada por el par

$$\text{sinc}(2Wt) \iff \frac{1}{2W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right) \quad (1.22)$$

y la propiedad de la transformada de Fourier del desplazamiento temporal se puede llegar a

$$G_1(f) = \frac{1}{2W} \Pi\left(\frac{f}{2W}\right) \exp\left(-\frac{j\pi n f}{W}\right) \quad (1.23)$$

$$G_2(f) = \frac{1}{2W} \Pi\left(\frac{f}{2W}\right) \exp\left(-\frac{j\pi m f}{W}\right). \quad (1.24)$$

Usando ahora la relación dada por la ecuación (1.19) se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2Wt-n)\text{sinc}(2Wt-m)dt = \left(\frac{1}{2W}\right)^2 \int_{-W}^W \exp\left[-\frac{j\pi f}{W}(n-m)\right] df = \frac{\sin[\pi(n-m)]}{2W\pi(n-m)} = \frac{1}{2W} \text{sinc}(n-m). \quad (1.25)$$

El resultado de esta ecuación es  $\frac{1}{2W}$  para  $n = m$  y cero en el resto, es decir, se tiene finalmente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2Wt-n)\text{sinc}(2Wt-m)dt = \begin{cases} \frac{1}{2W} & n = m \\ 0 & n \neq m, \end{cases} \quad (1.26)$$

con lo que queda demostrado que la familia de funciones  $\text{sinc}(2Wt-n)$  es ortogonal. La ecuación (1.16) representa entonces la expansión de la señal  $g(t)$  como la suma infinita de funciones ortogonales cuyos coeficientes son las muestras de la señal  $\left\{g\left(\frac{n}{2W}\right)\right\}$ . Utilizando la propiedad de ortogonalidad de estas funciones dada por la ecuación (1.26) se puede llegar a

$$g\left(\frac{n}{2W}\right) = 2W \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\text{sinc}(2Wt-n)dt \quad (1.27)$$

para las muestras de la señal. Los coeficientes en esta base,  $\left\{g\left(\frac{n}{2W}\right)\right\}$ , se pueden ver como una coordenada en un espacio de señal de dimensión infinita cuyos ejes son ortogonales y corresponden a las funciones  $\text{sinc}(2Wt-n)$ . Cada punto de este espacio corresponde a una señal  $g(t)$  y cada señal  $g(t)$  a un punto.

Se puede enunciar el **teorema de muestreo** o **teorema de Nyquist** para señales limitadas en banda de energía finita de dos modos:

- Una señal limitada en banda de energía que no tiene componentes a frecuencias mayores que  $W$  Hz se puede representar de forma exacta especificando los valores de la señal en instantes de tiempo separados  $T_s = \frac{1}{2W}$  segundos.
- Una señal limitada en banda de energía sin componentes frecuenciales superiores a  $W$  Hz se puede recuperar de forma exacta a partir de sus muestras tomadas a una tasa de  $f_s = 2W$  muestras por segundo.

La tasa de muestreo  $f_s = 2W$  definida para una señal con ancho de banda  $W$  se denomina **tasa de Nyquist**. El teorema de muestreo es la base de la equivalencia entre señales analógicas o continuas y señales en tiempo discreto. El teorema de muestreo se basa en la suposición de que la señal  $g(t)$  sea estrictamente limitada en banda. Esto sólo se satisface si  $g(t)$  tiene duración infinita. Es decir, una señal estrictamente limitada en banda no puede ser simultáneamente estrictamente limitada en tiempo y viceversa. Sin embargo, se va a poder aplicar en la práctica el teorema de muestreo a señales limitadas temporalmente cuando éstas sean esencialmente limitadas en banda en el sentido de que fuera de la banda de interés el valor que toma el espectro no es relevante. Esto justifica la aplicación práctica del teorema de muestreo.

Cuando la tasa de muestreo  $f_s$  excede a la de Nyquist  $2W$ , las replicas de  $G(f)$  requeridas para la construcción de  $G_\delta(f)$  están más separadas por lo que no existe ningún problema a la hora de recuperar la señal original  $g(t)$  a partir de la señal muestreada  $g_\delta(t)$  con el procedimiento descrito. Sin embargo, cuando la tasa de muestreo  $f_s$  es menor que  $2W$ , se puede ver que al construir la señal  $G_\delta(f)$ , las replicas de  $G(f)$  aparecen solapadas. En este caso el espectro  $G_\delta(f)$  pasaría a ser el de la figura 1.7. Las altas frecuencias de  $G(f)$  se ven reflejadas hacia las bajas frecuencias en  $G_\delta(f)$ . Este fenómeno se denomina **aliasing**. Es evidente que si la tasa de muestreo  $f_s$  es menor que la de Nyquist  $2W$ , la señal original  $g(t)$  no se puede recuperar de forma exacta a partir de las muestras y, por lo tanto, se pierde información en el proceso de muestreo.

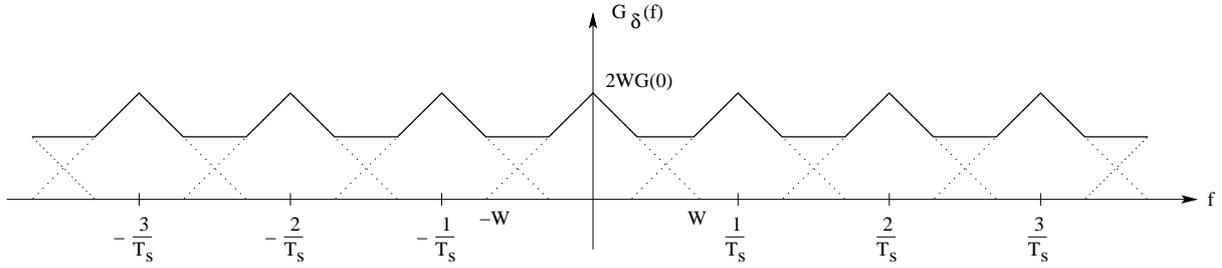


Figura 1.7: Espectro de la señal a muestreada para el caso  $f_s < 2W$ .

Debido a que una señal, como ya hemos dicho, no puede ser estrictamente limitada en tiempo y frecuencia, si la señal es finita en el tiempo, siempre existirá algo de aliasing y se perderá parte de la información en el proceso de muestreo. Sin embargo, este efecto suele ser en general despreciable. Para que así sea:

- Antes de muestrear la señal pasarla por un **filtro paso bajo anti-aliasing** para atenuar las componentes a alta frecuencia de la señal (o del ruido) fuera de la banda de interés.
- Muestrear la señal filtrada ligeramente por encima del límite de Nyquist.

Es interesante resaltar que el uso de una tasa de muestreo superior a la de Nyquist tiene el efecto deseable de hacer más sencillo el filtro paso bajo de reconstrucción para recuperar la señal. Ya no es necesario que sea un filtro ideal. Con una tasa de muestreo superior a la de Nyquist, las repeticiones de  $G(f)$  en el espectro de la señal muestreada  $G_\delta(f)$  aparecen separadas  $f_s - 2W$  Hz. En particular, se puede elegir un filtro paso bajo de reconstrucción con un ancho de banda  $B$  que satisfaga  $W < B < f_s - W$ . Además el filtro paso bajo no es necesario que sea ideal y puede tener una zona de transición más suave que caiga en el intervalo  $(W, f_s - W)$ .

## Capítulo 2

# Muestreo de Señales Paso Banda

Hasta ahora nos hemos centrado en señales paso bajo. Sin embargo, muchas señales en la práctica tienen naturaleza paso banda. En este caso cuando el ancho de banda es pequeño comparado con la componente superior a alta frecuencia, es posible utilizar una frecuencia de muestreo menor de dos veces la mayor frecuencia de la señal.

Para analizar esto con detalle. Vamos a considerar una señal  $g(t)$  paso banda con frecuencia portadora  $f_c$  y ancho de banda  $2W$ , de modo que el espectro ocupa el intervalo frecuencial  $f_c - W \leq |f| \leq f_c + W$ . En la figura 2.1 podemos ver el espectro de esta señal. La forma de este espectro se considera triangular para simplificar las figuras, pero en la práctica puede tener cualquier otra forma. Puesto que la señal  $g(t)$  es paso banda se puede expresar en función de la componente en fase  $g_c(t)$  y de la componente en cuadratura  $g_s(t)$  utilizando la forma canónica según

$$g(t) = g_c(t) \cos(2\pi f_c t) - g_s(t) \sin(2\pi f_c t). \quad (2.1)$$

Vamos a suponer inicialmente que la frecuencia superior  $f_c + W$  es múltiplo del ancho de banda  $2W$ , de modo que se cumple que

$$f_c + W = 2kW \implies f_c = (2k - 1)W, \quad (2.2)$$

donde  $k$  es un entero positivo. En los instantes de muestreo  $t = nT_s$  la ecuación (2.1) se puede poner como

$$g(nT_s) = g_c(nT_s) \cos(2\pi n f_c T_s) - g_s(nT_s) \sin(2\pi n f_c T_s), \quad (2.3)$$

donde  $T_s$  es el periodo de muestreo y  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Vamos a suponer que la frecuencia de muestreo  $f_s$  es dos veces el ancho de banda, por lo que  $f_s = 4W$  o lo que es lo mismo  $T_s = \frac{1}{4W}$ . Sustituyendo esto en la ecuación (2.3) se obtiene

$$g\left(\frac{n}{4W}\right) = g_c\left(\frac{n}{4W}\right) \cos\left(\frac{\pi n f_c}{2W}\right) - g_s\left(\frac{n}{4W}\right) \sin\left(\frac{\pi n f_c}{2W}\right). \quad (2.4)$$

Si tenemos en cuenta la ecuación (2.2) la ecuación anterior se puede poner según

$$g\left(\frac{n}{4W}\right) = g_c\left(\frac{n}{4W}\right) \cos\left[\frac{n\pi}{2}(2k - 1)\right] - g_s\left(\frac{n}{4W}\right) \sin\left[\frac{n\pi}{2}(2k - 1)\right]. \quad (2.5)$$

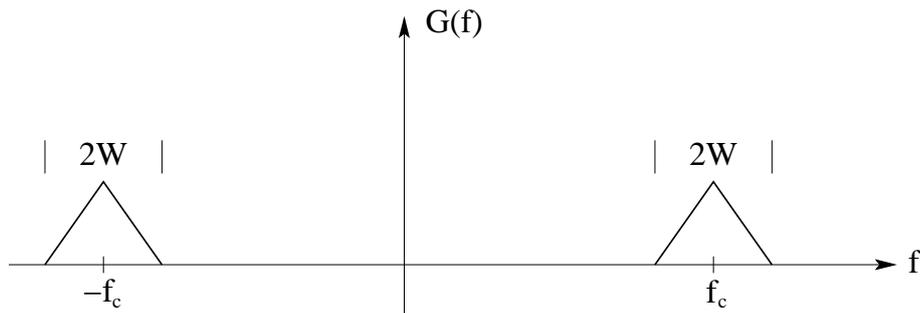


Figura 2.1: Espectro de una señal paso banda.

Para  $n$  par se puede poner  $n = 2v$ . En este caso se cumple para todo  $k$  que

$$\cos\left[\frac{n\pi}{2}(2k-1)\right] = \cos[v\pi(2k-1)] = (-1)^v \quad (2.6)$$

$$\sin\left[\frac{n\pi}{2}(2k-1)\right] = \sin[v\pi(2k-1)] = 0. \quad (2.7)$$

Teniendo en cuenta estas ecuaciones, la ecuación (2.5) se puede poner según

$$g\left(\frac{v}{2W}\right) = (-1)^v g_c\left(\frac{v}{2W}\right). \quad (2.8)$$

Para  $n$  impar se puede poner  $n = 2v - 1$ . En este caso se cumple para todo  $k$  que

$$\cos\left[\frac{n\pi}{2}(2k-1)\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2}(2v-1)(2k-1)\right] = 0 \quad (2.9)$$

$$\sin\left[\frac{n\pi}{2}(2k-1)\right] = \sin\left[\frac{\pi}{2}(2v-1)(2k-1)\right] = (-1)^{v+k}. \quad (2.10)$$

Teniendo en cuenta estas ecuaciones, la ecuación (2.5) se puede poner según

$$g\left(\frac{2v-1}{4W}\right) = (-1)^{v+k+1} g_s\left(\frac{2v-1}{4W}\right). \quad (2.11)$$

Las componentes  $g_c(t)$  y  $g_s(t)$  son paso bajo, ambas limitadas en banda a  $|f| < W$ . Entonces por el teorema de muestreo se sigue que tanto  $g_c(t)$  como  $g_s(t)$  se pueden determinar por sus muestras tomadas a una tasa uniforme de  $f_s = 2W$  muestras por segundo. Se puede decir entonces que:

1. Las muestras  $g_c\left(\frac{v}{2W}\right)$  para  $v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  son suficientes según el teorema de muestreo para determinar la componente en fase  $g_c(t)$  según

$$g_c(t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} g_c\left(\frac{v}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - v) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} (-1)^v g\left(\frac{v}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - v). \quad (2.12)$$

2. Las muestras  $g_s\left(\frac{2v-1}{4W}\right)$  para  $v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  son suficientes según el teorema de muestreo para determinar la componente en cuadratura  $g_s(t)$  según

$$g_s(t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} g_s\left(\frac{2v-1}{4W}\right) \text{sinc}\left(2Wt - v + \frac{1}{2}\right) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} (-1)^{v+k+1} g\left(\frac{2v-1}{4W}\right) \text{sinc}\left(2Wt - v + \frac{1}{2}\right). \quad (2.13)$$

En esta ecuación se ha tenido en cuenta que las muestras de la señal  $g(t)$  utilizadas para reconstruir la componente en cuadratura  $g_s(t)$  son las impares, por lo que están retrasadas  $T_s = \frac{1}{4W}$  con respecto a las muestras de  $g(t)$  utilizadas para reconstruir la componente en fase  $g_c(t)$  que son las pares.

Sustituyendo la ecuación (2.12) para la componente en fase  $g_c(t)$  y la ecuación (2.13) para la componente en cuadratura en la forma canónica dada por la ecuación (2.1), se tiene que

$$g(t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} (-1)^v g\left(\frac{v}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - v) \cos(2\pi f_c t) + \sum_{v=-\infty}^{\infty} (-1)^{v+k} g\left(\frac{2v-1}{4W}\right) \text{sinc}\left(2Wt - v + \frac{1}{2}\right) \sin(2\pi f_c t), \quad (2.14)$$

siendo  $k$  un entero positivo.

Teniendo en cuenta que  $T_s = \frac{1}{4W}$  y que  $\frac{f_c}{W} = 2k - 1$  se puede comprobar fácilmente que se cumple

$$(-1)^v \cos(2\pi f_c t) = \cos[2\pi f_c (t - 2vT_s)] \quad (2.15)$$

$$(-1)^{v+k} \sin(2\pi f_c t) = \cos[2\pi f_c (t - (2v-1)T_s)], \quad (2.16)$$

por lo que la ecuación (2.14) se puede poner de forma más compacta según

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) \text{sinc}\left(2Wt - \frac{n}{2}\right) \cos[2\pi f_c (t - nT_s)]. \quad (2.17)$$

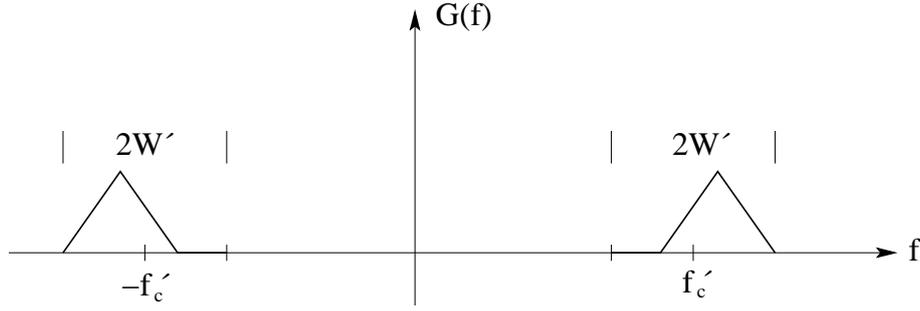


Figura 2.2: Espectro de una señal paso banda para la que se ha definido el nuevo ancho de banda y frecuencia central.

Esta ecuación nos da la expresión deseada para recuperar una señal paso banda  $g(t)$  a partir de sus muestras tomadas a una tasa mínima de muestreo  $f_s = 4W$  para el caso especial en el que la frecuencia superior de la señal  $g(t)$  sea un múltiplo entero del ancho de banda  $2W$ .

Vamos a considerar ahora el caso general para el que sólo es necesario asumir que  $f_c > W \geq 0$ . Es decir, la banda de frecuencias significativas de la señal  $g(t)$  ocupa una posición arbitraria en el eje de frecuencias. Sea  $r$  el entero que satisface

$$r \leq \frac{f_c + W}{2W} < r + 1. \quad (2.18)$$

Manteniendo la frecuencia superior  $f_c + W$  constante vamos a incrementar el ancho de banda hacia las bajas frecuencias hasta un nuevo valor  $2W'$  de forma que se cumpla

$$\frac{f_c + W}{2W'} = r. \quad (2.19)$$

Vamos a definir también una nueva frecuencia central  $f'_c$  a mitad de la banda de la señal. Para esta nueva frecuencia se cumple

$$f'_c = \left(1 - \frac{1}{2r}\right)(f_c + W). \quad (2.20)$$

En la figura 2.2 se puede ver gráficamente el nuevo ancho de banda  $2W'$  y la nueva frecuencia central  $f'_c$ . Como se puede ver en esta figura el espectro sigue siendo el mismo que el de la señal original  $g(t)$ . Sin embargo, hemos conseguido que la frecuencia superior  $f_c + W$  sea ahora múltiplo del nuevo ancho de banda  $2W'$ . La representación de la señal es la ya explicada substituyendo  $W$  por  $W'$ , para el nuevo periodo de muestreo  $T'_s = \frac{1}{4W'}$  y reemplazando  $f_c$  por  $f'_c$  y  $k$  por  $r$ . En particular las expresiones para la componente en fase  $g_c(t)$  y en cuadratura  $g_s(t)$  de la señal dadas por las ecuaciones (2.12) y (2.13) pasan a ser ahora

$$g_c(t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} (-1)^v g\left(\frac{v}{2W'}\right) \text{sinc}(2W't - v) \quad (2.21)$$

$$g_s(t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} (-1)^{v+r+1} g\left(\frac{2v-1}{4W'}\right) \text{sinc}\left(2W't - v + \frac{1}{2}\right), \quad (2.22)$$

respectivamente. La ecuación (2.17) se puede poner ahora según

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT'_s) \text{sinc}\left(2W't - \frac{n}{2}\right) \cos[2\pi f'_c(t - nT'_s)] \quad (2.23)$$

que muestra que  $g(t)$  se puede recuperar de forma exacta a partir de sus muestras tomadas a una tasa  $f'_s = 4W'$ .

La ecuación (2.23) se puede poner de forma más estándar convolucionando a ambos lados con la función  $\phi_1(t)$  dada por

$$\phi_1(t) = 4W \text{sinc}(2Wt) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.24)$$

con transformada de Fourier dada por

$$\Phi_1(f) = \begin{cases} 1 & f_c - W < |f| < f_c + W \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases} \quad (2.25)$$

es decir, es un filtro paso banda ideal que ocupa la misma banda de frecuencias que la señal paso banda  $g(t)$ . Por tanto, su convolución con  $g(t)$  la deja sin modificar

$$g(t) * \phi_1(t) = g(t) \quad (2.26)$$

Definiendo ahora una segunda función  $\phi_2(t)$  según

$$\phi_2(t) = \text{sinc}(2W't) \cos(2\pi f'_c t) \quad (2.27)$$

con transformada de Fourier dada por

$$\Phi_2(f) = \begin{cases} \frac{1}{4W'} & f_c - W' < |f| < f'_c + W' \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases} \quad (2.28)$$

entonces, teniendo en cuenta la ecuación (2.26), la ecuación (2.23) se puede poner según

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT'_s) \phi_2(t) * \delta(t - nT'_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT'_s) \phi_1(t) * \phi_2(t) * \delta(t - nT'_s). \quad (2.29)$$

La convolución de las funciones  $\phi_1(t)$  y  $\phi_2(t)$  corresponde a su producto en el dominio de Fourier según

$$\Phi_1(f) \Phi_2(f) = \begin{cases} \frac{1}{4W'} & f_c - W < |f| < f_c + W \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} = \frac{1}{4W'} \Phi_1(f) \quad (2.30)$$

por lo que teniendo en cuenta la ecuación (2.24) se tiene que

$$\phi_1(t) * \phi_2(t) = \frac{1}{4W'} \phi_1(t) = \frac{W}{W'} \text{sinc}(2Wt) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.31)$$

La ecuación (2.29) se puede poner entonces

$$g(t) = \frac{1}{4W'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT'_s) \phi_1(t) * \delta(t - nT'_s) = \frac{1}{4W'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT'_s) \phi_1(t - nT'_s). \quad (2.32)$$

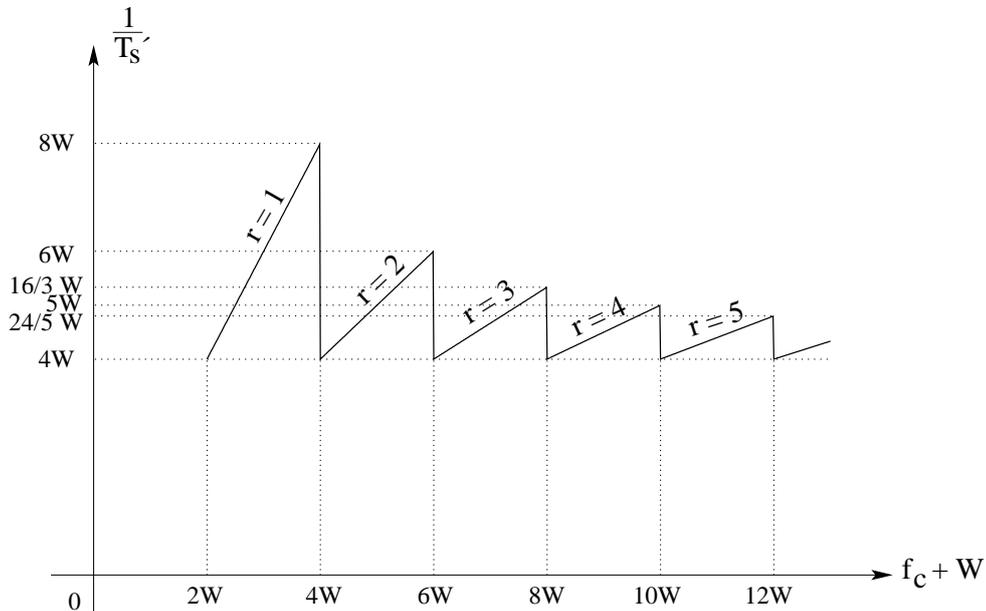


Figura 2.3: Frecuencia de muestreo como función de la frecuencia máxima de la señal paso banda.

Teniendo en cuenta que  $T'_s = \frac{1}{4W^r}$  y la ecuación (2.24), la ecuación anterior se puede poner finalmente según

$$g(t) = 4WT'_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT'_s) \text{sinc}[2W(t - nT'_s)] \cos[2\pi f_c(t - nT'_s)]. \quad (2.33)$$

En el caso general, la frecuencia de muestreo mínima  $f'_s$  viene dada por

$$f'_s = \frac{2(f_c + W)}{r}, \quad (2.34)$$

siendo  $r$  el entero dado por la ecuación (2.18). Si dibujamos la frecuencia de muestreo mínima  $f'_s$  en función de la frecuencia máxima  $f_c + W$  de la señal paso banda  $g(t)$ , obtenemos la gráfica de la figura 2.3. Como puede verse, independientemente de la posición de la banda de frecuencias de la señal, la frecuencia mínima de muestreo está siempre entre  $4W$  y  $8W$ . En la figura anterior los mínimos corresponden siempre a una frecuencia mínima de muestreo de  $4W$ , mientras que los máximos a una frecuencia  $4W \frac{r+1}{r}$ , es decir se cumple que

$$4W \leq f'_s \leq 4W \frac{r+1}{r} \quad (2.35)$$

En general, se debería filtrar la señal con un filtro anti-aliasing paso banda y muestrear la señal a una tasa ligeramente superior a la dada por la figura 2.3 o por la ecuación (2.34) para tener en cuenta que la señal paso banda original no tiene que ser estrictamente limitada en banda y simplificar el diseño del filtro paso banda de reconstrucción o la interpolación dada en el dominio del tiempo por la ecuación (2.33).

## Capítulo 3

# Aspectos Prácticos del Muestreo

En la práctica el muestreo de una señal analógica se logra mediante circuitos con transistores que conmutan a alta velocidad. Así se puede ver que la señal muestreada resultante no es exactamente la descrita de forma ideal con muestras instantáneas debido a que la operación de muestreo, aunque sea muy rápida, requiere un intervalo de tiempo distinto de cero. A menudo resulta que las muestras de una señal analógica son alargadas en el tiempo intencionadamente para su transmisión o para instrumentación. Vamos a analizar los efectos de las desviaciones del muestreo ideal.

### 3.1. Muestreo de Duración Finita

Vamos a considerar una señal analógica arbitraria  $g(t)$ , como la que se muestra en la figura 3.1, aplicada a un circuito conmutador controlado por una función muestreadora  $c(t)$  que consiste en un tren de pulsos rectangulares de amplitud  $A$ , duración  $T$  y periodo  $T_s$  como se muestra en la figura 3.2. La salida del circuito conmutador  $s(t)$  se puede ver en la figura 3.3. Se puede ver que la operación de conmutación extrae de la señal  $g(t)$  trozos de duración  $T$  a una tasa  $f_s = 1/T_s$ . La señal muestreada  $s(t)$  consiste en una secuencia de pulsos cuya expresión viene dada simplemente por

$$s(t) = c(t)g(t). \quad (3.1)$$

La señal muestreadora  $c(t)$  es una señal periódica con periodo  $T_s$  por lo que se puede representar en serie de Fourier. La expresión de la serie compleja de Fourier para esta señal se puede determinar de forma sencilla, obteniéndose

$$c(t) = \frac{TA}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \left( \frac{nT}{T_s} \right) \exp \left( \frac{j2\pi nt}{T_s} \right). \quad (3.2)$$

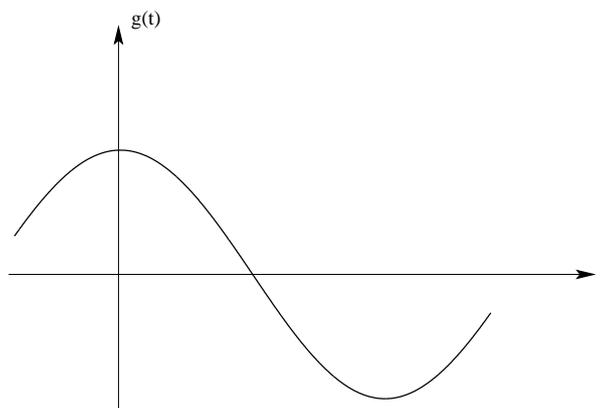


Figura 3.1: Señal arbitraria.

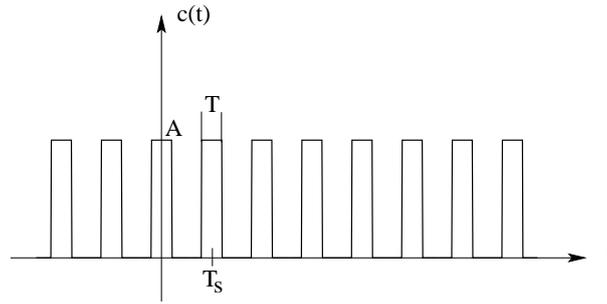


Figura 3.2: Señal muestreadora formada por un tren de pulsos rectangulares.

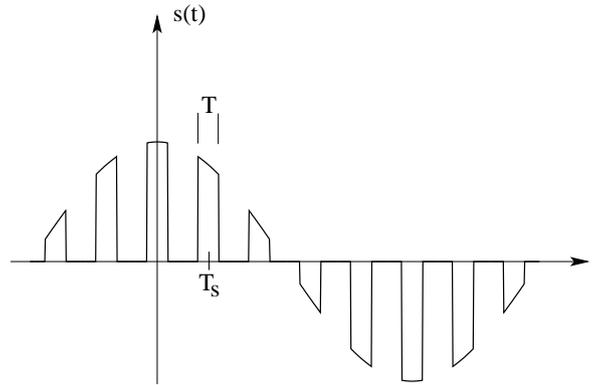


Figura 3.3: Señal muestreada a la salida del conmutador.

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.1), se obtiene

$$s(t) = \frac{TA}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{nT}{T_s}\right) \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_s}\right) g(t). \quad (3.3)$$

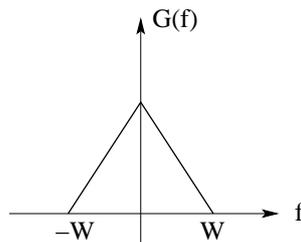
Utilizando la propiedad de la transformada de Fourier de desplazamiento frecuencial se puede llegar sin problema a la expresión para el espectro  $S(f)$  de la señal  $s(t)$  dada por la ecuación (3.3), obteniéndose

$$S(f) = \frac{TA}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{nT}{T_s}\right) G\left(f - \frac{n}{T_s}\right), \quad (3.4)$$

donde  $G(f)$  es el espectro de la señal original  $g(t)$ .

Si suponemos que la señal  $g(t)$  no tiene componentes fuera de  $|f| < W$  según la figura 3.4, el espectro de la señal  $s(t)$  viene dado gráficamente por la figura 3.5. Hemos supuesto que la tasa de muestreo  $f_s$  es superior al límite de Nyquist  $2W$  para no tener aliasing. Como se puede apreciar el efecto de la duración finita de los pulsos es multiplicar el lóbulo  $n$  por el factor  $TA \text{sinc}\left(\frac{nT}{T_s}\right)$ . La señal original se va a poder recuperar sin distorsión pasando la señal muestreada  $s(t)$  por un filtro paso bajo ideal con ancho de banda  $B$  que satisfaga la condición

$$W < B < f_s - W \quad (3.5)$$

Figura 3.4: Espectro de la señal de la figura 3.1 limitado a la banda  $W$ .

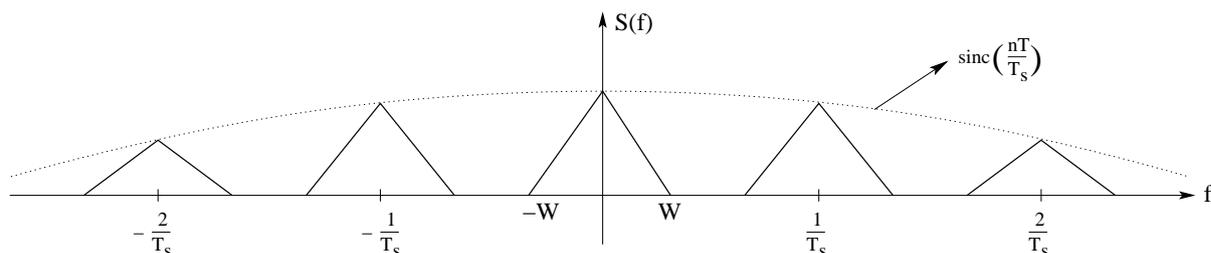


Figura 3.5: Espectro de la señal muestreada de la figura 3.3.

o por un filtro real cuya zona de transición caiga en dicho intervalo.

Se puede decir que el uso de pulsos de muestreo de duración finita no tiene efectos importantes en el proceso de muestreo. En el caso particular que los pulsos tengan área unidad, es decir,  $TA = 1$ , la ecuación (3.4) y la ecuación que define el espectro para el muestreo ideal dada por

$$G_{\delta}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \quad (3.6)$$

son iguales en el límite cuando hacemos  $T \rightarrow 0$ . O dicho de otro modo la señal  $s(t)$  tiende a la señal muestreada ideal  $g_{\delta}(t)$  según la duración de los pulsos  $T \rightarrow 0$ , cuando mantenemos el área de los pulsos unidad,  $TA = 1$ .

## 3.2. Muestras Planas o Flat-Top

Vamos a considerar ahora la situación en la que la señal analógica  $g(t)$  se muestrea de forma instantánea a una tasa  $f_s = 1/T_s$  y cada muestra se mantiene o alarga una duración  $T$  tal y como se muestra en la figura 3.6. Este tipo de muestreo se denomina **muestreo Flat-Top**.

Una razón para incrementar intencionadamente la longitud de las muestras es para evitar el uso de un ancho de banda de transmisión excesivo, ya que el ancho de banda es inversamente proporcional a la duración de los pulsos. Si denominamos  $s(t)$  a la señal muestreada empleando muestras Flat-Top, podemos escribir

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)h(t - nT_s), \quad (3.7)$$

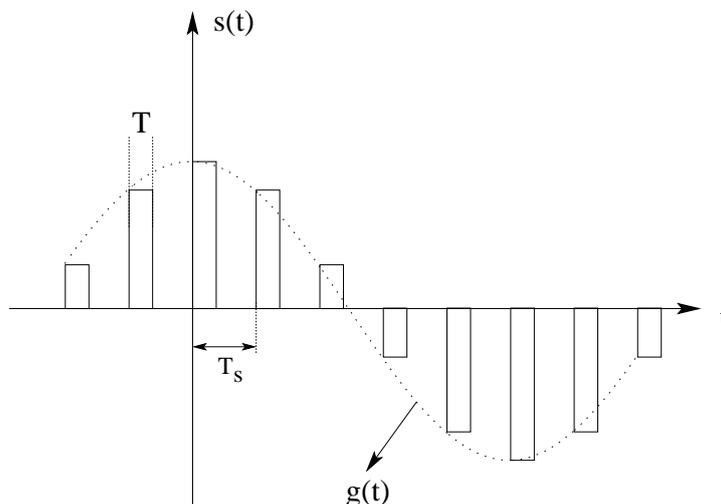


Figura 3.6: Señal muestreada empleando muestras de tipo Flat-Top.

donde  $h(t)$  es un pulso rectangular de amplitud unidad y duración  $T$  definido por

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (3.8)$$

La expresión para la señal con muestreo instantáneo  $g_\delta(t)$  como ya vimos era

$$g_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)\delta(t - nT_s). \quad (3.9)$$

Si convolucionamos la señal con muestreo instantáneo  $g_\delta(t)$  con  $h(t)$  se obtiene el desarrollo

$$\begin{aligned} g_\delta(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\delta(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)\delta(\tau - nT_s)h(t - \tau)d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT_s)h(t - \tau)d\tau. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Utilizando la propiedad de desplazamiento temporal de  $\delta(t)$  se obtiene

$$s(t) = g_\delta(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)h(t - nT_s), \quad (3.11)$$

por lo que la señal muestreada Flat-Top  $s(t)$  es matemáticamente equivalente a la convolución de la señal muestreada ideal  $g_\delta(t)$  con la forma del pulso  $h(t)$ .

Tomando ahora transformada de Fourier en la ecuación (3.11) se tiene

$$S(f) = G_\delta(f)H(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{n}{T_s}\right)H(f), \quad (3.12)$$

siendo  $H(f)$  la transformada de Fourier de la forma del pulso  $h(t)$  y  $G_\delta(f)$  el espectro de la señal muestreada ideal  $g_\delta(t)$ .

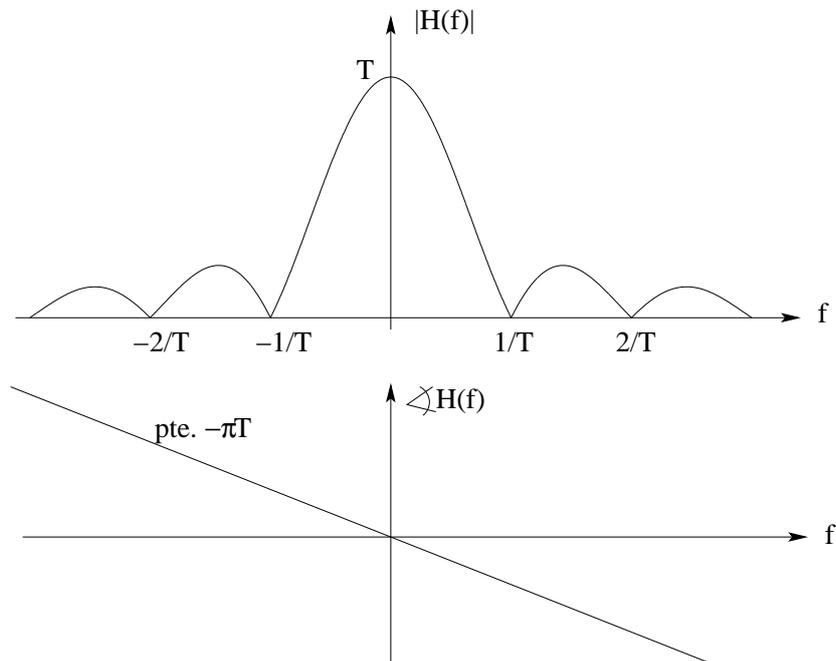


Figura 3.7: Respuesta en amplitud y en fase del sistema con función de transferencia  $H(f)$ .

Si suponemos que la señal  $g(t)$  está limitada en banda y que la tasa de muestreo  $f_s$  es mayor que la tasa de Nyquist, si pasamos la señal  $s(t)$  a través del filtro paso bajo de reconstrucción, el espectro de la señal a la salida será  $G(f)H(f)$ . Es decir, el proceso de muestreo y reconstrucción va a ser equivalente en este caso a pasar la señal original  $g(t)$  a través de un filtro paso bajo de función de transferencia  $H(f)$  o respuesta al impulso  $h(t)$ . La expresión para  $H(f)$  se puede determinar de forma sencilla, obteniéndose

$$H(f) = T \operatorname{sinc}(fT) \exp(-j\pi fT). \quad (3.13)$$

En la figura 3.7 se puede ver gráficamente la respuesta en amplitud y en fase de este filtro (no se ha tenido en cuenta en la representación de la fase el signo de la función sinc). Se puede decir que las muestras Flat-Top introducen distorsión de amplitud, además de un retardo de  $T/2$ . Este efecto es parecido a la variación de la frecuencia debido al tamaño finito de la apertura del escaneado en televisión y fax. Se suele denominar **efecto apertura**.

La distorsión de amplitud se suele corregir conectando un ecualizador en cascada con el filtro paso bajo de reconstrucción. Este ecualizador tiene el efecto de disminuir la pérdida en la banda del filtro de reconstrucción según la frecuencia crece de forma que se compense el efecto apertura. Idealmente la respuesta en amplitud del ecualizador viene dada por

$$\frac{1}{|H(f)|} = \frac{1}{T \operatorname{sinc}(fT)} = \frac{\pi f}{\sin(\pi fT)}. \quad (3.14)$$

En la práctica la cantidad de ecualización necesaria es pequeña. A la frecuencia superior  $f = \frac{1}{2T_s}$ , que es donde hay más distorsión, cuando la frecuencia de muestreo es la de Nyquist, se puede ver que la respuesta en amplitud del ecualizador normalizada a la frecuencia cero viene dada por

$$\frac{(\pi/2)(T/T_s)}{\sin[(\pi/2)(T/T_s)]}, \quad (3.15)$$

donde  $T/T_s$  es el tiempo de ocupación de muestra. En la figura 3.8 podemos ver esta respuesta máxima del ecualizador como función del tiempo de ocupación de muestra  $T/T_s$ . Lo ideal sería que el factor de compensación máxima fuera unidad (no compensación). Por ejemplo para un tiempo de ocupación del 10%, el factor de compensación es de 1,0041. Por eso, para tiempos de ocupación menores del 10%, el efecto apertura se puede considerar despreciable y la ecualización puede eliminarse.

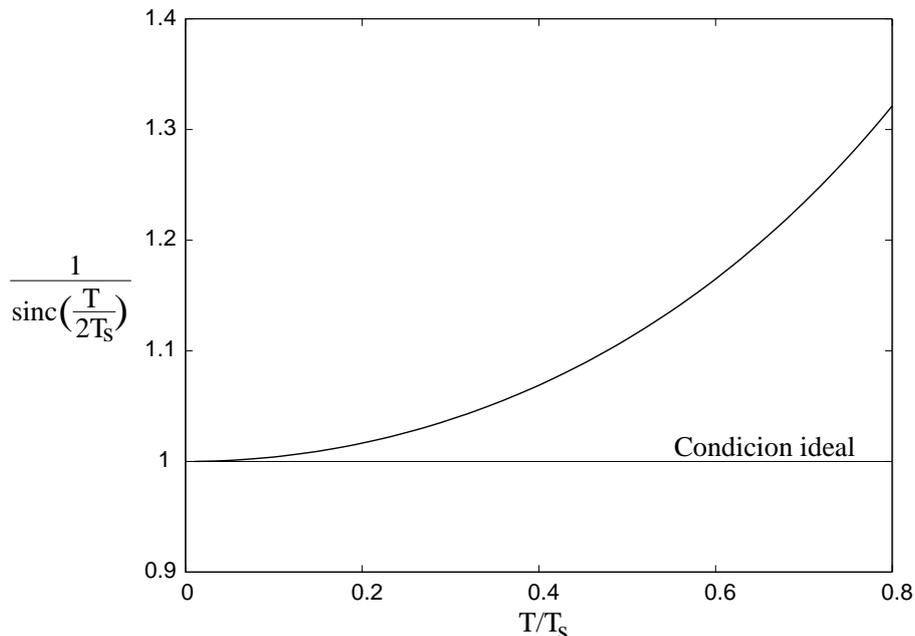


Figura 3.8: Respuesta en amplitud máxima del ecualizador en función del tiempo de ocupación de muestra.

## Capítulo 4

# Reconstrucción de una Señal Aleatoria a partir de sus Muestras

El estudio del proceso de muestreo quedaría incompleto sin considerar la reconstrucción de una señal aleatoria a partir de sus muestras. Vamos a ver que un proceso estacionario en sentido amplio cuya densidad espectral de potencia está limitada en banda se puede reconstruir a partir de la secuencia de muestras tomadas a una tasa igual a dos veces la frecuencia superior de la señal. En este caso el proceso de reconstrucción da lugar a una señal que es igual a la original en sentido cuadrático medio en todo instante de tiempo.

Sea un proceso estocástico o señal aleatoria  $X(t)$  estacionario en sentido amplio con función de autocorrelación  $R_X(\tau)$  y densidad espectral de potencia  $S_X(f)$ . La condición de señal limitada en banda se puede escribir según

$$S_X(f) = 0 \quad \text{para } |f| > W. \quad (4.1)$$

Supongamos ahora que se dispone de una secuencia infinita de muestras tomadas del proceso a la tasa de Nyquist  $f_s = 2W$ , es decir, a dos veces la frecuencia superior de la señal. Si denotamos con  $X'(t)$  a la señal aleatoria reconstruida a partir de la secuencia infinita de muestras, podemos utilizar la fórmula de interpolación ya vista obteniéndose

$$X'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - n), \quad (4.2)$$

donde cada  $X\left(\frac{n}{2W}\right)$  es una variable aleatoria obtenida muestreando el proceso  $X(t)$  en el instante de tiempo  $t = \frac{n}{2W}$ .

El valor cuadrático medio del error entre la señal original  $X(t)$  y el proceso reconstruido  $X'(t)$  viene dado por

$$\mathcal{E} = E[(X(t) - X'(t))^2] = E[X^2(t)] - 2E[X(t)X'(t)] + E[(X'(t))^2]. \quad (4.3)$$

El primer término de esta ecuación es el valor cuadrático medio de la señal original y se puede poner según

$$E[X^2(t)] = R_X(0). \quad (4.4)$$

Para el segundo término de la ecuación (4.3) se puede sustituir  $X'(t)$  por su valor dado por la ecuación (4.2), obteniéndose

$$E[X(t)X'(t)] = E\left[X(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - n)\right]. \quad (4.5)$$

Si en esta ecuación intercambiamos el orden del sumatorio y el valor esperado obtenemos

$$E[X(t)X'(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\left[X(t)X\left(\frac{n}{2W}\right)\right] \text{sinc}(2Wt - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X\left(t - \frac{n}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - n). \quad (4.6)$$

Para procesos estacionarios  $E[X(t)X'(t)]$  es independiente del tiempo  $t$ , entonces podemos poner  $t = 0$  en la ecuación (4.6) y tener en cuenta que en el caso real la autocorrelación es par,  $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$ , por

lo que obtenemos

$$E[X(t)X'(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X\left(\frac{n}{2W}\right) \text{sinc}(-n) \quad (4.7)$$

Los términos  $R_X\left(\frac{n}{2W}\right)$  representan muestras de la función de autocorrelación  $R_X(\tau)$  tomadas a una tasa  $f_s = 2W$ . Ya que, como hemos dicho, la transformada de Fourier de la autocorrelación  $R_X(\tau)$  es la densidad espectral de potencia  $S_X(f)$  que está limitada en banda según la ecuación (4.1), se cumple el teorema de Nyquist y por tanto utilizando la fórmula de interpolación se puede escribir

$$R_X(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X\left(\frac{n}{2W}\right) \text{sinc}(2W\tau - n) \quad (4.8)$$

para recuperar la autocorrelación  $R_X(\tau)$  a partir de sus muestras  $R_X\left(\frac{n}{2W}\right)$ . Comparando las ecuaciones (4.7) y (4.8), se puede fijar  $\tau = 0$  en la segunda para poder igualarlas obteniéndose finalmente

$$E[X(t)X'(t)] = R_X(0) \quad (4.9)$$

para el segundo término de la ecuación (4.3).

Para el tercer término de la ecuación (4.3) se puede sustituir  $X'(t)$  por su valor dado por la ecuación (4.2), obteniéndose

$$\begin{aligned} E[(X'(t))^2] &= E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - k)\right] \\ &= E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2Wt - n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2W}\right) X\left(\frac{k}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - k)\right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Si en esta ecuación intercambiamos el orden del sumatorio y el valor esperado obtenemos

$$\begin{aligned} E[(X'(t))^2] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2Wt - n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\left[X\left(\frac{n}{2W}\right) X\left(\frac{k}{2W}\right)\right] \text{sinc}(2Wt - k) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2Wt - n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X\left(\frac{n-k}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - k) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Se puede comprobar fácilmente teniendo en cuenta la ecuación (4.8) que el segundo sumatorio de la ecuación (4.11) se puede poner según

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X\left(\frac{n-k}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X\left(\frac{k}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - n - k) = R_X\left(t - \frac{n}{2W}\right). \quad (4.12)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación (4.11) y teniendo en cuenta las ecuaciones (4.6) y (4.9) se obtiene finalmente

$$E[(X'(t))^2] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X\left(t - \frac{n}{2W}\right) \text{sinc}(2Wt - n) = R_X(0) \quad (4.13)$$

para el tercer término de la ecuación (4.3).

Sustituyendo las ecuaciones (4.4), (4.9) y (4.13) en la ecuación (4.3) se tiene

$$\mathcal{E} = E[(X(t) - X'(t))^2] = E[X^2(t)] - 2E[X(t)X'(t)] + E[(X'(t))^2] = 0. \quad (4.14)$$

Es decir, el valor cuadrático medio de la diferencia entre la señal original  $X(t)$  y la señal reconstruida  $X'(t)$  utilizando las muestras tomadas a la tasa de Nyquist  $f_s = 2W$  es igual a cero.

## Capítulo 5

# Multiplexación por División en el Tiempo (TDM)

El teorema de muestreo nos permite transmitir toda la información contenida en una señal limitada en banda  $g(t)$  utilizando muestras tomadas uniformemente a una tasa ligeramente superior a la de Nyquist. Una característica importante en el proceso de muestreo es la conservación del tiempo. Esto quiere decir que la transmisión de una señal muestreada utiliza el canal de comunicación solamente durante una fracción muy pequeña del tiempo de muestreo de forma periódica y, de este modo, el resto del tiempo entre muestras adyacentes no se utiliza. Este tiempo que no se utiliza se puede usar precisamente para transmitir muestras procedentes de otras fuentes de información independientes en un sistema en tiempo compartido. Así obtenemos lo que se denomina **señal TDM** o **multiplexación por división en el tiempo** que permite la utilización conjunta de un canal de comunicaciones común por un conjunto de fuentes independientes sin interferencia mutua.

En la figura 5.1 se puede ver esquemáticamente un sistema TDM extremo a extremo. El sistema tiene como entrada  $N$  señales analógicas procedentes de  $N$  fuentes independientes. Cada una de estas señales de entrada se limita en banda al ancho de banda adecuado mediante un filtro paso bajo antialiasing para eliminar las componentes en frecuencia no esenciales para la representación de la señal. Las  $N$  salidas de los filtros paso bajo se aplican a un conmutador que se implementa en la práctica mediante circuitería electrónica de conmutación. El propósito de este conmutador es:

- Tomar una muestra estrecha de cada una de las  $N$  entradas a una tasa  $f_s$  ligeramente superior a la tasa de Nyquist  $2W$ , siendo  $W$  la frecuencia de corte de los filtros paso bajo antialiasing.
- Colocar cada una de las  $N$  muestras procedentes de las  $N$  señales de forma ordenada dentro de cada periodo  $T_s$ .

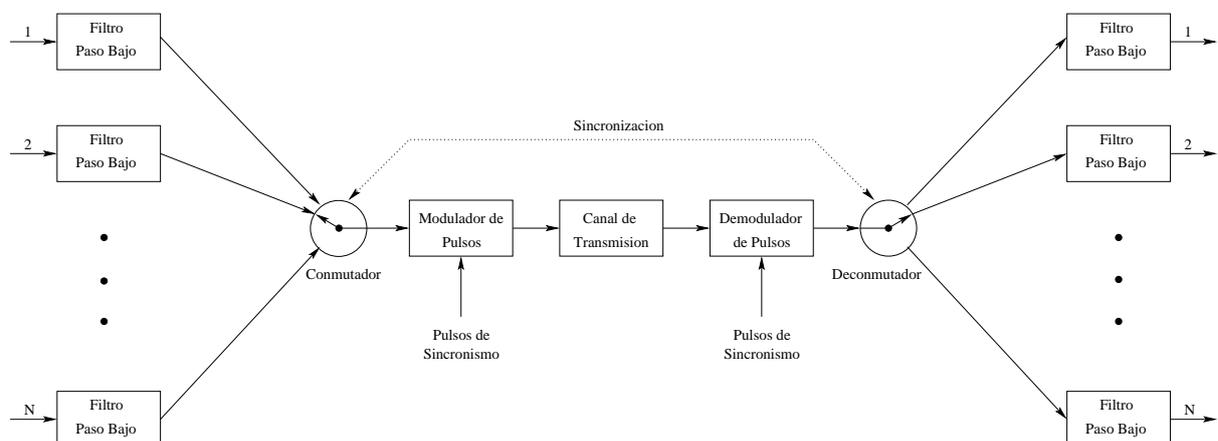


Figura 5.1: Esquema de un sistema TDM extremo a extremo.

La segunda operación del conmutador es de hecho lo esencial de la multiplexación por división en el tiempo. Tras el conmutador, la señal ya multiplexada se aplica a un modulador de pulsos, cuyo propósito es modificar la señal multiplexada de la forma apropiada para su transmisión por el canal de comunicaciones. Se puede ver que el proceso de multiplexación introduce una expansión en el ancho de banda de un factor de  $N$ , puesto que el esquema TDM coloca  $N$  muestras procedentes de fuentes independientes en un intervalo temporal igual al periodo de muestreo. Es decir, la tasa real de muestras por segundo es de  $Nf_s$ .

En el extremo receptor, la señal recibida se aplica a un demodulador de pulsos que realiza la operación inversa al modulador de pulsos. Las muestras ordenadas en la señal TDM a la salida del demodulador de pulsos se distribuyen en los  $N$  canales utilizando un de-conmutador, como se puede ver en la figura 5.1, que debe estar en perfecto sincronismo con el conmutador del transmisor. La sincronización entre el conmutador y de-conmutador es esencial para el correcto funcionamiento del sistema TDM. El modo en el que se implementa esta sincronización, como veremos más adelante, va a depender del método de modulación de pulsos empleado para transmitir por el canal de comunicaciones la secuencia multiplexada. Finalmente, como se puede ver en la figura 5.1, cada una de las  $N$  señales se pasa por el filtro paso bajo de reconstrucción correspondiente para obtener las  $N$  señales analógicas.

El sistema TDM es muy sensible a la dispersión del canal de comunicaciones, esto es, es muy sensible a variaciones de la amplitud con la frecuencia o a pérdidas de proporcionalidad de la fase con la frecuencia. En general, va a ser necesario realizar una ecualización de la señal para asegurar el correcto funcionamiento del sistema.

El sistema TDM es inmune a no linealidades en la amplitud del canal de comunicaciones como fuente de **diafonía** (proceso por el cual se mezclan o interfieren señales procedentes de fuentes o canales diferentes), debido a que las diferentes señales no están presentes en el canal de forma simultánea.

TDM y FDM constituyen los dos estándares básicos de multiplexación más utilizados en telefonía. Con la coexistencia de los sistemas analógicos y digitales en la red telefónica, es necesario disponer de interfaces entre las secciones analógicas y las secciones digitales de la red. El elemento denominado **transmultiplexor** es el interfaz diseñado con este propósito: convierte una señal TDM en FDM y viceversa.

## Capítulo 6

# Modulación de pulsos en Amplitud (PAM)

En la modulación de pulsos en amplitud o **PAM**, la amplitud de pulsos rectangulares equiespaciados es proporcional al valor instantáneo de las muestras de una señal continua. En la figura 6.1 podemos ver un ejemplo de señal moduladora. En la figura 6.2 se puede ver la portadora utilizada para generar la señal PAM. Como puede verse no es más que un tren periódico de pulsos. En la figura 6.3 podemos ver la señal PAM generada a partir de la señal moduladora de la figura 6.1 y la señal portadora de la figura 6.2.

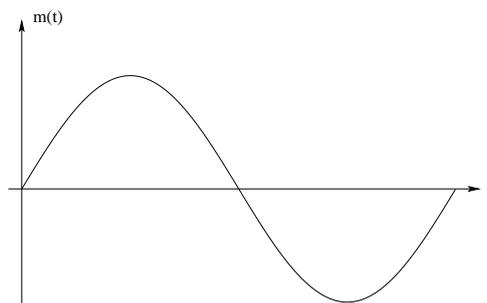


Figura 6.1: Señal moduladora.

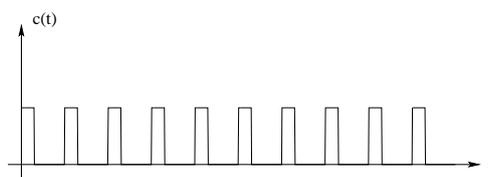


Figura 6.2: Señal portadora utilizada en PAM.

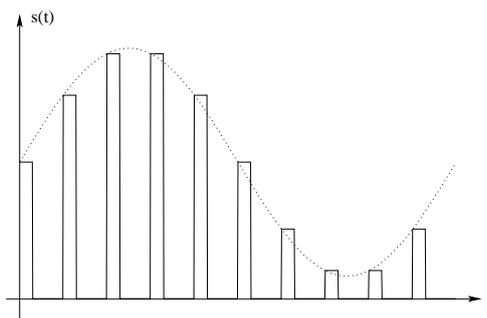


Figura 6.3: Señal PAM.

La señal PAM se puede expresar analíticamente según

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [1 + k_a m(nT_s)]g(t - nT_s), \quad (6.1)$$

donde  $m(nT_s)$  es la muestra  $n$  de la señal moduladora  $m(t)$ ,  $T_s$  es el periodo de muestreo,  $k_a$  es la sensibilidad en amplitud y  $g(t)$  es la forma de pulso. Al igual que ocurría en AM la constante  $k_a$  se elige para no tener sobremodulación, es decir, para mantener la polaridad de la portadora siempre positiva, según la condición

$$k_a |m(nT_s)| < 1 \quad \forall n. \quad (6.2)$$

La tasa de muestreo debe ser mayor que dos veces la frecuencia máxima de la señal moduladora  $m(t)$  de acuerdo con el teorema de muestreo.

La señal PAM  $s(t)$  se puede demodular de forma sencilla utilizando un filtro paso bajo con frecuencia de corte igual al ancho de banda de la señal moduladora  $m(t)$ . La señal recuperada tendrá una componente continua, debido a que la señal PAM contiene la señal portadora, que se puede eliminar de forma sencilla mediante un condensador de desacople. Además la señal recuperada tiene una ligera distorsión en amplitud debido al efecto apertura causado por el alargamiento de las muestras que se puede corregir utilizando un ecualizador como ya hemos visto.

La transmisión de señales PAM impone restricciones muy severas en la respuesta en amplitud y fase del canal de comunicaciones debido a la duración relativamente corta de los pulsos transmitidos. Además de un excesivo ancho de banda de transmisión, el funcionamiento frente al ruido de un sistema PAM nunca puede ser mejor que la transmisión de la señal en banda base. Se puede ver que para transmisión a larga distancia, el sistema PAM se puede utilizar como una parte del proceso TDM, a partir del cual se utilizará un modulador de pulsos que emplee alguna otra forma de modulación de pulsos, es decir, se podría adaptar la forma de  $g(t)$  al canal de comunicaciones.

La mayor parte de los sistemas de modulación de pulsos requieren sincronización del receptor y del transmisor. Se suele mantener sincronismo a nivel de trama. Este método requiere transmitir información añadida, además de los pulsos de información, que sirva como marcas temporales dentro de cada trama, de forma que el receptor sea capaz de diferenciar esas marcas de los pulsos de información. En algunos casos la marca temporal se fija transmitiendo un marcador por trama, mientras que en otros casos se fija eliminando un pulso en su intervalo correspondiente. En el caso de transmitir marcadores, éstos deberán ser tales que se puedan distinguir de los pulsos de información. En un sistema PAM, un marcador se identifica

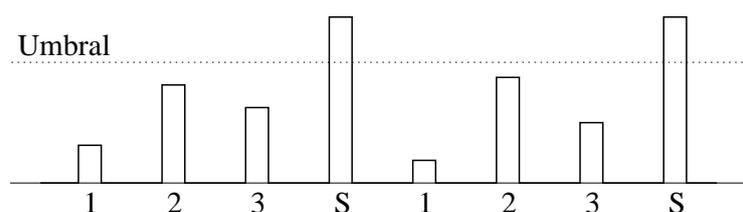


Figura 6.4: Trama TDM-PAM con una marca de sincronismo por trama.

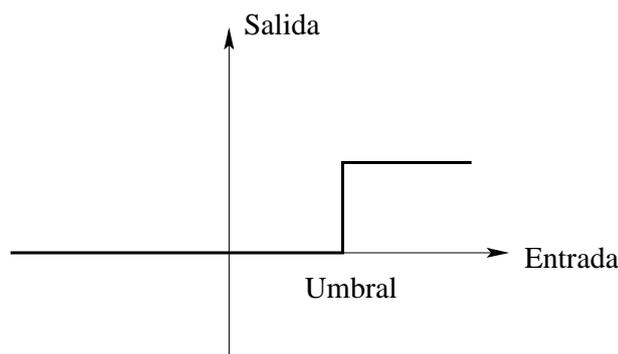


Figura 6.5: Característica entrada/salida del dispositivo umbral.

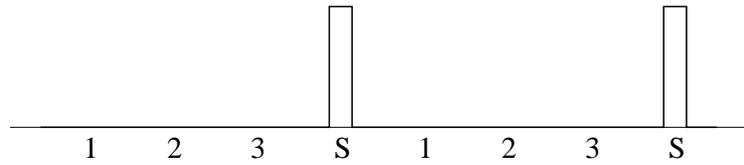


Figura 6.6: Señal de sincronismo recuperada.

haciendo la amplitud del pulso mayor que todos los posibles valores de los pulsos de información. En la figura 6.4 se puede ver la trama TDM correspondiente a tres canales PAM y una marca de sincronismo por trama. Un marcador de este tipo se puede separar fácilmente de la señal recibida mediante un sistema umbral que deje pasar únicamente señales con amplitud mayor que el umbral de entrada. En la figura 6.5 se puede ver la característica entrada/salida de este dispositivo umbral. Cuando la señal TDM de la figura 6.4 está por debajo del umbral la salida es cero. Para cuando la señal es mayor que el umbral la salida es constante. Cuando la señal TDM de la figura 6.4 se pasa por el sistema umbral de la figura 6.5 se obtiene una señal de sincronismo como la que puede verse en la figura 6.6.

## Capítulo 7

# Modulación de Pulsos en el Tiempo (PPM y PDM)

En un sistema de modulación de pulsos, se puede incrementar el ancho de banda gastado por los pulsos para obtener una mejora en su funcionamiento con ruido representando cada muestra de la señal mediante alguna propiedad del pulso distinta de su amplitud. En la **modulación por duración del pulso** o **PDM**, las muestras de la señal moduladora  $m(t)$  se utilizan para modificar la duración de los pulsos individuales. La señal moduladora  $m(t)$  modifica el instante de tiempo del flanco de subida, del flanco de bajada o de ambos. Para el caso en el que sólo se modifique la posición del flanco de bajada, la forma del pulso  $g(t)$  debe cumplir

$$g(t) \neq 0 \quad \text{sólo para } 0 \leq t \leq T, \quad (7.1)$$

entonces la señal modulada viene dada por

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{2T[t - nT_s]}{T_s[1 + k_d m(nT_s)]}\right), \quad (7.2)$$

donde  $k_d$  es la sensibilidad en duración del modulador. Para no tener sobremodulación (que los pulsos no se solapen) es necesario que se cumpla la condición

$$0 < 1 + k_d m(nT_s) < 2 \quad \forall n, \quad (7.3)$$

o lo que es lo mismo

$$k_d |m(nT_s)| < 1 \quad \forall n. \quad (7.4)$$

En la figura 7.1 se puede ver una señal moduladora y en la figura 7.2 la señal PDM.

En PDM los pulsos largos gastan una cantidad considerable de potencia durante el pulso mientras que no añaden información adicional. Si dicha potencia adicional se elimina de la señal PDM y se conserva únicamente los instantes de las transiciones, se obtiene un tipo más eficiente de modulación de pulsos denominado **modulación por posición de pulsos** o **PPM**. En PPM la posición relativa del pulso respecto a su posición sin modular varía de acuerdo con la señal moduladora  $m(t)$ . La forma del pulso  $g(t)$  debe cumplir

$$g(t) = 0 \quad \text{para } |t| > \frac{T}{2}, \quad (7.5)$$

entonces la señal modulada viene dada por

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[t - nT_s - k_p m(nT_s)], \quad (7.6)$$

donde  $k_p$  es la sensibilidad en posición del modulador. Para no tener sobremodulación (que los pulsos no se solapen) es necesario que se cumpla la condición

$$0 < k_p |m(nT_s)| < \frac{T_s - T}{2} \quad \forall n. \quad (7.7)$$

En la figura 7.3 se puede ver la señal PPM para la señal moduladora de la figura 7.1.

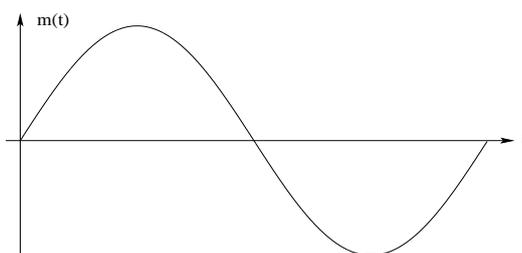


Figura 7.1: Señal moduladora.

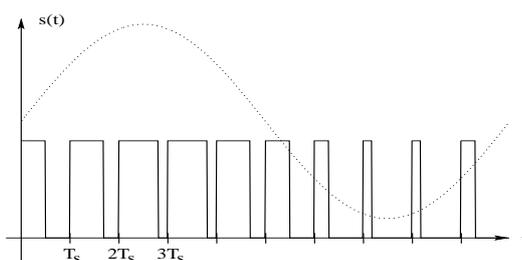


Figura 7.2: Señal PDM con muestreo uniforme.

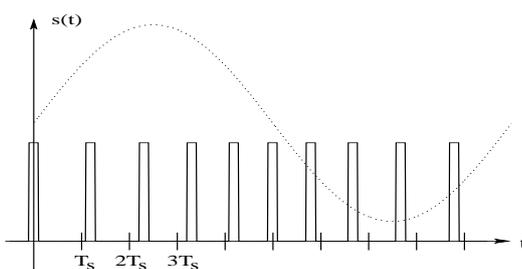


Figura 7.3: Señal PPM con muestreo uniforme.

Un procedimiento para generar una señal PDM en la que varíe el flanco de bajada consiste en sumar a la señal moduladora  $m(t)$  una señal portadora con pulsos con forma de dientes de sierra y la señal suma aplicarla a un sistema umbral. En la figura 7.4 se puede ver este procedimiento. La duración del pulso es proporcional a la magnitud de la señal en el instante del flanco de bajada en lugar de proporcional al flanco de subida, que es el que es periódico en el tiempo. Por lo tanto, no se está haciendo un muestreo uniforme de la señal. Esta forma de muestreo se denomina **muestreo natural** para diferenciarlo del uniforme. Si se desea emplear muestreo uniforme en lugar de muestreo natural se puede generar en primer lugar una señal PAM cuyos pulsos ocupen todo el periodo de muestra y sumar esta señal a la señal con forma de dientes de sierra en lugar de la moduladora directamente. De esta forma la duración del pulso es proporcional a la señal moduladora  $m(t)$  en el instante del flanco de subida que si que es periódico. Entonces el muestreo es uniforme. Una consecuencia del muestreo uniforme es que se introduce cierta distorsión en la señal reconstruida. Esta distorsión es aceptable para voz si no es esencial alta fidelidad.

El análisis espectral de señales PDM y PPM es complicado. Vamos a ver una descripción cualitativa en PDM con muestreo natural. Sea  $T_s$  el periodo de muestreo.  $T_s$  es también la separación entre los flancos de subida de la señal PDM. La señal PDM se ha obtenido mediante muestreo natural en los flancos de bajada. Vamos a suponer también que la señal moduladora  $m(t)$  es sinusoidal con frecuencia  $f_m$ . Bajo estos supuestos la señal PDM tiene las siguientes componentes frecuenciales:

- Componente continua a frecuencia cero igual al valor medio de la señal modulada.
- Componentes a frecuencias múltiplos enteros de la de muestreo  $f_s = 1/T_s$  que corresponden a líneas espectrales en  $\pm n f_s$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Estas componentes así como la componente continua son debidas al tren de pulsos sin modular que se puede considerar como señal portadora.

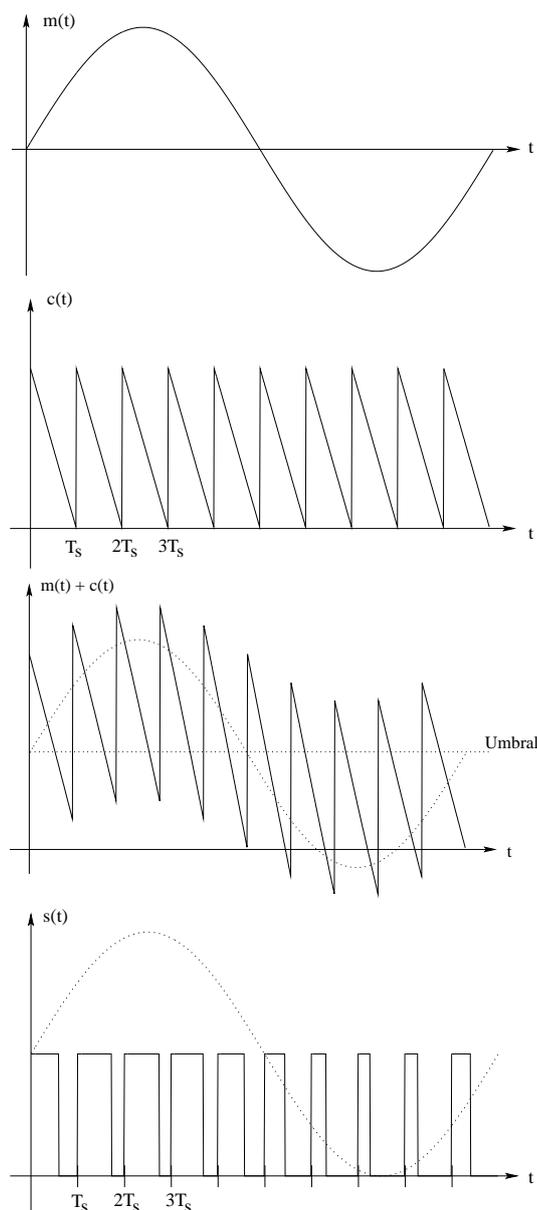


Figura 7.4: Procedimiento para generar una señal PDM con muestreo natural.

- Componente a la frecuencia  $f_m$  en fase con la señal moduladora que da lugar a las líneas espectrales  $\pm f_m$ .
- Componentes frecuenciales correspondientes a productos de modulación cruzados entre la señal moduladora sinusoidal y la señal portadora. Dan lugar a las líneas espectrales  $\pm n f_s \pm m f_m$ , para  $n, m = 1, 2, 3, \dots$ . Son pares de bandas laterales para cada componente de la señal portadora, excepto para frecuencia cero.

La señal moduladora se puede recuperar pasando la señal PDM por un filtro paso bajo, sin embargo el proceso de reconstrucción viene acompañado por cierta cantidad de distorsión debido a los productos de modulación que caen en la banda de la señal como  $f_s - 2f_m$ ,  $f_s - 3f_m$ , etc. Para evitar que haya mucha distorsión en la señal reconstruida, es necesario restringir la máxima excursión del flanco de bajada de la señal PDM. Cuando se utiliza muestreo uniforme para generar la señal PDM, la salida del filtro reconstructor paso bajo no sólo tiene la señal deseada, sino también sus armónicos  $\pm m f_m$  con  $m = 2, 3, \dots$ . Con muestreo natural esos armónicos no existen. En ambos casos siempre están presentes los productos de modulación antes indicados. En el muestreo uniforme se tiene un deterioro mayor de la señal que en el muestreo natural.

En el caso de la señal PPM, se puede asumir que cada pulso tiene una duración  $T$  muy pequeña comparada con el intervalo de muestreo  $T_s$ , así que se puede considerar como un impulso. De aquí se puede deducir que el espectro de una señal PPM con muestreo natural y moduladora sinusoidal es muy similar al espectro de PDM, excepto que contiene una componente proporcional a la derivada de la señal moduladora en lugar de proporcional a la señal moduladora como tal y que la componente continua es mucho menor. Entonces se puede recuperar la señal de información de la señal PPM pasándola por un filtro paso bajo e integrando el resultado. Otra forma de recuperar la señal de información consiste en convertir la señal PPM en PDM primero y luego demodular este última mediante un filtro paso bajo. De este modo se obtiene una mayor amplitud de señal y menos distorsión.

En un sistema con modulación de pulsos en el tiempo como PDM o PPM, la información transmitida está contenida en las posiciones relativas de los pulsos modulados o sus flancos de subida o bajada. La presencia de ruido afecta al funcionamiento del sistema modificando el instante de tiempo en el cual el pulso comienza o acaba. Se puede conseguir inmunidad frente al ruido haciendo que la subida o bajada de los pulsos sea muy rápida de forma que el intervalo de tiempo durante el cual el ruido puede ejercer perturbaciones sea muy pequeño. De hecho, un ruido selectivo podría no afectar a los flancos de subida y bajada de los pulsos si los pulsos recibidos fueran perfectamente rectangulares, debido a que la presencia de ruido que sólo introduzca perturbaciones en amplitud no afecta a la posición de los flancos. La recepción de pulsos perfectamente rectangulares implica un ancho de banda de transmisión infinito.

En la práctica con un ancho de banda de transmisión finito, los pulsos recibidos tienen un tiempo finito de subida y bajada por lo que el funcionamiento del sistema se va a ver afectado por el ruido.

Como en un sistema FM la calidad frente al ruido en un sistema PPM o PDM es proporcional al cuadrado del ancho de banda normalizado. La calidad del sistema PPM, bajo las mismas condiciones, es siempre mejor que para el sistema PDM. La razón de ello es que el sistema PPM contiene la misma información que el sistema PDM, pero con un ahorro significativo de potencia transmitida con respecto a PDM. Por ello, PPM es más eficiente en potencia que PDM. En cualquier caso ambos sistemas pueden mejorar significativamente al sistema PAM simplemente intercambiando ancho de banda por calidad. Además si el ruido es elevado, el receptor puede detectar pulsos falsos o no detectar pulsos buenos aumentando mucho el ruido a la salida, hasta desaparecer la señal por completo. Es decir, como los sistemas PPM y PDM no son lineales sufren un efecto umbral de forma similar a como ocurría con FM.

Al igual que ocurría con los sistemas PAM, los sistemas PDM y PPM se suelen emplear como base de modulación para formar tramas TDM que requieren transmitir ciertas marcas de sincronismo. Al igual que vimos para los sistemas TDM-PAM, en TDM-PDM y en TDM-PPM se utiliza una marca de sincronismo por trama. En la figura 7.5 podemos ver un ejemplo de sincronismo a nivel de trama para ambos casos.

En PDM el marcador se identifica eliminando el pulso en el intervalo correspondiente al canal de sincronismo. Un método para identificar el marcador en recepción es utilizar el tiempo de carga de una red resistencia-condensador para medir la duración de los intervalos de tiempo entre cada dos pulsos consecutivos. La constante de tiempo se elige de modo que durante el intervalo del marcador (pulsos separados)

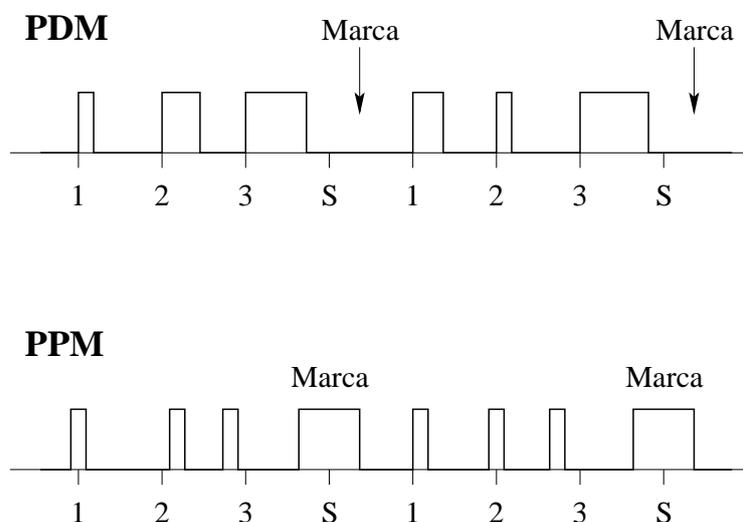


Figura 7.5: Sincronización de tramas TDM-PDM y TDM-PPM.

la tensión en el condensador supere un valor suficientemente por encima de cuando se detecten los pulsos normales de canales de información (pulsos juntos). La señal de tensión en el condensador se puede aplicar a un circuito umbral apropiado de forma que a su salida se obtenga la señal de sincronismo buscada.

En PPM por su parte el marcador se identifica transmitiendo un pulso varias veces más ancho que el resto de pulsos utilizados para canales de información. En recepción el marcador se puede extraer por un procedimiento similar al explicado para PDM. En este caso el condensador se debe cargar durante el tiempo que el pulso está a nivel alto y descargar en los intervalos entre pulsos. La tensión en el condensador superará un umbral cuando hay marcador y entonces mediante un circuito umbral se puede obtener la señal de sincronismo a partir de la señal TDM-PPM recibida.

## Capítulo 8

# Modulación Digital de Pulsos (PCM)

En los sistemas PAM, PDM y PPM sólo se expresa el tiempo de forma discreta, mientras que los parámetros de modulación: amplitud, duración y posición varían de acuerdo con el mensaje. En estos sistemas, la transmisión de la información es analógica en instantes discretos. Por otro lado, en **PCM** (Pulse Code Modulation), la señal es muestreada y cada muestra se redondea al más cercano de un conjunto finito de posibles valores. Así tanto la amplitud como el tiempo son discretos. De esta forma la información se puede transmitir con impulsos codificados.

La utilización de señales digitales en lugar de analógicas tiene tres ventajas:

- Robustez frente al ruido y las interferencias.
- Regeneración eficiente de la señal codificada a lo largo del camino de transmisión.
- Formato uniforme para diferentes tipos de señales banda base.

Como inconveniente se puede citar el incremento del ancho de banda, así como el incremento de la complejidad. Con el incremento de disponibilidad de sistemas de banda ancha, los avances en los sistemas de codificación y la mejora de las tecnologías, los sistemas digitales se han impuesto a los sistemas analógicos en la mayoría de los casos. En la figura 8.1 se puede ver el esquema del codificador/transmisor de PCM. El muestreo, cuantificación y codificación se suelen realizar en un único sistema denominado **convertor A/D**. El esquema del decodificador/receptor de PCM se puede ver en la figura 8.2. Además en puntos intermedios a lo largo del canal de comunicaciones se puede regenerar la señal según como puede verse en la figura 8.3. Cuando se multiplexan varias señales PCM para generar una trama TDM-PCM es necesario que el transmisor y el receptor estén sincronizados.

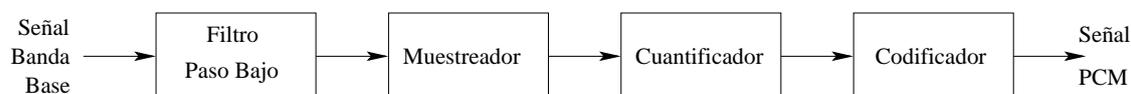


Figura 8.1: Esquema del codificador/transmisor PCM.

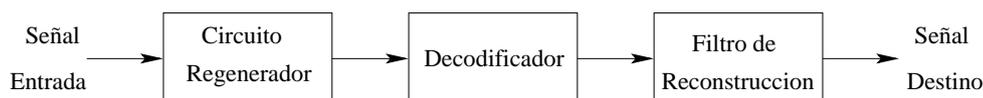


Figura 8.2: Esquema del decodificador/receptor PCM.

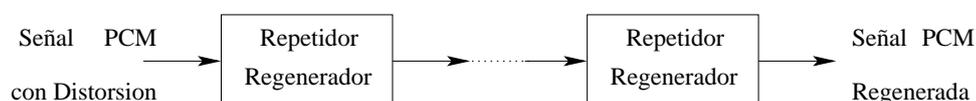


Figura 8.3: Regeneración de la señal a lo largo del canal de comunicaciones.

## 8.1. Muestreo

La señal analógica de entrada se muestra con un tren de pulsos rectangulares estrechos que aproximen al muestreo instantáneo. Para asegurar la reconstrucción de la señal original en recepción, la tasa de muestreo debe ser mayor que la de Nyquist, es decir, que el doble de la componente frecuencial mayor  $W$  de la señal banda base de entrada. De hecho se suele utilizar un filtro paso bajo a la entrada de ancho de banda  $W$  para eliminar las componentes a mayor frecuencia antes del proceso de muestreo propiamente dicho. El muestreo permite la transformación de una señal continua que varía en el tiempo a un conjunto de valores en instantes discretos del tiempo.

## 8.2. Cuantificación

La amplitud de cada muestra tiene un rango continuo de valores. Dentro del rango finito en amplitud donde varían las muestras de la señal banda base, se puede encontrar un número infinito de posibles niveles de amplitud. En la práctica, los sentidos sólo pueden diferenciar un número finito de niveles de amplitud. Esto significa que cada muestra se va a poder aproximar por una amplitud discreta de un conjunto finito de posibles valores, procurando reducir el error en la aproximación tanto como sea posible. La existencia de un número finito de amplitudes es una característica diferencial de una señal PCM. Si se eligen estos niveles de amplitud lo suficientemente cercanos entre sí, el error cometido entre la señal original y la cuantificada será despreciable, por lo que en la práctica, ambas señales serán indistinguibles.

La conversión de una muestra continua a formato digital, es decir, a una muestra con amplitud discreta, se denomina **proceso de cuantificación**. La característica entrada/salida de un cuantificador tiene forma de escalera. La diferencia entre dos valores adyacentes se denomina tamaño del escalón  $\delta$ . Un cuantificador se diseña para un rango de valores de entrada esperados  $(-A_{\text{máx}}, A_{\text{máx}})$ . Siempre que la señal de entrada caiga en este intervalo, se dice que el cuantificador está funcionando en su zona lineal de trabajo. Si el valor de la señal de entrada cayera fuera de este intervalo, se dice que el cuantificador está funcionando en zona de saturación. El tamaño del escalón se determina mediante

$$\delta = \frac{2A_{\text{máx}}}{L}, \quad (8.1)$$

donde  $L$  es el número de niveles de cuantificación. En la figura 8.4 se puede ver la característica entrada/salida para  $L = 11$  niveles de cuantificación, tamaño del escalón  $\delta = 1$  y rango de entrada dado por  $A_{\text{máx}} = 5,5$ .

La amplitud de entrada se divide en intervalos (zonas horizontales de la escalera) y se asigna para todos los valores dentro de ese intervalo el nivel de salida correspondiente al valor medio del intervalo (altura vertical de los escalones). Por ejemplo según la figura 8.4 si el valor de entrada cae en el intervalo  $[2,5 \ 3,5)$  se le asignará el valor cuantificado de salida 3.

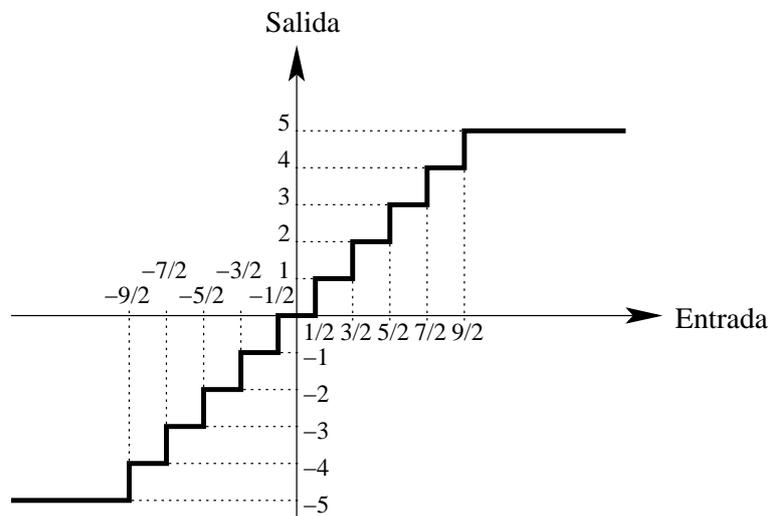


Figura 8.4: Característica entrada/salida para el cuantificador de tipo Mid-Tread.

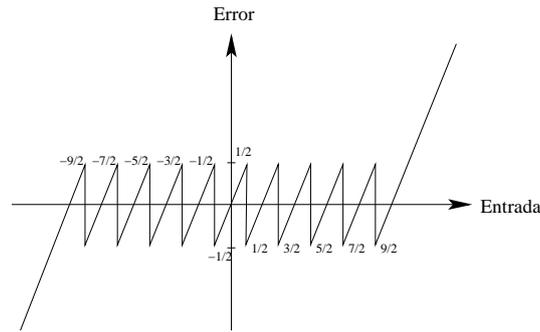


Figura 8.5: Error de cuantificación como función de la señal de entrada.

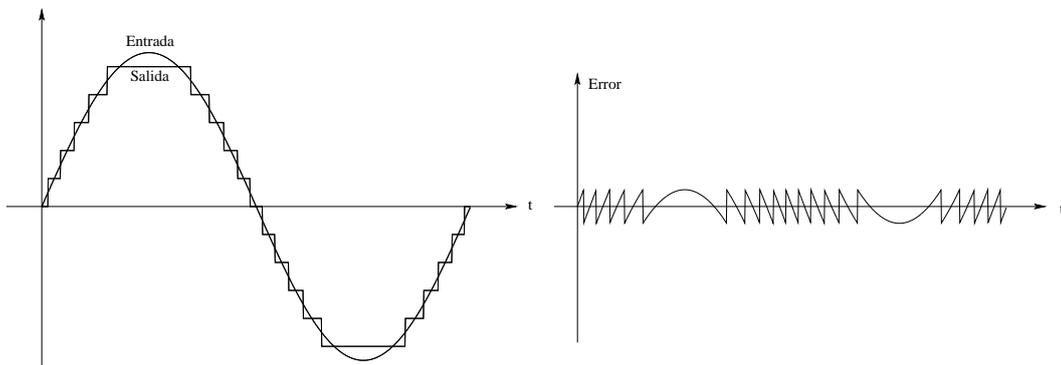


Figura 8.6: Señal sinusoidal cuantificada junto con el error de cuantificación cometido.

Se denomina **error de cuantificación** a la diferencia entre la señal de entrada y la señal de salida del cuantificador. En la figura 8.5 se ha representado el error de cuantificación como función de la señal de entrada para el cuantificador de la figura 8.4. Como puede verse en la zona lineal de funcionamiento el error máximo de cuantificación viene dado por la mitad del tamaño del escalón (0,5 en este caso), mientras que en la zona de saturación el error no está acotado. El objetivo a la hora de diseñar un cuantificador debe ser evitar la zona de saturación y minimizar el error de cuantificación empleando para ello el menor número de escalones posibles, pues, como veremos más adelante, aumentar el número de escalones significará un mayor ancho de banda de transmisión. En la figura 8.6 se puede ver la señal cuantificada correspondiente a una señal sinusoidal, junto con el error de cuantificación cometido.

Si  $\delta$  es el tamaño del escalón, en un caso general cuando la señal de entrada cae en el intervalo

$$[(H_i - 1/2)\delta, (H_i + 1/2)\delta) \quad (8.2)$$

el valor cuantificado de salida es

$$H_i\delta \text{ para } H_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.3)$$

donde  $i \in \{1, 2, \dots, L\}$  indexa el número de escalón. Este tipo de cuantificador que posee un número de niveles  $L$  impar, se denomina de **tipo Mid-Thread**, ya que el origen coincide con una zona horizontal de la escalera. El cuantificador de la figura 8.4 es de este tipo.

Cuando el número de niveles  $L$  es par, el cuantificador se denomina de **tipo Mid-Riser**, ya que el origen coincide con una zona vertical de la escalera. En este caso cuando la señal de entrada cae en el intervalo

$$[(H_i - 1)\delta/2, (H_i + 1)\delta/2) \quad (8.4)$$

el valor cuantificado de salida es

$$H_i\delta/2 \text{ para } H_i = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \quad (8.5)$$

En la figura 8.7 se puede ver la característica entrada/salida de tipo Mid-Riser para  $L = 8$  niveles de cuantificación, tamaño del escalón  $\delta = 1$  y rango de entrada dado por  $A_{\text{máx}} = 4$ .

El proceso de cuantificación visto utiliza una separación uniforme entre los valores de cuantificación. En algunos casos es útil usar separaciones variables entre los niveles de cuantificación. En el caso de una señal

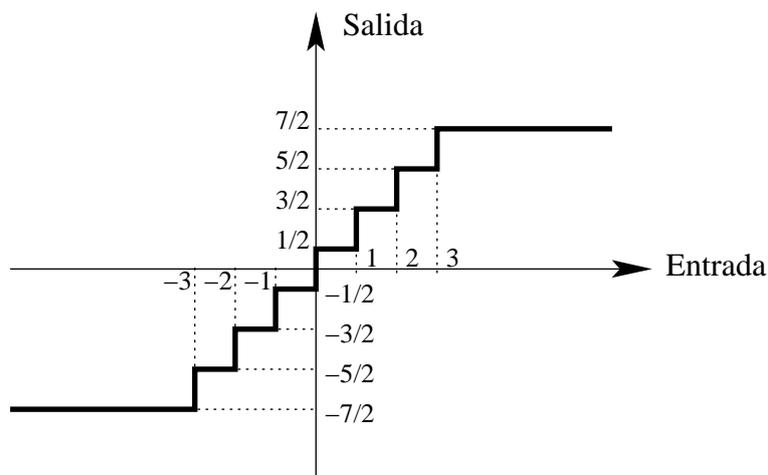


Figura 8.7: Característica entrada/salida para el cuantificador de tipo Mid-Riser.

de voz, entre una señal fuerte y una débil puede haber una relación de amplitudes de 1000 a 1, o incluso más. Usando un **cuantificador uniforme** las señales débiles tendrán un error relativo de cuantificación mucho mayor que las señales fuertes ya que utilizan muchos menos niveles (escalones) de cuantificación que las señales fuertes. Utilizando un **cuantificador no uniforme** de forma que el tamaño del escalón aumente según nos alejamos del origen, se consigue que el error de cuantificación se mantenga aproximadamente constante con respecto al tamaño de la señal, es decir, el error de cuantificación respecto al tamaño de la señal, va a ser similar para señales débiles, que utilizan menos escalones pero pequeños en tamaño, que para señales fuertes, que utilizan todos los escalones pero los más alejados de tamaño mayor. De esta forma se logra un porcentaje de precisión uniforme independientemente del rango de amplitudes de la señal de entrada siempre que no estemos en saturación. Se necesita un menor número de escalones que si se utilizara un cuantificador uniforme para garantizar la calidad en señales débiles. El precio a pagar será una ligera pérdida de calidad para señales fuertes, pero dichas señales tienen una calidad más que suficiente y la pérdida no es significativa.

El uso de un cuantificador no uniforme es equivalente a pasar la señal banda base por un **compresor** y utilizar un cuantificador uniforme. El compresor se nombra por su efecto en las señales fuertes, ya que expande las débiles y comprime las fuertes. Para recuperar la señal en recepción va a ser necesario utilizar un **expansor** cuya característica entrada/salida es la complementaria al compresor. Igualmente, el expansor se nombra por también su efecto en las señales fuertes, ya que comprime las débiles y expande las fuertes. Idealmente el compresor y el expansor deben ser inversos de modo que excepto por los errores de cuantificación la señal a la entrada del compresor y a la salida del expansor sean exactamente iguales. La combinación de compresor y expansor se denomina técnica de **compansión**. En la figura 8.8 se puede ver el esquema de esta técnica de cuantificación no uniforme.

Existen dos leyes de compansión. La primera de ellas se denomina **ley  $\mu$** . Si  $v_1$  y  $v_2$  son las amplitudes normalizadas (con respecto al parámetro  $A_{m\acute{a}x}$ ) de entrada y salida del compresor respectivamente, la característica entrada/salida viene dada por

$$|v_2| = \frac{\ln(1 + \mu|v_1|)}{\ln(1 + \mu)}, \quad (8.6)$$

donde  $\mu$  es el parámetro ajustable de la ley. El compresor es una función impar, es decir, si  $v_1$  es positivo,  $v_2$  también lo será y si  $v_1$  es negativo,  $v_2$  también lo será. En la figura 8.9 se puede ver la función normalizada para cuando  $v_1$  y  $v_2$  son ambos positivos (recordar que la función es impar). Para  $\mu = 0$  tenemos el

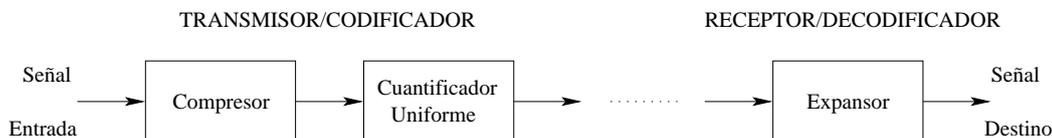


Figura 8.8: Técnica de cuantificación no uniforme usando compansión.

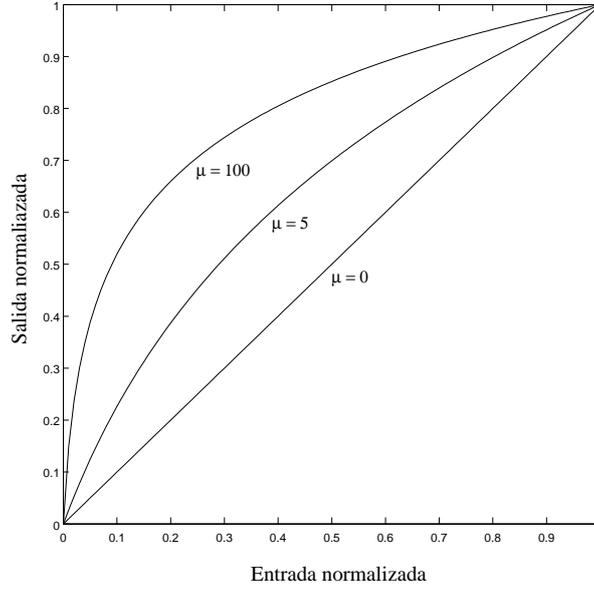


Figura 8.9: Característica entrada/salida del compresor con ley  $\mu$ .

caso uniforme, es decir, el compresor es lineal. Un valor típico utilizado en la práctica es  $\mu = 100$ . Como se puede ver la ley  $\mu$  no es ni estrictamente lineal ni estrictamente logarítmica. Se puede decir que es aproximadamente lineal para  $\mu|v_1| \ll 1$  y aproximadamente logarítmica para  $\mu|v_1| \gg 1$ .

Para un valor dado de  $\mu$ , con el inverso de la pendiente de la curva de compresión se puede obtener el tamaño del escalón para cada valor  $v_1$  de entrada según

$$\frac{d|v_1|}{d|v_2|} = \frac{\ln(1 + \mu)}{\mu} (1 + \mu|v_1|). \quad (8.7)$$

El inverso de esta ecuación, nos da la pendiente de la curva de compresión, que define la **ganancia (o pérdida) de compansión** para cada valor de  $v_1$  según

$$\frac{d|v_2|}{d|v_1|} = \frac{\mu}{\ln(1 + \mu)(1 + \mu|v_1|)}. \quad (8.8)$$

Cerca del origen ( $v_1 = 0$ ) el tamaño del escalón ha disminuido por un factor

$$\frac{\mu}{\ln(1 + \mu)}. \quad (8.9)$$

Este valor se denomina **ganancia de compansión para señales débiles** y para  $\mu = 100$  vale 26,7 dB. Para señales fuertes ( $v_1 = 1$ ) el tamaño del escalón ha aumentado por un factor

$$\frac{\ln(1 + \mu)(1 + \mu)}{\mu}. \quad (8.10)$$

Este valor se denomina **pérdida de compansión para señales fuertes** y para  $\mu = 100$  vale 13,4 dB.

La segunda de las leyes se denomina **ley A**. La característica entrada/salida (amplitudes normalizadas con respecto a  $A_{\text{máx}}$ ) viene dada por

$$|v_2| = \begin{cases} \frac{A|v_1|}{1 + \ln(A)} & 0 \leq |v_1| \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1 + \ln(A|v_1|)}{1 + \ln(A)} & \frac{1}{A} \leq |v_1| \leq 1, \end{cases} \quad (8.11)$$

donde  $A$  es el parámetro ajustable de la ley. Este compresor, al igual que el dado por la ley  $\mu$ , también tiene una característica impar. En la figura 8.10 se puede ver la función normalizada para cuando  $v_1$  y  $v_2$  son ambos positivos (recordar que la función es impar). Para  $A = 1$  tenemos el caso uniforme, es decir,

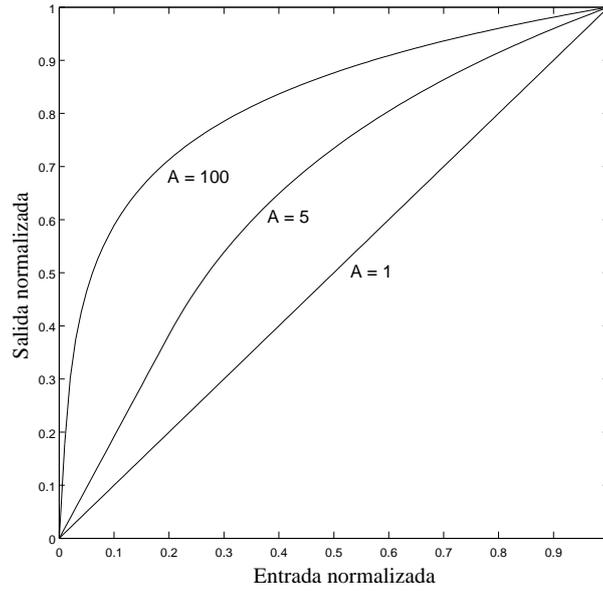


Figura 8.10: Característica entrada/salida del compresor con ley A.

el compresor es lineal. Un valor típico utilizado en la práctica es  $A = 100$ . La ley A está formada por un primer tramo estrictamente lineal seguido de un segundo tramo estrictamente logarítmico.

Para un valor dado de  $A$ , con el inverso de la pendiente de la curva de compresión se puede obtener el tamaño del escalón para cada valor  $v_1$  de entrada según

$$\frac{d|v_1|}{d|v_2|} = \begin{cases} \frac{1+\ln(A)}{A} & 0 \leq |v_1| \leq \frac{1}{A} \\ (1 + \ln(A))|v_1| & \frac{1}{A} \leq |v_1| \leq 1. \end{cases} \quad (8.12)$$

El inverso de esta ecuación, nos da la pendiente de la curva de compresión, que define la **ganancia (o pérdida) de compansión** para cada valor de  $v_1$  según

$$\frac{d|v_2|}{d|v_1|} = \begin{cases} \frac{A}{1+\ln(A)} & 0 \leq |v_1| \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1}{(1+\ln(A))|v_1|} & \frac{1}{A} \leq |v_1| \leq 1. \end{cases} \quad (8.13)$$

Cerca del origen ( $v_1 = 0$ ) el tamaño del escalón ha disminuido por un factor

$$\frac{A}{1 + \ln(A)}. \quad (8.14)$$

Este valor es ganancia de compansión para señales débiles y para  $A = 100$  vale 25 dB. Para señales fuertes ( $v_1 = 1$ ) el tamaño del escalón ha aumentado por un factor

$$1 + \ln(A). \quad (8.15)$$

Este valor se denomina **perdida de compansión para señales fuertes** y para  $A = 100$  vale 15 dB.

En la figura 8.11 se puede apreciar la SNR de cuantificación (SQNR) como función de la potencia de entrada para el caso uniforme, la Ley  $\mu$  y la ley A. Como se puede ver, la SQNR en el caso uniforme varía como función de la potencia de la señal de entrada, de forma que para señales fuertes tiene mucha calidad y para señales débiles muy poca. Empleando las leyes se consigue mantener la calidad aproximadamente constante. La ley A consigue una curva algo más plana que la ley  $\mu$ . Se pueden igualmente ver en dicha figura la zona lineal de funcionamiento y la zona de saturación en la que la calidad cae muy rápidamente. Es posible identificar también la ganancia de compansión para señales débiles y la pérdida para señales fuertes como la distancia en dBs entre la curva roja (cuantificador uniforme) y las curvas azul (ley  $\mu$ ) y verde (ley A), respectivamente. En la sección 9.2 se abordará el modelo teórico para la SQNR en el caso uniforme.

En los sistemas PCM reales, los sistemas compansores no son una réplica exacta de la característica de la ley  $\mu$  o de la ley A, sino que son una aproximación por intervalos lineales a la curva deseada. Utilizando un número elevado de segmentos lineales, la aproximación llega a ser bastante buena.

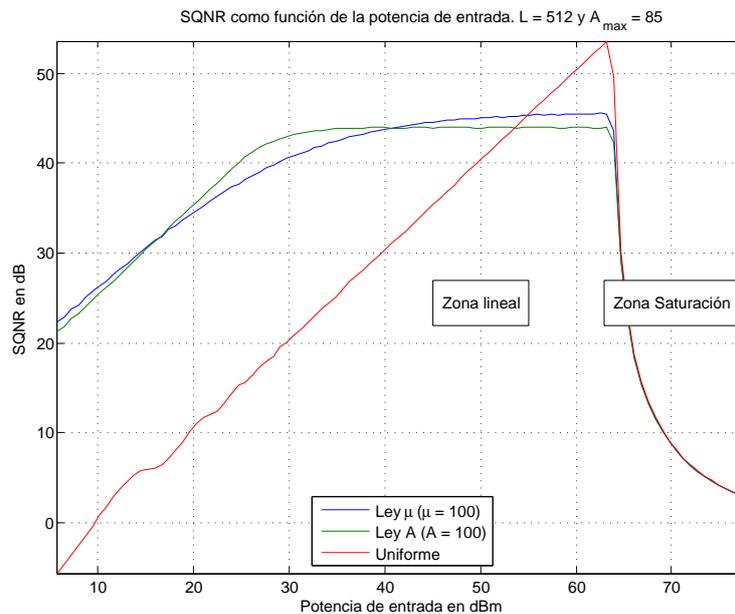


Figura 8.11: SNR de cuantificación como función de la señal de entrada. Comparación entre el caso uniforme y las leyes de compansión.

### 8.3. Codificación

Combinando muestreo y cuantificación hemos convertido la señal banda base continua en un conjunto de valores discretos de un conjunto finito de posibles valores. Sin embargo, esta representación no es adecuada para su transmisión. Para aprovechar las ventajas de los sistemas digitales se requiere la **codificación** para obtener una señal con una forma más apropiada para su transmisión. Cualquier forma de representar cada uno de los valores discretos del conjunto finito se denomina **código**. Cada evento discreto del código se denomina **elemento del código** o **símbolo**. Por ejemplo, un símbolo se puede representar por la presencia o ausencia de un pulso. Una ordenación particular de los símbolos utilizada en un código para representar un único valor del conjunto discreto se denomina **palabra código** o **carácter**.

Un **código binario** tiene dos símbolos que se denotan por  $\emptyset$  y 1. En un **código ternario** hay 3 símbolos, etc. En presencia de ruido el código binario es el que tiene un mejor comportamiento puesto que cada símbolo puede soportar un nivel de ruido relativamente elevado y es más fácil de regenerar.

Supongamos que en el código binario cada palabra código tiene  $n$  bits (bit equivale a símbolo binario). Con ese código se pueden representar  $2^n$  números distintos. Es por ello que se suele elegir el número de niveles de cuantificación como potencia de 2 de forma que se puede igualar  $L = 2^n$ , o lo que es lo mismo, el número de bits necesarios para codificar muestras cuantificadas con  $L$  niveles es  $n = \log_2(L)$ , donde  $n$  representa el número de bits por muestra. Por ejemplo, para  $L = 128$  niveles tenemos  $n = 7$  bits y para  $L = 256$  tenemos  $n = 8$  bits. Hay muchas formas de establecer la relación uno a uno entre cada nivel de cuantificación y cada palabra código. Una forma sencilla de hacerlo es representar el número de escalón (empezando a contar desde abajo) en base dos (representación binaria). En la tabla 8.1 se puede ver un ejemplo de este tipo de codificación para  $L = 8$  y  $n = 3$ .

La señal que representa a cada 1 ó  $\emptyset$  se denomina **código de línea**. Existen muchos códigos de línea. Es deseable que tenga una componente continua (dc) lo menor posible, que tenga el menor ancho de banda posible y que permita recuperar el sincronismo a nivel de bit. Los más utilizados son los siguientes:

- **NRZ (Nonreturn to zero) unipolar (on-off)**. El símbolo 1 se representa transmitiendo un pulso de amplitud constante durante todo el intervalo de bit y el  $\emptyset$  se representa mediante la ausencia de pulso. En los periodos largos de varios unos o ceros consecutivos se puede perder el sincronismo de bit. Presenta siempre componente continua. Tiene un ancho de banda relativamente pequeño.
- **NRZ polar**. El símbolo 1 y el  $\emptyset$  se representan mediante pulsos de igual amplitud positiva y negativa respectivamente durante todo el intervalo de bit. En los periodos largos de varios unos o ceros consecutivos se puede perder el sincronismo de bit. Cuando los bits son equiprobables desaparece la componente continua. Tiene un ancho de banda relativamente pequeño.

Número de escalón	Palabra código
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Tabla 8.1: Ejemplo de código usando la representación en base dos del número de escalón.

- RZ (Return to zero) unipolar.** El símbolo 1 se representa transmitiendo un pulso de amplitud constante durante la mitad del intervalo de bit y el 0 se representa mediante la ausencia de pulso. En periodos largos de varios ceros consecutivos se puede perder el sincronismo de bit, no así en periodos largos de varios unos consecutivos debido al flanco de bajada a mitad de intervalo de bit. Tiene un ancho de banda mayor debido a que la duración de los pulsos es menor. Tiene componente continua aunque ésta es menor que para NRZ unipolar. Tiene un ancho de banda relativamente pequeño.
- Bipolar.** Se utilizan tres niveles de amplitud. Para representar el símbolo 1 se utilizan alternativamente pulsos positivos y negativos de igual amplitud y de duración igual a todo el intervalo de bit. El símbolo 0 se representa mediante la ausencia de pulso. En periodos largos de varios ceros consecutivos se puede perder el sincronismo de bit, no así en periodos largos de varios unos consecutivos debido a la alternancia de pulsos positivos y negativos. Tiene componente continua cero. Tiene un ancho de banda relativamente pequeño.
- Código Manchester (Split-phase).** El símbolo 1 se representa mediante un flanco de bajada, es decir un pulso de amplitud positiva de duración la mitad del tiempo de bit seguido de otro pulso de la misma amplitud pero negativa de la misma duración. El símbolo 0 se representa mediante un flanco de subida, es decir un pulso de amplitud negativa de duración la mitad del tiempo de bit seguido de otro pulso de la misma amplitud pero positiva de la misma duración. No tiene nunca componente continua y mantiene el sincronismo a nivel de bit independientemente de los bits transmitidos puesto que siempre presenta un flanco a mitad de tiempo de bit. Sin embargo, tiene un mayor ancho de banda debido a que la duración de los pulsos es menor (tiene mayor número de transiciones por unidad de tiempo).
- Diferencial.** En este caso la información se codifica en términos de transiciones en la señal. El símbolo 0 se codifica mediante una transición en la señal, mientras que el símbolo 1 se codifica mediante ausencia de transición (se mantiene el valor de la señal). En ambos casos la señal se mantiene durante todo la duración del bit. Se permite pulso con amplitud constante y ausencia de pulso. La información se recupera comparando los pulsos adyacentes para determinar la presencia o ausencia de transiciones. Hay presencia de componente continua. Tiene un ancho de banda relativamente pequeño. Una inversión de la polaridad no va a afectar a la recuperación de la información. Una secuencia larga de unos (no transición) va a provocar la pérdida de sincronismo a nivel de bit. Una secuencia larga de ceros (siempre transición) no presenta problemas de sincronismo de bit.

En la figura 8.12 se puede ver un ejemplo para los 6 tipos de códigos de línea vistos. En la práctica, los pulsos que se transmiten no son rectangulares, es decir, están conformados para mejorar sus prestaciones frente al ruido y las interferencias. La **conformación** o forma de los pulsos se verá más adelante.

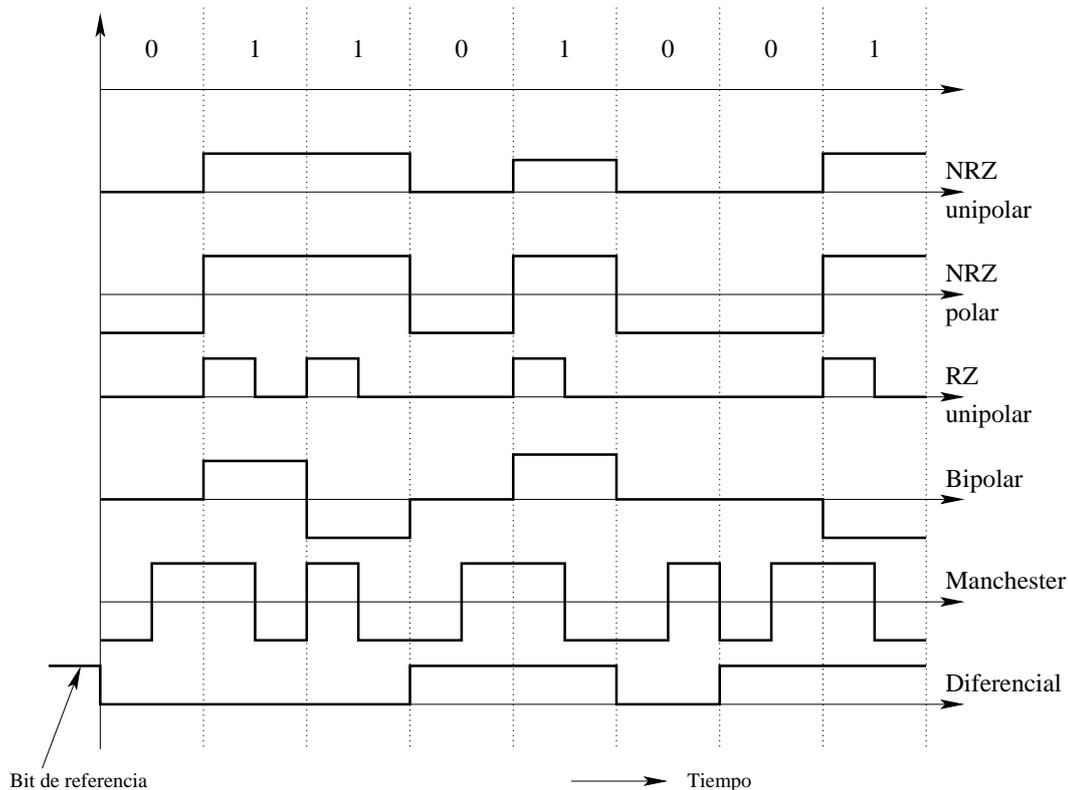


Figura 8.12: Ejemplo de codificación para los seis tipos de códigos de línea.

## 8.4. Regeneración

Una de las características más importantes de PCM es la posibilidad de controlar los efectos de la distorsión y el ruido debidos a su transmisión a través de un canal de comunicaciones. Esta capacidad se logra mediante la inserción de **repetidores/regeneradores** a lo largo de la línea de transmisión colocados a la distancia adecuada. En la figura 8.13 se puede ver esquemáticamente un repetidor/regenerador.

El repetidor/regenerador conlleva tres procesos: **ecualización**, **recuperación del reloj** y **decisión**. El ecualizador conforma los pulsos recibidos para compensar los efectos de distorsión en amplitud y fase introducidos por el canal. El circuito de reloj genera un tren de pulsos periódicos obtenido a partir de la señal recibida ya ecualizada, para poder muestrear esta señal en el mejor instante de forma que la SNR sea máxima. El decisor es el encargado de muestrear la señal recibida ecualizada en los instantes indicados por la señal de reloj y de decidir cuál fue el símbolo enviado para poder regenerarlo y transmitirlo hasta el próximo repetidor o hasta el receptor. Por ejemplo, si el código de línea es NRZ unipolar si el valor muestreado es mayor que un cierto umbral se decide por 1 y se retransmite sin ruido ni distorsión y si el valor muestreado es menor que el umbral se decide por 0 y se retransmite sin ruido ni distorsión. De esta forma el repetidor/regenerador ha eliminado tanto el ruido como la distorsión completamente, siempre que el ruido y la distorsión de la señal recibida no sean tan elevados como para que el decisor cometa errores. Entonces, excepto por un retardo, se puede decir que la señal a la salida del repetidor/regenerador

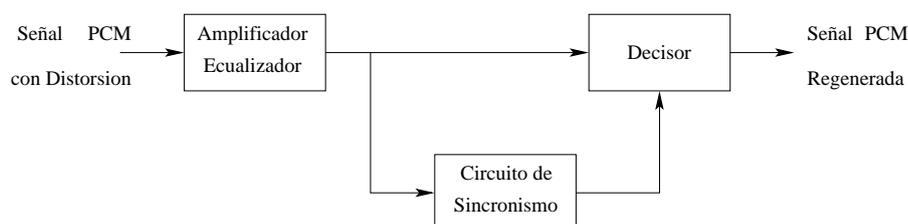


Figura 8.13: Esquema de un repetidor/regenerador colocado a lo largo de la línea de transmisión.

es exactamente igual que la señal a la salida del transmisor.

En la práctica, hay dos cosas a tener en cuenta que pueden hacer que la señal regenerada no sea igual a la transmitida:

- La presencia de ruido y distorsión hace que el decisor se confunda ocasionalmente dando lugar a bits erróneos en la señal regenerada.
- Si el espaciado entre los pulsos se modifica con respecto al de la señal transmitida se produce un fenómeno que recibe el nombre de **jitter** que va a afectar a la posición de los pulsos regenerados dando lugar a distorsión en la señal.

## 8.5. Decodificación

En el receptor la primera operación es la regeneración de la señal: conformar los pulsos y decidir cuál fue el símbolo transmitido generando una **señal limpia**. Esta señal binaria se debe agrupar de  $n$  en  $n$  bits para formar palabras código. Ahora cada palabra código se mapea en el valor cuantificado correspondiente, dando lugar a una señal PAM cuantificada. Durante el proceso de cuantificación la agrupación de  $n$  bits para obtener las palabras código requiere generar pulsos cuya amplitud es la suma lineal de los pulsos correspondientes a los  $n$  bits ponderados por potencias de dos:  $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^n$ .

## 8.6. Filtrado

La señal continua original se puede recuperar pasando la señal PAM cuantificada generada a la salida del decodificador a través de un filtro de reconstrucción paso bajo cuya frecuencia de corte sea igual al ancho de banda  $W$  de la señal banda base original. Si suponemos que no tenemos un ruido excesivo en el canal el decisor prácticamente no cometerá errores de bit y la distorsión de la señal recuperada será muy pequeña y debida únicamente al proceso de cuantificación.

## 8.7. Multiplexado

En las aplicaciones que utilizan PCM es natural multiplexar diferentes fuentes con técnicas TDM-PCM conservando su individualidad en el camino entre el transmisor y el receptor. Esta individualidad tiene en cuenta la facilidad de insertar y extraer la señal en un sistema TDM. Según aumenta el número de fuentes independientes, el intervalo de tiempo de cada fuente se debe reducir de modo que todas ellas puedan caber dentro del tiempo equivalente al periodo de muestro, que será igual a la duración de una trama TDM-PCM. De esta forma la duración de una palabra código se reduce considerablemente. Los pulsos utilizados para transmitir cada símbolo (o lo que es lo mismo para transmitir los bits) se reducen en duración, siendo entonces más complicada su generación, transmisión y detección. De hecho si estos pulsos fueran demasiado estrechos la distorsión del canal dará lugar a que el sistema deje de funcionar correctamente produciéndose interferencias entre los diferentes canales PCM multiplexados. En la práctica siempre existe un límite al número máximo de canales PCM independientes que se pueden multiplexar en una trama TDM-PCM.

## 8.8. Sincronización

Para que una trama TDM-PCM funcione correctamente es necesario que el reloj del receptor esté sincronizado a nivel de bit y a nivel de trama con el del transmisor, teniendo en cuenta por su puesto el tiempo gastado en la transmisión de la señal a través del canal de comunicaciones y los retardos introducidos tanto en el transmisor y el receptor como en las etapas regeneradoras a lo largo del canal. Una forma de sincronizar el receptor con el transmisor a nivel de trama consiste en transmitir un bit especial de sincronismo al final de la trama TDM-PCM. El bit de sincronismo alterna  $\emptyset$  con 1 a la tasa de trama (que coincide con la tasa de muestreo de cada canal PCM). El receptor busca esa señal alternando  $\emptyset$  con 1 a la tasa de trama y cuando la encuentra se logra el sincronismo de trama de forma que el sistema puede comenzar a funcionar correctamente (en ese momento se puede saber qué bits corresponden a cada canal PCM contando a partir del bit de sincronismo encontrado). El procedimiento consiste en examinar los bits de la trama de uno en uno periódicamente a la tasa de trama hasta encontrar el pulso de sincronismo. Se examina siempre el mismo bit de la trama cada periodo de la trama. Cuando haya pasado un tiempo

suficiente se puede establecer que dicho bit no es el de sincronismo ya que no alterna, pasándose a observar el siguiente bit. Este proceso se repite hasta que se encuentre el bit de sincronismo. El número máximo de búsquedas será igual al número de bits por trama como mucho, suponiendo que se esté transmitiendo.

Cuando la transmisión se interrumpe por alguna razón (o al principio de la misma), se pierde el sincronismo de trama y es necesario recuperarlo. El tiempo requerido para encontrarlo depende del instante de tiempo en el que se haya reanudado la transmisión y puede variar.

### 8.9. Ejemplo Sistema T1

El sistema T1 es un sistema TDM-PCM que transmite 24 canales de voz telefónicos que se utiliza en EEUU, Canadá y Japón. Cada canal telefónico se limita a la banda 300 a 3400 Hz. Para que el filtro de reconstrucción sea más sencillo se fija una frecuencia de muestreo de 8000 Hz. Se utiliza un cuantificador de 256 niveles con ley  $\mu$  con  $\mu = 255$ . El número de bits por palabra código es de 8. El periodo de muestreo es  $125 \mu s$  y será igual a la duración de la trama TDM-PCM. La trama está formada entonces por las 24 palabras código de 8 bits cada una correspondientes a los 24 canales PCM y por un bit de sincronismo, dando lugar a 193 bits por trama. Se transmiten 193 bits cada  $125 \mu s$  por lo que cada bit dura  $0.647 \mu s$  y la tasa binaria total del sistema T1 es de 1544 Kbps. Además para cada canal cada 6 tramas de información el bit menos significativo de la sexta trama se utiliza para señalización telefónica (marcación de números, descolgar, colgar, tarificación, etc.). De esta forma cada canal tiene  $7 + \frac{5}{6}$  bits de información y  $\frac{1}{6}$  bits de señalización por trama. La tasa de cada canal es de 64 Kbps de los cuales 62,66 Kbps son de información y 1,33 Kbps de señalización. Finalmente, los 1544 Kbps corresponden a 1504 Kbps de información conjunta, 32 Kbps de señalización conjunta y 8 Kbps de sincronismo. En la figura 8.14 se puede ver cómo es la trama TDM-PCM de este sistema.

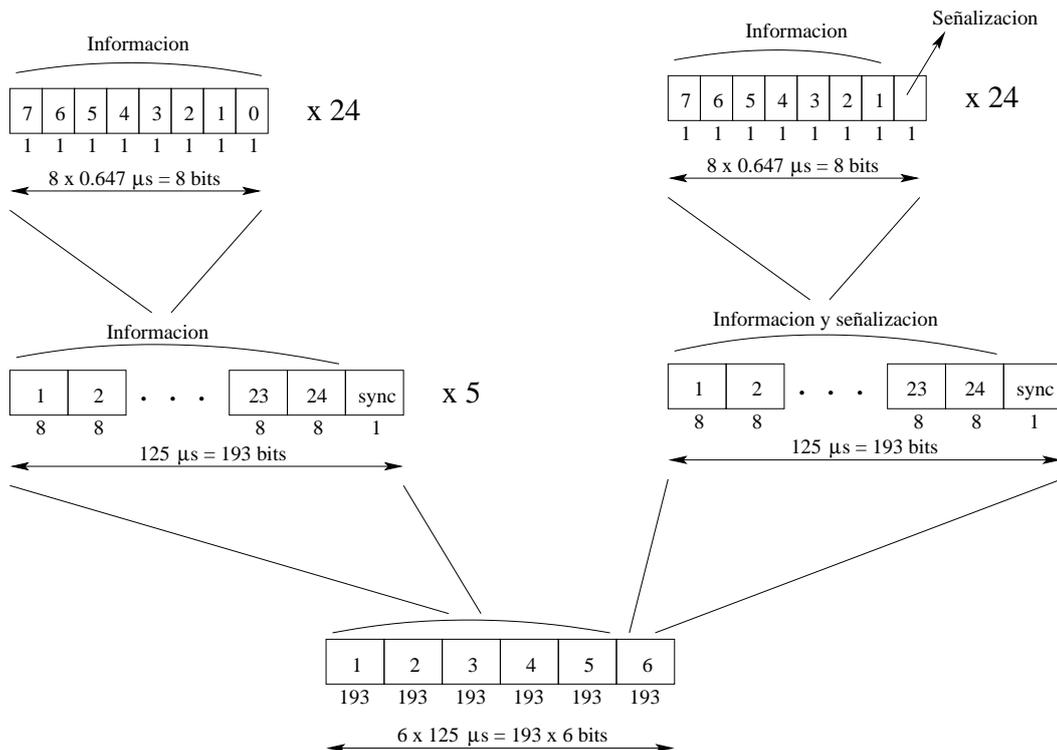


Figura 8.14: Trama TDM-PCM del sistema T1.

## Capítulo 9

# Análisis de la Calidad en PCM

Hay dos fuentes de ruido en los sistemas PCM:

- **Ruido de transmisión:** introducido en diferentes puntos entre el transmisor y el receptor.
- **Ruido de cuantificación:** introducido en la etapa de cuantificación en el transmisor.

Aunque aparecen de forma conjunta en la señal recibida los vamos a analizar por separado.

### 9.1. Ruido de Transmisión y Probabilidad de Error

El efecto del ruido de transmisión en la señal recibida es debido a la introducción de bits erróneos por parte de la etapa de decisión en el receptor. En el caso binario un bit será erróneo cuando debiendo ser 1 es 0 y viceversa. Cuanto más frecuentemente ocurran estos errores, la señal a la salida del receptor tendrá una mayor distorsión con respecto a la señal enviada. La fidelidad de la información transmitida en un sistema PCM se mide en función de la **probabilidad de error** o **tasa de error**: la probabilidad de que un símbolo recibido sea distinto del enviado.

Consideremos una señal PCM  $s(t)$  que consiste en una secuencia de dígitos binarios de forma que el símbolo 0 se representa mediante un pulso de amplitud cero y el símbolo 1 mediante un pulso rectangular de amplitud  $A$ . Es decir, estamos empleando un código de línea de transmisión del tipo NRZ unipolar. La señal recibida  $x(t)$  consiste en la señal  $s(t)$  junto con un ruido AWG  $w(t)$  con media cero y densidad espectral de potencia  $S_W(f) = \frac{N_0}{2}$  según

$$x(t) = s(t) + w(t). \quad (9.1)$$

En la figura 9.1 se puede ver el esquema empleado para detectar la señal PCM. Como se puede ver en dicha figura la señal recibida  $x(t)$  se pasa a través de un filtro paso bajo que tiene un ancho de banda  $B$  que sea suficientemente grande como para dejar pasar la señal PCM sin distorsión significativa y que elimine la mayor cantidad del ruido  $w(t)$  fuera de la banda de la señal. La señal  $y(t)$  a la salida del filtro viene dada entonces por

$$y(t) = s(t) + n(t), \quad (9.2)$$

donde  $n(t)$  es la versión filtrada del ruido  $w(t)$ . Este ruido filtrado tiene media cero y potencia  $\sigma^2 = N_0 B$ .

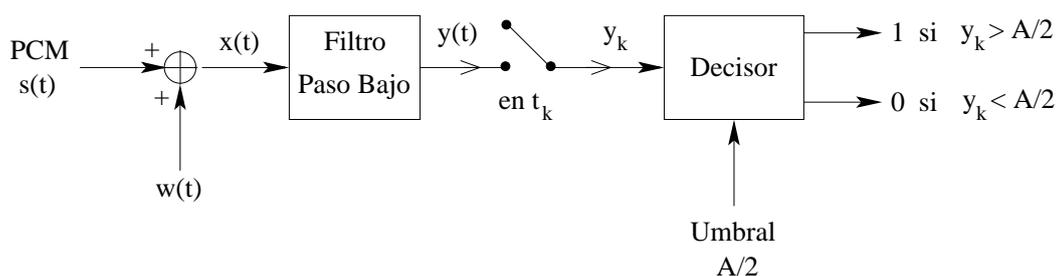


Figura 9.1: Esquema del detector empleado en PCM.

Estamos interesados en determinar en cada intervalo de símbolo si se transmitió  $\emptyset$  ó 1. Lo primero que se hace es muestrear la señal  $y(t)$  a mitad de intervalo de bit  $T_b$  periódicamente cada  $T_b$  segundos (una muestra por bit), obteniéndose la muestra  $y_k$  en el instante de tiempo  $t_k = kT_b$ . Se supone que se dispone de una señal de reloj sincronizada a nivel de bit con la señal recibida. Esta señal de reloj se puede extraer de la señal recibida de forma más o menos sencilla teniendo en cuenta el código de línea empleado. Ahora deberemos decidir si cada muestra  $y_k$  corresponde a un  $\emptyset$  ó a un 1. Puesto que se emplea código de línea NRZ unipolar con amplitud cero y  $A$ , y suponiendo que la posible atenuación de la señal se ha compensado en el receptor, se puede decidir fácilmente cuál fue el símbolo transmitido comparando la amplitud  $y_k$  con un umbral de amplitud  $A/2$ . Si  $y_k$  es mayor que el umbral  $A/2$  se decide en favor de 1, si es menor se decide por  $\emptyset$  y si es igual se decide aleatoriamente. Siempre que el ruido no sea demasiado elevado,  $y_k$  será mayor que el umbral  $A/2$  cuando se transmita 1 y menor cuando se transmita  $\emptyset$  por lo que no se cometerá error. Sólo en el caso de que el ruido sea elevado el decisor cometerá errores. Vamos a analizar esto en más detalle.

Vamos a suponer que los símbolos 1 y  $\emptyset$  tienen igual probabilidad de ocurrencia. Debido a la presencia de la componente de ruido  $n(t)$  en la banda de la señal, el decisor va a poder cometer dos tipos de errores:

- Decidir por  $\emptyset$  cuando se transmitió 1.
- Decidir por 1 cuando se transmitió  $\emptyset$ .

Para determinar la probabilidad media de error vamos a considerar estos dos tipos de errores por separado. Vamos a suponer primero que se transmitió  $\emptyset$ . En este caso la muestra  $y_k$  viene dada por

$$y_k = n(t_k). \quad (9.3)$$

Vamos a denotar con  $Y_k$  a la variable aleatoria correspondiente a la muestra  $y_k$ . Si se ha transmitido  $\emptyset$  la variable aleatoria  $Y_k$  será Gaussiana con media cero y varianza  $\sigma^2$ , por lo que su función densidad de probabilidad vendrá dada por

$$f_{Y_k|\emptyset}(y_k|\emptyset) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y_k^2}{2\sigma^2}\right). \quad (9.4)$$

En este caso se cometerá error siempre que la variable sea mayor que el umbral  $A/2$  ya que se decide por 1. La probabilidad de error  $P_{e_\emptyset}$  corresponderá entonces a la zona rayada de la figura 9.2. Esta probabilidad se puede determinar mediante

$$P_{e_\emptyset} = P\left(y_k > \frac{A}{2} \middle| \emptyset\right) = \int_{\frac{A}{2}}^{\infty} f_{Y_k|\emptyset}(y_k|\emptyset) dy_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{A}{2}}^{\infty} \exp\left(-\frac{y_k^2}{2\sigma^2}\right) dy_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{A}{2\sigma\sqrt{2}}}^{\infty} \exp(-z^2) dz, \quad (9.5)$$

donde en la última integral se ha empleado el cambio de variable  $z = \frac{y_k}{\sigma\sqrt{2}}$ .

Teniendo en cuenta que la **función de error complementario (erfc)** viene dada por

$$\text{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} \exp(-z^2) dz, \quad (9.6)$$

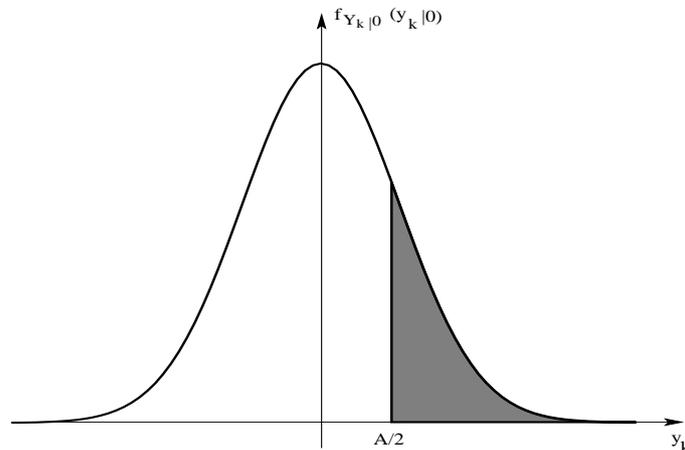


Figura 9.2: Función densidad de probabilidad cuando se transmitió  $\emptyset$  y probabilidad de error.

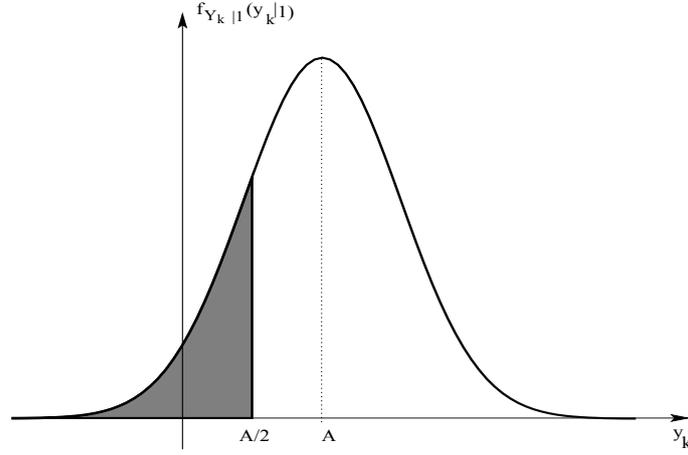


Figura 9.3: Función densidad de probabilidad cuando se transmitió 1 y probabilidad de error.

la probabilidad de error cuando se transmitió  $\emptyset$  viene dada finalmente por

$$P_{e\emptyset} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{A}{2\sigma\sqrt{2}} \right). \quad (9.7)$$

La función de error complementario se utiliza habitualmente para determinar probabilidades en el caso Gaussiano y suele estar tabulada. Es una función monótona decreciente.

Vamos a suponer ahora que se transmitió 1. En este caso la muestra  $y_k$  viene dada por

$$y_k = A + n(t_k). \quad (9.8)$$

Si se ha transmitido 1 la variable aleatoria  $Y_k$  será Gaussiana con media  $A$  y varianza  $\sigma^2$ , por lo que su función densidad de probabilidad vendrá dada por

$$f_{Y_k|1}(y_k|1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(y_k - A)^2}{2\sigma^2} \right). \quad (9.9)$$

En este caso se cometerá error siempre que la variable sea menor que el umbral  $A/2$ , ya que se decide por  $\emptyset$ . La probabilidad de error  $P_{e1}$  corresponderá entonces a la zona rayada de la figura 9.3. Esta probabilidad se puede determinar mediante

$$\begin{aligned} P_{e1} &= P \left( y_k < \frac{A}{2} \middle| 1 \right) = \int_{-\infty}^{\frac{A}{2}} f_{Y_k|1}(y_k|1) dy_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{A}{2}} \exp \left( -\frac{(y_k - A)^2}{2\sigma^2} \right) dy_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{A}{2\sigma\sqrt{2}}}^{\infty} \exp(-z^2) dz = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{A}{2\sigma\sqrt{2}} \right), \end{aligned} \quad (9.10)$$

donde se ha hecho el cambio de variable  $z = -\frac{y_k - A}{\sigma\sqrt{2}}$  y se ha usado la función error complementario dada por la ecuación (9.6).

Como puede verse a partir de las ecuaciones (9.7) y (9.10) se tiene que  $P_{e\emptyset} = P_{e1}$ . Siempre que esto ocurra se dice que el canal es **simétrico**. En nuestro caso esto es debido a la simetría del umbral  $A/2$  con respecto a las amplitudes 0 y  $A$  de los símbolos transmitidos y a que el ruido tiene características similares para el 1 y para el  $\emptyset$ . Si la probabilidad de transmitir 1 es  $p_1$  y la de  $\emptyset$  es  $p_\emptyset$  la probabilidad de error medio viene dada por el teorema de probabilidad total

$$P_e = p_\emptyset P_{e\emptyset} + p_1 P_{e1}. \quad (9.11)$$

Puesto que se ha supuesto que los símbolos transmitidos son equiprobables se tiene que  $p_1 = p_\emptyset = \frac{1}{2}$ , por lo que se tiene finalmente que la probabilidad de error medio es

$$P_e = P_{e\emptyset} = P_{e1} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{A}{2\sigma\sqrt{2}} \right). \quad (9.12)$$

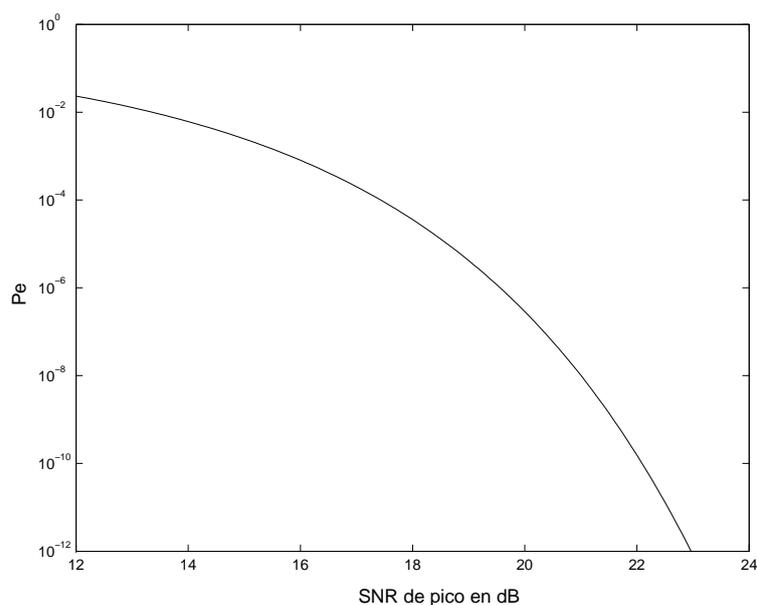


Figura 9.4: Probabilidad de error medio como función de la SNR de pico.

Para el caso NRZ unipolar, la señal alterna entre los niveles 0 y  $A$ , por lo que la potencia de pico de señal será  $A^2$ . Ya que  $\sigma^2$  es la potencia de ruido, la probabilidad de error medio se puede poner según

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \right), \quad (9.13)$$

donde  $\gamma$  es la SNR de pico dada por

$$\gamma = \frac{A^2}{\sigma^2}. \quad (9.14)$$

Se puede decir entonces que el valor medio de la probabilidad de error en PCM sólo depende de la SNR de pico a la entrada del receptor. En la figura 9.4 se puede ver gráficamente la probabilidad de error medio como función de la SNR de pico en dB. Esta probabilidad decrece muy rápidamente con un incremento pequeño de la SNR de pico. Un pequeño incremento en la SNR de pico da lugar a una gran disminución en el número de errores que comete el decisor. En la tabla 9.1 se recogen algunos valores de SNR de pico y probabilidad media de error así como el tiempo medio esperado para cometer un error en un bit para una tasa binaria de  $10^5$  bps.

Hay un umbral de error en torno a unos 20 dB de SNR de pico por debajo del cual tenemos un número de errores relevante y por encima del cual el efecto del ruido de transmisión se puede considerar despreciable. Se

SNR de pico $\gamma$ [dB]	Probabilidad media de error $P_e$	Tiempo medio entre errores para $10^5$ bps
13.3	$10^{-2}$	$10^{-3}$ segundos
17.4	$10^{-4}$	$10^{-1}$ segundos
19.6	$10^{-6}$	10 segundos
21.0	$10^{-8}$	20 minutos
22.0	$10^{-10}$	1 día
23.0	$10^{-12}$	3 meses

Tabla 9.1: Algunos valores de SNR de pico, probabilidad de error y tiempo medio entre bits erróneos.

puede decir entonces que si  $\gamma > 20$  dB el ruido de transmisión no tiene efectos apreciables en las prestaciones del sistema. Esta es una característica fundamental de los sistemas PCM. Si  $\gamma < 20$  dB habrá errores en la etapa de decisión, lo que dará lugar a generar palabras código diferente y por tanto la señal recuperada será bastante diferente de la original.

Comparando los 20 dB del sistema PCM con los 60 a 70 dB para AM con buena calidad, se puede ver que PCM requiere mucha menor potencia, incluso teniendo en cuenta el incremento del ancho de banda de ruido por el factor  $n$ , siendo  $n$  el número de bits necesarios por símbolo transmitido.

En la mayoría de los sistemas de transmisión, el efecto del ruido y la distorsión de los enlaces individuales se van acumulando. Dada una calidad extremo a extremo, cuanto mayor distancia tengamos, más severos serán los requisitos de cada enlace. En PCM sin embargo, ya que se puede regenerar la señal tantas veces como sea necesario, los efectos de distorsión de amplitud, fase y no lineal en un enlace no tienen efectos en el siguiente (siempre que estos efectos se mantengan dentro de unos márgenes). Además si estamos por encima del umbral, el ruido tampoco tendrá ningún efecto en la calidad final del sistema. Para propósitos prácticos los requerimientos de un enlace PCM son independientes de la longitud total, dada una calidad extremo a extremo.

Otra característica de un sistema PCM es la robustez frente a interferencias. Hemos visto que si la amplitud del ruido no es mayor que el umbral del decisor (fijado a medio camino entre las amplitudes 0 y  $A$  para el caso NRZ unipolar), el ruido no afecta a la calidad final del sistema. Si la suma del ruido y la interferencia no superan dicho umbral, en este caso la calidad tampoco se ve afectada. El efecto de la presencia de interferencias es la de subir el umbral de error en la SNR de pico a un valor mayor de 20 dB, dependiendo de la potencia de la interferencia. Si ahora nos aseguramos que nuestro sistema funciona por encima de este nuevo umbral de SNR de pico, el sistema no se verá afectado ni por el ruido ni por la interferencia. Esta es la razón por la que decimos que el sistema PCM es robusto frente a interferencias.

## 9.2. Ruido de Cuantificación

Es debido al redondeo de las muestras de la señal continua al nivel permitido más cercano. Supongamos que  $\delta$  es el tamaño del escalón. Para el caso de cuantificador uniforme de tipo Mid-Thread los niveles de salida son  $0, \pm\delta, \pm2\delta, \pm3\delta, \dots$ . Si una muestra de entrada cae en el intervalo  $(k\delta - \delta/2, k\delta + \delta/2)$ , con  $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots$ , el nivel de salida cuantificado es  $k\delta$ . Tenemos una región de incertidumbre de ancho  $\delta$  y centrada en  $k\delta$ . Sea  $q_e$  el valor del error debido al proceso de cuantificación. La amplitud de la muestra a la entrada es  $k\delta + q_e$  y a la salida es  $k\delta$ . Si la amplitud de la muestra a la entrada es aleatoria pero dentro del margen dinámico del cuantificador (no está en saturación),  $q_e$  está restringida al intervalo  $(-\delta/2, \delta/2)$ .

Cuando la cuantificación es suficientemente fina (el número de niveles o escalones es mayor de 64), la distorsión producida por el ruido de cuantificación es equivalente a una fuente de ruido independiente, aditiva, de media cero y valor cuadrático medio determinado por el valor del tamaño del escalón  $\delta$ . La razón de esto es que la densidad espectral de potencia del ruido de cuantificación a la salida del receptor es prácticamente independiente de la señal banda base para un rango bastante amplio de amplitudes de señal. Para una señal banda base con una amplitud grande comparada con el tamaño del escalón  $\delta$ , se puede ver que la densidad espectral de potencia del ruido de cuantificación tiene un ancho de banda grande comparado con el de la señal. El ruido de cuantificación está uniformemente distribuido en el ancho de banda de la señal (aproximadamente ruido blanco) y el efecto es similar al de un ruido térmico.

Sea  $Q_e$  la variable aleatoria que denota el ruido de cuantificación. Supongamos que  $Q_e$  esté uniformemente distribuida en el intervalo  $(-\delta/2, \delta/2)$  según

$$f_{Q_e}(q_e) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} & |q_e| \leq \frac{\delta}{2} \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (9.15)$$

Para que esto sea cierto la señal de entrada no debe saturar al cuantificador. La media de esta distribución es cero mientras que la varianza (que es igual al valor cuadrático medio ya que la media es cero) se puede determinar mediante

$$Var[Q_e] = E[Q_e^2] = \int_{-\infty}^{\infty} q_e^2 f_{Q_e}(q_e) dq_e = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} q_e^2 dq_e = \frac{\delta^2}{12} \quad (9.16)$$

Vamos a denotar con  $P_m$  la potencia media de la señal  $m(t)$  a cuantificar. Cuando la señal banda base se reconstruye a la salida del receptor se obtiene la señal más el ruido de cuantificación. Entonces la SNR

de cuantificación (SQNR) va a venir dada por

$$\text{SQNR} = \frac{P_m}{\delta^2/12} \quad (9.17)$$

Vamos a suponer que  $m(t)$  se modela como una señal sinusoidal de la forma  $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$  que recorra completamente todo el rango completo del cuantificador, es decir, el rango del cuantificador es de  $-A_{\text{máx}} = -A_m$  a  $A_{\text{máx}} = A_m$  (caso sinusoidal con carga total o completa). La potencia de esta señal sinusoidal es  $P_m = A_m^2/2$ . El número de niveles del cuantificador es  $L = 2^n$  siendo  $n$  el número de bits necesarios por muestra cuantificada en la etapa de codificación. El tamaño del escalón viene dado por

$$\delta = \frac{2A_m}{L} = A_m 2^{1-n} \quad (9.18)$$

y la varianza (o el valor cuadrático medio) del ruido por

$$\text{Var}[Q_e] = E[Q_e^2] = \frac{\delta^2}{12} = \frac{1}{3} A_m^2 2^{-2n} \quad (9.19)$$

La SQNR viene entonces dada por (a la salida del receptor/decodificador)

$$\text{SQNR} = \frac{3}{2} 2^{2n}. \quad (9.20)$$

Esta ecuación suele venir dada normalmente en dB según

$$10 \log_{10} (\text{SQNR}) = 6n + 1,76 \text{ [dB]}. \quad (9.21)$$

Según la ecuación (9.21) cada bit adicional contribuye con 6 dB a la SQNR. Esto da una idea del comportamiento de un sistema PCM frente al ruido de cuantificación siempre que:

- El ruido de transmisión sea despreciable. Para ello se tenía que cumplir que la SNR de pico del canal fuera mayor que 20 dB en ausencia de interferencia o del nivel correspondiente superior en presencia de ésta.
- El error de cuantificación  $Q_e$  se pueda considerar uniformemente distribuido según la ecuación (9.15).
- La cuantificación sea suficientemente fina ( $n > 6$ ) para evitar patrones de señal correlados con el ruido de cuantificación.
- El cuantificador trabaje en su zona lineal de funcionamiento y no entre en saturación.

Las condiciones primera y tercera se cumplen siempre que la calidad del sistema sea suficientemente elevada. Si la calidad no es un requisito tan severo, se puede tener  $n \leq 6$ . En este caso la calidad no está reflejada únicamente en el valor de SQNR, sino en la presencia no deseada de patrones de señal en la forma de onda del error de cuantificación dependientes de la señal.

Vamos a analizar ahora el caso en el que la señal  $m(t)$  se modela como una señal con distribución Gaussiana con media cero y potencia  $P_m = \sigma_m^2$ . Supongamos también que la zona lineal de funcionamiento del cuantificador va de  $-4\sigma_m$  a  $4\sigma_m$ , la probabilidad de que la señal  $m(t)$  entre en zona de saturación es inferior a  $10^{-4}$ , por lo que se puede utilizar razonablemente la distribución uniforme para el ruido de cuantificación. Entonces el tamaño del escalón viene dado por

$$\delta = \frac{8\sigma_m}{2^n}, \quad (9.22)$$

por lo que sustituyendo esta expresión en la ecuación (9.17) se puede obtener

$$\text{SQNR} = \frac{3}{16} 2^{2n} \quad (9.23)$$

o en dB por

$$10 \log_{10} (\text{SQNR}) = 6n - 7,27 \text{ [dB]}. \quad (9.24)$$

En la tabla 9.2 se recogen para varios valores del número de bits por símbolo  $n$  los valores correspondientes para el número de niveles  $L$  y los valores de SQNR en dB para el caso sinusoidal y Gaussiano,

Número de niveles $L$	Número de bits $n$	SQNR [dB] caso sinusoidal	SQNR [dB] caso Gaussiano
32	5	31.76	22.73
64	6	37.76	28.73
128	7	43.76	34.73
256	8	49.76	40.73
4096	12	73.76	64.73
65536	16	97.76	88.73

Tabla 9.2: Número de niveles, número de bits y SQNR en dB para el caso sinusoidal y Gaussiano.

respectivamente. A partir de la tabla 9.2 y dada una calidad se puede determinar el número de bits  $n$  y correspondientemente el número de niveles  $L$  del cuantificador para el caso sinusoidal o para el caso Gaussiano. En el caso de que la cuantificación no sea uniforme es necesario modificar la SQNR con los valores de ganancia para señales débiles o pérdidas para señales fuertes del compansor, cómo se vio en la sección 8.2 (ver figura 8.11).

Si la señal  $m(t)$  tiene un ancho de banda  $W$ , la tasa de Nyquist es de  $f_s = 2W$ , por lo que

$$T_s = \frac{1}{2W}. \quad (9.25)$$

Si se utiliza un cuantificador de  $n$  bits, la duración de cada bit viene dado por

$$T_b = \frac{1}{2nW}. \quad (9.26)$$

En general, el ancho de banda requerido para transmitir esta señal binaria como veremos más adelante viene dado por

$$B_T = knW, \quad (9.27)$$

siendo  $k$  una constante que depende de la forma de los pulsos transmitidos que suele moverse en el rango  $1 \leq k \leq 2$  ( $k = 1$  significa que se pueden transmitir 2 bps por Hz y si  $k = 2$  significa que se pueden transmitir 1 bps por Hz como veremos más adelante). Si utilizamos la expresión para la SQNR cuando la señal  $m(t)$  es sinusoidal con carga completa según la ecuación (9.20) y sustituyendo  $n$  a partir de la ecuación (9.27) se obtiene

$$\text{SQNR} = \frac{3}{2} 4^{\frac{B_T}{kW}} = \frac{3}{2} \left[ (4)^{\frac{1}{k}} \right]^{\frac{B_T}{W}} = \frac{3}{2} \left[ (4)^{\frac{1}{k}} \right]^{B_n}, \quad (9.28)$$

siendo  $B_n = B_T/W$  el ancho de banda de transmisión normalizado al ancho de banda de la señal banda base a transmitir. A partir de esta ecuación se deduce que la SQNR tiene una relación exponencial o potencial con respecto al ancho de banda normalizado  $B_n$ . En FM esta relación era cuadrática: doblando el ancho de banda, siempre que estemos por encima del umbral la mejora es de 6 dB. Sin embargo en un sistema PCM doblando el ancho de banda, se puede utilizar un cuantificador con el doble número de bits  $n$  por lo que la mejora es de  $6n$  dB. Por ejemplo, a partir de los valores de la tabla 9.2, si trabajamos con  $n = 8$  bits por muestra, doblando el ancho de banda podríamos utilizar  $n = 16$  bits por muestra con una mejora de 48 dB frente a los 6 dB en FM. Podemos concluir diciendo que PCM es mucho más eficiente que FM en lo que se refiere a intercambio de ancho de banda de transmisión  $B_T$  y SNR. Además, ya que la calidad en PDM y PPM seguía también una relación cuadrática con el ancho de banda como FM, PCM también va a ser mucho más eficiente que la modulación analógica de pulsos (PAM, PDM y PPM) en lo que se refiere a intercambio de ancho de banda de transmisión  $B_T$  y SNR. Finalmente, recordamos diciendo que en los sistemas tipo AM ni siquiera existía ese intercambio.