

TRANSMISIÓN DIGITAL EN BANDA BASE

Marcos Martín Fernández
E. T. S. de Ingenieros de Telecomunicación
Universidad de Valladolid

11 de marzo de 2013

Índice general

1. Elementos de un Sistema Binario en Banda Base	1
2. Forma de los Pulsos Recibidos para Evitar ISI	3
3. Filtros Óptimos de Transmisión y Recepción	8
4. Codificación Correlativa	12
4.1. Señalización Duobinaria	12
4.2. Señalización Duobinaria Modificada	15
4.3. Forma General de Codificación Correlativa	17
5. Sistemas Banda Base M-arios	19
6. Filtro Adaptado	21
7. Diagrama de Ojos	25

Capítulo 1

Elementos de un Sistema Binario en Banda Base

Vamos a estudiar técnicas de modulación de pulsos discretos para la transmisión de información digital en banda base. En la modulación de pulsos discretos la amplitud, la duración o la posición de los pulsos transmitidos varía de acuerdo a los datos digitales de entrada. Sin embargo, para la transmisión en banda base de datos digitales, el uso de modulación de pulsos en amplitud discreta o PAM es más eficiente en términos de utilización de potencia y ancho de banda. A partir de ahora vamos a utilizar siempre sistemas basados en PAM.

En la figura 1.1 podemos ver el diagrama de bloques del transmisor digital banda base basado en PAM. La señal aplicada a la entrada del sistema consiste en una secuencia binaria $\{b_k\}$ con una duración de bit de T_b segundos. b_k en el caso binario es de la forma \emptyset o 1. Gracias al bloque generador de pulsos, cada símbolo b_k se representa con un pulso $g(t)$ con diferente amplitud a_k dependiendo del símbolo transmitido, obteniéndose la señal $x(t)$ mediante

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t - kT_b). \quad (1.1)$$

La forma de los pulsos depende de como sea $g(t)$. Este pulso está normalizado de forma que $g(0) = 1$. La amplitud a_k depende de la identidad del bit de entrada b_k , pudiéndose suponer la codificación dada por

$$a_k = \begin{cases} +a & \text{si la entrada fue } b_k = 1 \\ -a & \text{si la entrada fue } b_k = \emptyset. \end{cases} \quad (1.2)$$

La señal PAM $x(t)$ pasa a través de un **filtro de transmisión** de función de transferencia ajustable $H_T(f)$. La salida de este filtro es la señal que se transmite a través del canal de comunicaciones. Esta señal transmitida se ve modificada de forma determinista según la **función de transferencia del canal** $H_C(f)$ que se supone conocida. Además el canal introduce **ruido aleatorio** $w(t)$ blanco y aditivo referido a la entrada del receptor. La señal ruidosa pasa a través de un **filtro de recepción** de función de transferencia ajustable $H_R(f)$ obteniéndose la señal $y(t)$. Esta señal se muestrea manteniendo el sincronismo con el transmisor a una tasa de una muestra por bit. Los instantes de muestreo $t_i = iT_b$ vienen determinados por

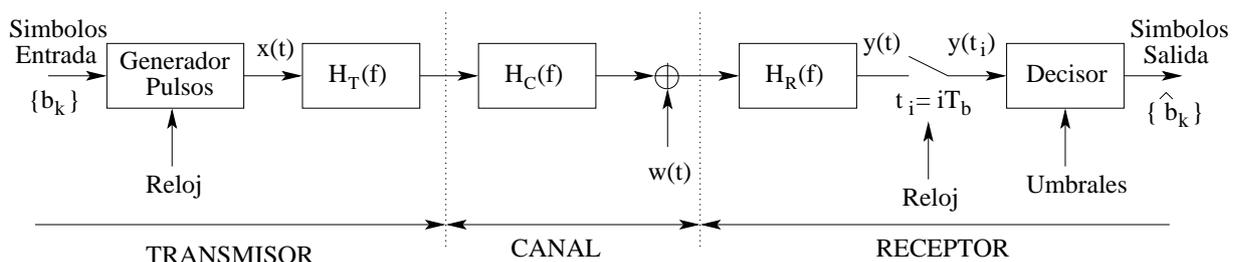


Figura 1.1: Esquema de un sistema binario en banda base basado en PAM.

un reloj o señal de temporización que normalmente se extrae de la propia señal recibida $y(t)$. Finalmente, la secuencia de muestras $y(t_i)$ obtenida se utiliza para reconstruir la señal original utilizando un **dispositivo decisor**. La amplitud de cada muestra se compara con un **umbral**. Si la muestra es mayor que el umbral se decide que se transmitió un 1, en caso contrario se decide en favor de \emptyset , obteniéndose la secuencia $\{\hat{b}_k\}$. El objetivo es que esta secuencia sea exactamente igual a la original $\{b_k\}$.

La señal de $y(t)$ viene dada por

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k p(t - kT_b) + n(t), \quad (1.3)$$

donde A_k es la amplitud de los pulsos recibidos. Debido a los filtros de transmisión $H_T(f)$ y recepción $H_R(f)$ y a la función de transferencia del canal $H_C(f)$, la forma de los pulsos se ha modificado siendo ahora $p(t)$. Las amplitudes A_k pueden ser tales que el pulso en recepción también esté normalizado de forma que $p(0) = 1$. $A_k p(t)$ es el pulso que se recibe tras el filtro de recepción cuando se tiene $a_k g(t)$ antes del filtro de transmisión, por lo que se cumple

$$A_k P(f) = a_k G(f) H_T(f) H_C(f) H_R(f), \quad (1.4)$$

siendo $G(f)$ y $P(f)$ las transformadas de Fourier de los pulsos transmitido $g(t)$ y recibido $p(t)$, respectivamente. El término $n(t)$ de la ecuación (1.3) es el ruido presente a la salida del filtro receptor (el ruido filtrado) debido al ruido blanco y aditivo $w(t)$ presente a lo largo del canal de comunicaciones. Este ruido se suele modelar además como Gaussiano con media cero.

La señal recibida $y(t)$ se muestrea en los instantes $t_i = iT_b$, con i entero, obteniéndose

$$y(t_i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k p[(i - k)T_b] + n(t_i) = A_i + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq i}}^{\infty} A_k p[(i - k)T_b] + n(t_i), \quad (1.5)$$

donde A_i es la amplitud del bit i transmitido. El segundo término de la segunda expresión anterior representa el efecto residual del resto de bits transmitidos en la detección del bit i . Este efecto se denomina **interferencia entre símbolos** o ISI (Inter-Symbol Interference). El último término de esta misma ecuación representa el ruido muestreado en el instante t_i . En ausencia de ISI y ruido la ecuación (1.5) quedaría $y(t_i) = A_i$, por lo que el bit i se decodificaría de forma correcta siempre. La inevitable presencia de ISI y ruido en el sistema va a dar lugar a bits erróneos en la etapa de decisión. A la hora de diseñar los filtros de transmisión $H_T(f)$ y recepción $H_R(f)$ habrá que minimizar el efecto de la ISI y del ruido para que el decisor cometa el menor número de errores posible, lo que en definitiva aumentará la calidad del sistema.

En lo que sigue vamos a determinar en primer lugar qué condiciones tiene que cumplir la forma de los pulsos recibidos $p(t)$ para evitar la ISI y en segundo lugar vamos a diseñar los filtros óptimos de transmisión $H_T(f)$ y recepción $H_R(f)$ para evitar la ISI y minimizar el efecto del ruido.

Capítulo 2

Forma de los Pulsos Recibidos para Evitar ISI

Típicamente la función de transferencia del canal y la forma del pulso vienen dadas de modo que el problema es determinar la función de transferencia del filtro de transmisión $H_T(f)$ y del filtro de recepción $H_R(f)$ de modo que el receptor reconozca la secuencia de valores A_i en la señal recibida.

Al resolver este problema, debemos evitar la ISI debido al solapamiento de los extremos de los otros pulsos que se suman al pulso de interés $A_i p(t - iT_b)$ que se observa en el instante iT_b . Si esta forma de interferencia es muy fuerte, el decisor puede cometer errores. El control de la ISI en el sistema se logra controlando en el dominio del tiempo la forma de los pulsos recibidos $p(t)$ o en el dominio de la frecuencia su transformada de Fourier $P(f)$. Las condiciones que impuestas a $p(t)$ que hacen que la ISI sea cero se denomina **criterio de Nyquist para ISI cero en el dominio temporal**. En el dominio del tiempo se tiene que cumplir entonces

$$p(iT_b) = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i \neq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Si muestreáramos de forma ideal el pulso $p(t)$ en los instantes iT_b correspondientes a las posiciones de los bits, podemos ver esta misma condición en el dominio de la frecuencia, esto es, para $P(f)$. Consideramos la señal muestreadora ideal dada por

$$\delta_{T_b}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_b), \quad (2.2)$$

entonces tenemos que el pulso muestreado sería

$$p_\delta(t) = p(t) \cdot \delta_{T_b}(t) = p(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_b) p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_b) p(nT_b) \quad (2.3)$$

y teniendo en cuenta la restricción temporal dada por la ecuación (2.1), es decir, el criterio de Nyquist para ISI cero en el dominio temporal, se tiene que

$$p_\delta(t) = \delta(t) p(0) = \delta(t). \quad (2.4)$$

Vamos a hacer la transformada de Fourier de la ecuación (2.3). Para ello recordamos que la expresión de la transformada de Fourier de la señal muestreadora ideal dada por la ecuación (2.2) venía dada por

$$\delta_{T_b}(f) = R_b \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nR_b), \quad (2.5)$$

siendo $R_b = 1/T_b$ la tasa de transmisión binaria en bits por segundo. Entonces la transformada de Fourier de la ecuación (2.3) viene dada por

$$P_\delta(f) = P(f) * \delta_{T_b}(f) = P(f) * \left(R_b \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nR_b) \right) = R_b \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(f) * \delta(f - nR_b) = R_b \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(f - nR_b). \quad (2.6)$$

Según la ecuación (2.4) $p_\delta(t) = \delta(t)$ y entonces su transformada de Fourier tiene que ser unidad, por lo que finalmente la ecuación (2.6) se puede escribir como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(f - nR_b) = T_b, \quad (2.7)$$

expresión que se conoce como **criterio de Nyquist para ISI cero en el dominio frecuencial** y que nos dice que al desplazar la transformada de Fourier $P(f)$ múltiplos enteros de la tasa binaria de transmisión R_b y acumular el resultado, el espectro resultante tiene que ser plano con valor de amplitud igual al periodo de bit T_b . Este criterio es equivalente a todos los efectos al criterio de Nyquist para ISI cero en el dominio temporal dado por la ecuación (2.1). Vamos a ver dos casos particulares que cumplen el criterio de Nyquist (en ambos dominios, puesto que si se cumple en uno se cumple necesariamente también en el otro).

Una primera forma de señal que no produce ISI está definida temporalmente por la **función sinc** dada por

$$p(t) = \frac{\sin(2\pi B_T t)}{2\pi B_T t} = \text{sinc}(2B_T t) \quad (2.8)$$

que cumple que en el instante de muestreo del bit de interés está normalizada valiendo $p(0) = 1$ y en los instantes de muestreo del resto de bits se anula, es decir, $p(iT_b) = 0$ para $i \neq 0$. En la ecuación (2.8) B_T es el ancho de banda de este pulso $p(t)$ que viene relacionado con la duración del bit T_b a través de

$$B_T = \frac{1}{2T_b}. \quad (2.9)$$

En el dominio de la frecuencia $P(f)$ corresponde a una señal paso bajo ideal de ancho de banda B_T dada por

$$P(f) = \frac{1}{2B_T} \Pi\left(\frac{f}{2B_T}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2B_T} & |f| < B_T \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Esto significa que no hace falta ninguna componente frecuencial que exceda la mitad de la tasa binaria. Como se ha podido comprobar el criterio de Nyquist para ISI cero se satisface en ambos dominios.

Como ya se ha dicho el pulso $p(t)$ tiene su valor de pico en el origen igual a la unidad y se anula para múltiplos enteros de T_b . Si la señal recibida se muestrea en $t = 0, \pm T_b, \pm 2T_b, \dots$ los pulsos definidos por $A_i p(t - iT_b)$ con amplitud A_i para $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ no interferirán entre sí.

Aunque la elección de esta forma de señal para el pulso $p(t)$ minimiza el ancho de banda necesario y se logra evitar la ISI, aparecen dificultades prácticas que lo hacen poco apropiado en el diseño del sistema:

1. Requiere que la característica de $P(f)$ sea plana en frecuencia desde $-B_T$ hasta B_T y cero fuera. Esto es físicamente irrealizable y muy difícil de aproximar en la práctica debido a la discontinuidad en $\pm B_T$.
2. La función $p(t)$ decrece según $1/|t|$ para $|t|$ grande, es decir decrece de forma lenta. Esto es debido a la discontinuidad de $P(f)$ en $\pm B_T$. No hay posibilidad de un margen de error en los instantes de muestreo en el receptor. Para evaluar el efecto de un error de temporización vamos a considerar que la muestra de la señal recibida $y(t)$ del origen se toma en el instante $t = \Delta t$, siendo Δt el error de temporización cometido. El instante correcto de muestreo debería haber sido $t = 0$ en este caso. En ausencia de ruido se tiene

$$y(\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k p(\Delta t - kT_b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \frac{\sin[2\pi B_T(\Delta t - kT_b)]}{2\pi B_T(\Delta t - kT_b)}. \quad (2.11)$$

Como se cumple que $2B_T T_b = 1$ la ecuación anterior se puede escribir según

$$y(\Delta t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \frac{\sin(2\pi B_T \Delta t - \pi k)}{2B_T \Delta t - k}. \quad (2.12)$$

Desarrollando ahora el seno del numerador se obtiene

$$y(\Delta t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \frac{\sin(2\pi B_T \Delta t) \cos(\pi k) - \cos(2\pi B_T \Delta t) \sin(\pi k)}{2B_T \Delta t - k} \quad (2.13)$$

y, teniendo en cuenta que $\sin(\pi k) = 0$ y que $\cos(\pi k) = (-1)^k$ para k entero, se obtiene finalmente

$$y(\Delta t) = A_0 \text{sinc}(2B_T \Delta t) + \frac{\sin(2\pi B_T \Delta t)}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{A_k (-1)^k}{2B_T \Delta t - k}. \quad (2.14)$$

El primer término de la ecuación (2.14) define el símbolo deseado. Si Δt toma un valor pequeño, $\text{sinc}(2B_T \Delta t)$ es aproximadamente unidad, por lo que el primer término nos proporciona el bit deseado de amplitud A_0 . El segundo término representa la ISI debida al resto de bits que interfieren con el bit de interés debido al error de temporización Δt . Dependiendo de los valores de la amplitud A_k del resto de bits, es posible que esta serie no converja a cero, dando lugar a errores en el decisor. Esto es debido a que la serie $\sum 1/k$ tiende a infinito.

Usando el ancho de banda menor posible existen otras soluciones para la forma de $p(t)$ que evitan la ISI y permiten salvar los dos inconvenientes anteriores. Una de las soluciones más interesantes fue descrita por primera vez por Nyquist: la forma de $P(f)$ que posee muchas de las propiedades deseables es el **coseno alzado**. Esta característica en frecuencia consiste en una parte plana a baja frecuencia y otra parte decreciente hasta cero o **roll-off** siguiendo una función coseno. La expresión analítica para $P(f)$ viene dada por

$$P(f) = \begin{cases} \frac{1}{2B_T} & |f| < f_1 \\ \frac{1}{4B_T} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi(|f| - f_1)}{2B_T - 2f_1} \right] \right\} & f_1 < |f| < 2B_T - f_1 \\ 0 & |f| > 2B_T - f_1. \end{cases} \quad (2.15)$$

El ancho de banda de este pulso es $2B_T - f_1$ siendo f_1 un parámetro frecuencial dado por

$$f_1 = B_T(1 - \rho) \quad (2.16)$$

ρ se denomina **factor de roll-off** y cumple que $0 \leq \rho \leq 1$. El factor de roll-off es un parámetro de diseño del pulso. Usando dicho factor, el ancho de banda B_w del pulso viene dado por

$$B_w = B_T(1 + \rho). \quad (2.17)$$

En la figura 2.1 podemos ver el espectro $P(f)$ para factor de roll-off $\rho = 0$, $\rho = 0,5$ y $\rho = 1$. El eje de frecuencias está normalizado con respecto a B_T y las amplitudes con respecto al valor en el origen de $P(f)$.

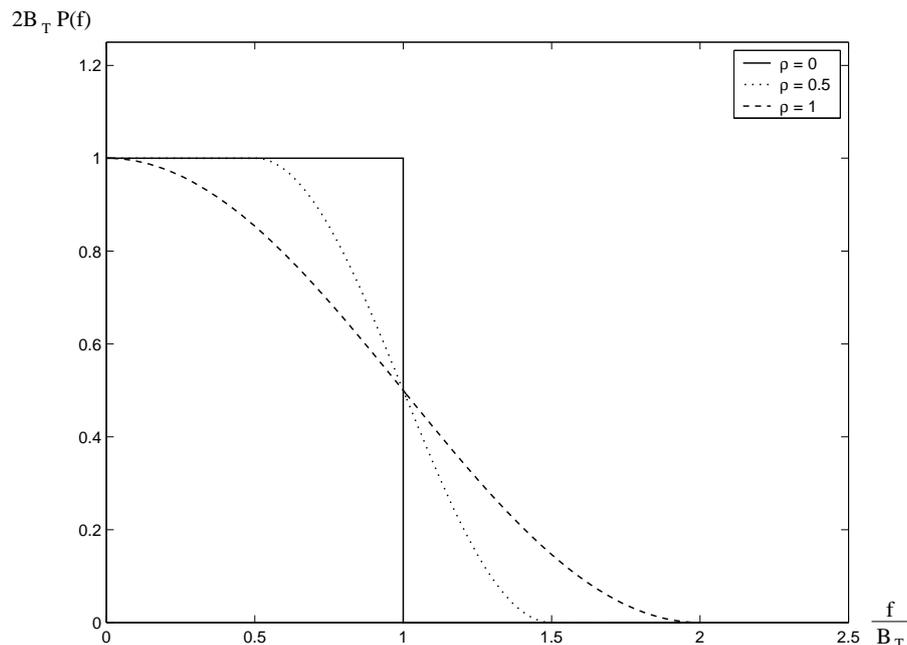


Figura 2.1: Espectro del pulso $P(f)$ con forma de coseno alzado para tres valores del factor de roll-off ρ .

Para $\rho = 0$, se tiene que $B_w = B_T$ y $f_1 = B_T$. En este caso la ecuación (2.15) coincide con la ecuación (2.10) por lo que $P(f)$ es un pulso bajo bajo ideal con mínimo ancho de banda de forma que la parte con caída sinusoidal desaparece, es decir, tenemos el pulso en el dominio del tiempo $p(t)$ con forma de sinc. Si ahora $\rho = 1$, se tiene que $B_w = 2B_T$ y $f_1 = 0$. En este caso el ancho de banda es el doble que el pulso en el dominio del tiempo $p(t)$ con forma de sinc. Además la parte plana desaparece puesto que $f_1 = 0$ y el espectro tiene una caída suave sinusoidal desde el origen hasta $2B_T$. Para $\rho = 0,5$ el ancho de banda $B_w = 1,5B_T$ y $f_1 = 0,5B_T$. En este caso para bajas frecuencias hasta $0,5B_T$ hay una zona plana y de $0,5B_T$ hasta $1,5B_T$ tenemos la zona de caída sinusoidal. $P(f)$ presenta simetría impar en la frecuencia B_T en torno al valor 0,5 de amplitud normalizada como se puede apreciar en la figura 2.1.

Tomando transformada inversa de Fourier en la expresión para $P(f)$ dada por la ecuación (2.15) se puede obtener la expresión en el dominio del tiempo para $p(t)$ llegando a

$$p(t) = \text{sinc}(2B_T t) \frac{\cos(2\pi\rho B_T t)}{1 - 16\rho^2 B_T^2 t^2}. \quad (2.18)$$

En la figura 2.2 se puede ver gráficamente $p(t)$ para factor de roll-off $\rho = 0$, $\rho = 0,5$ y $\rho = 1$. Cuando $\rho = 0$ la forma de $p(t)$ es una sinc.

La expresión para $p(t)$ dada por la ecuación (2.18) consiste en el producto de dos factores. Un primer factor $\text{sinc}(2B_T t)$ asociado con el pulso con forma de sinc con espectro rectangular y un segundo factor que decrece como $1/|t|^2$ para $|t|$ grande. El primer factor asegura que $p(t)$ pase por cero en los instantes de muestreo del resto de símbolos para $t = iT_b$ con i un entero distinto de cero. El segundo factor reduce el tamaño de las colas del pulso considerablemente por debajo del pulso con forma de sinc, así la transmisión de la señal binaria usando estos pulsos va a ser relativamente insensible a los errores de temporización. De hecho la cantidad de ISI debido a un error de temporización decrece según ρ crece desde 0 hasta 1.

Para el caso especial de $\rho = 1$, la expresión para $p(t)$ de la ecuación (2.18) se puede simplificar obteniéndose

$$p(t) = \frac{\text{sinc}(4B_T t)}{1 - 16B_T^2 t^2}. \quad (2.19)$$

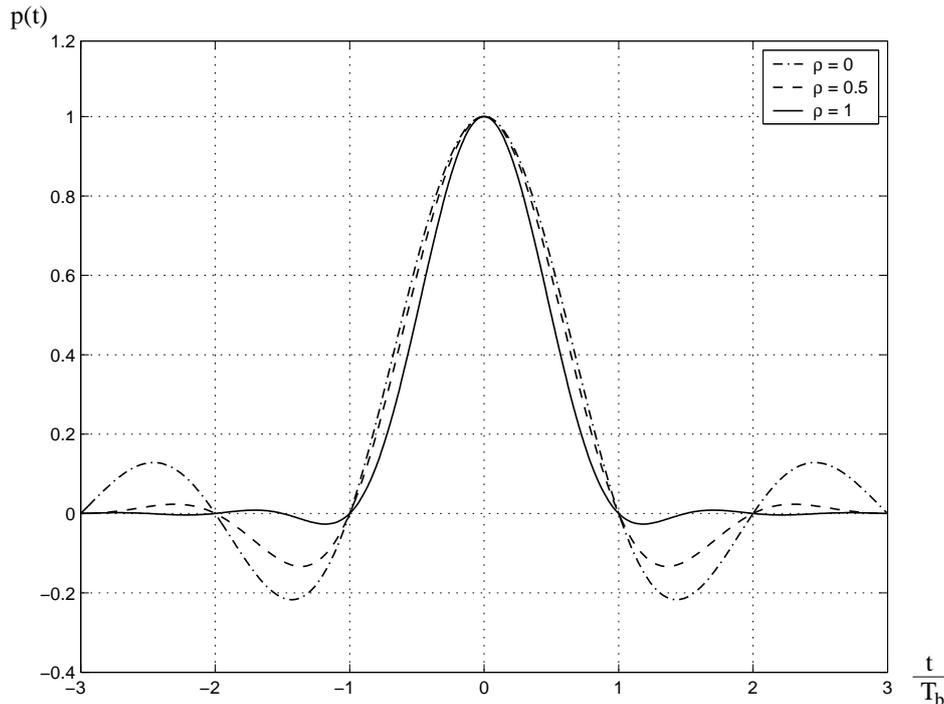


Figura 2.2: Forma de $p(t)$ en el dominio del tiempo para el pulso con espectro con forma de coseno alzado para tres valores del factor de roll-off ρ .

El pulso dado por la ecuación (2.19) para $\rho = 1$ tiene las siguientes propiedades en el dominio del tiempo:

- En $t = \pm \frac{T_b}{2} = \pm \frac{1}{4B_T}$ se cumple que $p(t) = 1/2$, es decir, el ancho del pulso medido a mitad de amplitud es exactamente T_b .
- Hay cruces en $t = \pm 3T_b/2, \pm 5T_b/2, \dots$, además de los cruces normales en $t = \pm T_b, \pm 2T_b, \dots$

Estas dos propiedades son particularmente útiles a la hora de regenerar la señal de reloj en el receptor para sincronización. Sin embargo, el precio a pagar para el caso $\rho = 1$ es la necesidad del doble ancho de banda que para el caso $\rho = 0$ como se puede ver en la figura 2.1. Como se ha podido comprobar el criterio de Nyquist para ISI cero se satisface para pulsos con espectro en coseno alzado también en ambos dominios.

Capítulo 3

Filtros Óptimos de Transmisión y Recepción

En el capítulo 2 hemos visto como diseñar la forma del pulso $p(t)$ para reducir la ISI en los instantes de muestreo a cero. El problema que vamos a abordar ahora es el diseño de los filtros de transmisión y recepción de forma que la probabilidad de error debida al ruido sea mínima. En la expresión de la señal tras el muestreador del receptor dada por

$$y(t_i) = A_i + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq i}}^{\infty} A_k p[(i-k)T_b] + n(t_i), \quad (3.1)$$

el segundo término es el debido a la ISI. Si suponemos que se utiliza un pulso $p(t)$ adecuado para eliminar la ISI en los instantes de muestreo, la amplitud de la muestra a la entrada del decisor en el instante $t_i = iT_b$ viene dada por

$$y(t_i) = A_i + n(t_i), \quad (3.2)$$

donde las amplitudes A_i vienen dadas por

$$A_i = \begin{cases} +A & \text{cuando se transmitió 1} \\ -A & \text{cuando se transmitió } \emptyset. \end{cases} \quad (3.3)$$

El decisor por tanto debe comparar la amplitud de la muestra con el umbral 0. Así si $y(t_i) > 0$ se decide que se transmitió 1, mientras que si $y(t_i) < 0$ se decide que se transmitió \emptyset .

Vamos a suponer que el ruido aditivo $w(t)$ a la entrada del receptor es blanco Gaussiano y de media cero con densidad espectral de potencia $S_W(f)$ constante e igual a $N_0/2$. En la ecuación (3.2), $n(t_i)$ será una muestra de una variable aleatoria Gaussiana, de media cero y con varianza dada por

$$\sigma_N^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df, \quad (3.4)$$

siendo $H_R(f)$ la función de transferencia del filtro a la entrada del receptor.

La probabilidad de error promedio del decisor usando el umbral 0 se puede comprobar que viene dada por

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma_N} \right) \quad (3.5)$$

siendo erfc la función de error complementario dada por

$$\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} \exp(-z^2) dz. \quad (3.6)$$

Ya que la función erfc es decreciente según se puede deducir de la ecuación (3.6), la probabilidad de error promedio decrecerá según A/σ_N crece. Para minimizar la probabilidad de error promedio tenemos que diseñar los filtros de transmisión $H_T(f)$ y de recepción $H_R(f)$ que maximicen la relación A/σ_N o

equivalentemente A^2/σ_N^2 . Esta cantidad se puede considerar como un valor de SNR. Para poder maximizar esta SNR, debemos poner la relación A^2/σ_N^2 como función de $H_T(f)$ y de $H_R(f)$.

La señal $x(t)$ a la entrada del filtro de transmisión viene dada por

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t - kT_b), \quad (3.7)$$

donde $g(t)$ es la forma del pulso transmitido que está normalizado para que valga 1 en el origen y tiene una duración igual o menor que la duración de bit T_b . Las amplitudes a_k vienen dadas por

$$a_k = \begin{cases} +a & \text{para transmitir 1} \\ -a & \text{para transmitir } \emptyset. \end{cases} \quad (3.8)$$

Vamos a suponer que los bits son independientes y equiprobables. La densidad espectral de potencia de la señal $x(t)$ a la entrada del filtro de transmisión viene dada por

$$S_X(f) = \frac{a^2 \Psi_g(f)}{T_b}, \quad (3.9)$$

donde $\Psi_g(f)$ es la densidad espectral de energía de la forma del pulso transmitido $g(t)$ dada por

$$\Psi_g(f) = |G(f)|^2. \quad (3.10)$$

La señal $x(t)$ se aplica al filtro transmisor dando lugar a la señal $z(t)$. La densidad espectral de potencia de $z(t)$ vendrá dada entonces por

$$S_Z(f) = |H_T(f)|^2 S_X(f) = \frac{a^2}{T_b} |H_T(f)|^2 |G(f)|^2, \quad (3.11)$$

por lo que la potencia transmitida va a venir dada por

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S_Z(f) df = \frac{a^2}{T_b} \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 |G(f)|^2 df. \quad (3.12)$$

Suponiendo que la relación entre la amplitud de los bits transmitidos a_k y la de los bits recibidos A_k se mantenga constante, podemos escribir

$$A_k = K a_k, \quad (3.13)$$

siendo K la constante de proporcionalidad. Observando las ecuaciones (3.3) y (3.8) se puede escribir de forma equivalente

$$A = K a. \quad (3.14)$$

A partir de la ecuación (3.14), podemos escribir la potencia transmitida dada por la ecuación (3.12) como función de la amplitud de los bits recibidos A según

$$P = \frac{A^2}{K^2 T_b} \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 |G(f)|^2 df. \quad (3.15)$$

Despejando A^2 de la ecuación (3.15) se llega a

$$A^2 = \frac{K^2 T_b P}{\int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 |G(f)|^2 df}. \quad (3.16)$$

Usando las ecuaciones (3.4) y (3.16) se puede obtener la expresión buscada que relaciona la SNR A^2/σ_N^2 con las funciones de transferencia de los filtros de transmisión y recepción obteniéndose

$$\frac{A^2}{\sigma_N^2} = \frac{2K^2 T_b P}{N_0} \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 |G(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df}, \quad (3.17)$$

que ahora habrá que maximizar con respecto a $H_T(f)$ y $H_R(f)$.

Teniendo en cuenta la relación espectral dada por

$$A_k P(f) = a_k G(f) H_T(f) H_C(f) H_R(f) \quad (3.18)$$

vamos a sustituir la dependencia de la ecuación (3.17) con respecto al espectro $G(f)$ de la forma del pulso antes del filtro de transmisión, añadiendo dependencias con respecto a la función de transferencia del canal $H_C(f)$ y el espectro del pulso a la entrada del decisor $P(f)$, que se supone conocido puesto que lo hemos diseñado como se ha indicado en el capítulo 2 para evitar ISI.

Haciendo uso de la ecuación (3.13), la ecuación (3.18) se puede poner según

$$K P(f) = G(f) H_T(f) H_C(f) H_R(f). \quad (3.19)$$

Despejando $G(f)$ en la ecuación (3.19) y sustituyéndolo en la ecuación (3.17), conseguimos nuestro objetivo obteniendo

$$\frac{A^2}{\sigma_N^2} = \frac{2T_b P}{N_0} \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(f)|^2}{|H_C(f)|^2 |H_R(f)|^2} df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df}. \quad (3.20)$$

Además ahora hemos eliminado la dependencia con respecto a la función de transferencia del filtro de transmisión $H_T(f)$. Habrá que maximizar la ecuación (3.20) con respecto a la función de transferencia del filtro de recepción $H_R(f)$.

Maximizar A^2/σ_N^2 dado por la ecuación (3.20) es equivalente a minimizar la cantidad η dada por

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(f)|^2}{|H_C(f)|^2 |H_R(f)|^2} df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df. \quad (3.21)$$

Para poder resolver el problema de optimización planteado vamos a hacer uso de la desigualdad de Schwarz para el caso real. Dadas dos funciones reales $U(f)$ y $V(f)$, se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} V^2(f) df \int_{-\infty}^{\infty} U^2(f) df \geq \left[\int_{-\infty}^{\infty} V(f) U(f) df \right]^2. \quad (3.22)$$

El valor mínimo de la expresión de la izquierda de la ecuación (3.22) se alcanzará cuando se cumpla la igualdad en dicha ecuación. Esta igualdad se alcanza cuando las funciones son proporcionales según

$$U(f) = C V(f), \quad (3.23)$$

siendo C una constante real positiva. Para poder usar la desigualdad de Schwarz comparando la expresión de la izquierda de la ecuación (3.22) con la ecuación (3.21) se pueden obtener

$$U(f) = |H_R(f)| \quad (3.24)$$

$$V(f) = \frac{|P(f)|}{|H_C(f)| |H_R(f)|}. \quad (3.25)$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz a la ecuación (3.21) se tiene que:

1. El valor mínimo de η viene dado por

$$\eta_{\min} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(f)|}{|H_C(f)|} df \right]^2. \quad (3.26)$$

2. El filtro óptimo receptor que da lugar a ese valor mínimo tiene como función de transferencia la dada por

$$|H_{R,\text{opt}}(f)|^2 = \frac{C |P(f)|}{|H_C(f)|}. \quad (3.27)$$

3. Usando las ecuaciones (3.27) y (3.19) se puede determinar el filtro óptimo de transmisión que tiene como función de transferencia la dada por

$$|H_{T,\text{opt}}(f)|^2 = \frac{K^2 |P(f)|}{C |G(f)|^2 |H_C(f)|}. \quad (3.28)$$

Las ecuaciones (3.27) y (3.28) definen la respuesta en amplitud al cuadrado de los filtros óptimos de transmisión y recepción que maximizan el valor de la SNR A^2/σ_N^2 en los instantes de muestreo para potencia de transmisión P constante. Estos filtros pueden tener una respuesta en fase arbitraria siempre que se compensen mutuamente. El valor máximo de la SNR A^2/σ_N^2 teniendo en cuenta las ecuaciones (3.20), (3.21) y (3.26) vendrá dado por

$$\left(\frac{A^2}{\sigma_N^2}\right)_{\text{máx}} = \frac{2T_b P}{N_0} \frac{1}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(f)|}{|H_C(f)|} df\right]^2} \quad (3.29)$$

y el valor mínimo de la probabilidad de error dado por

$$P_{e,\text{mín}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{A^2}{\sigma_N^2}\right)_{\text{máx}}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{T_b P}{N_0}} \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(f)|}{|H_C(f)|} df} \right). \quad (3.30)$$

Un caso particular de especial importancia en la práctica ocurre cuando la forma del pulso $g(t)$ antes del filtro de transmisión se elige de forma que su densidad espectral de energía $\Psi_g(f)$ dada por la ecuación (3.10) no cambie significativamente en la banda de frecuencias de interés. Entonces, excepto por un factor de escala, los filtros óptimos de transmisión y recepción tienen la misma respuesta en amplitud, según se deduce observando las ecuaciones (3.27) y (3.28). Si además se eligen los filtros de modo que tengan fase lineal, serían idénticos, por lo que sólo sería necesario diseñar un filtro en lugar de dos. En este caso cada filtro compensaría la *mitad* de la distorsión del canal y construiría la *mitad* del espectro del pulso $p(t)$ diseñado para evitar la ISI. Una forma sencilla de asegurar que la densidad espectral de energía $\Psi_g(f)$ del pulso $g(t)$ sea aproximadamente constante en la banda de interés consiste en hacer que $g(t)$ sea un pulso rectangular de amplitud unidad cuya duración sea pequeña comparada con la duración de bit T_b .

Capítulo 4

Codificación Correlativa o Señalización con Respuesta Parcial

Hemos tratado la ISI en el capítulo 2 como un efecto no deseable que da lugar a la degradación de las prestaciones del sistema. Su propio nombre indica que es algo a evitar. Sin embargo añadiendo ISI a la señal transmitida de forma controlada, es posible transmitir una señal de tasa $2B_T$ símbolos por segundo a través de un canal de ancho de banda B_T Hz. Este procedimiento se denomina **codificación correlativa** o *señalización con respuesta parcial*. El diseño de estos esquemas se basa en el hecho de que la ISI que se introduce en el transmisor es conocida, por lo que se va a poder interpretar la señal en el receptor de forma adecuada. La codificación correlativa puede considerarse como una forma de lograr la máxima tasa de señalización $2B_T$ símbolos por segundo en un canal de ancho de banda B_T Hz, como fue postulado por Nyquist, pero usando filtros realizables para los que además se permiten ciertas tolerancias.

4.1. Señalización Duobinaria

Vamos a ilustrar la idea básica de codificación correlativa mediante el caso particular de **señalización duobinaria**, donde **dúo** implica doblar la capacidad de un sistema binario simple.

Sea una secuencia binaria de entrada $\{b_k\}$ consistente en dígitos binarios incorrelados con duración de bit T_b segundos, con el símbolo 1 representado con un pulso de amplitud 1 y el símbolo 0 representado por un pulso de amplitud -1 . Cuando esta señal se aplica a la entrada de un codificador duobinario, se la convierte en una señal de salida con tres niveles: -2 , 0 y 2 . El esquema de este codificador se puede ver en la figura 4.1.

La secuencia $\{b_k\}$ se pasa a través de un filtro sencillo que contiene un elemento de retardo. Para cada impulso unitario de entrada aplicado a este filtro, se tiene a la salida dos impulsos unitarios separados T_b a la salida. Si llamamos c_k al símbolo de salida del codificador está relacionado con b_k a través de:

$$c_k = b_k + b_{k-1}, \quad (4.1)$$

es decir, al bit actual le estamos sumando el anterior. El efecto de esta codificación es cambiar la secuencia de entrada $\{b_k\}$ de dígitos binarios incorrelados con dos niveles por la secuencia $\{c_k\}$ de dígitos binarios correlados con tres niveles. Esta correlación entre los niveles adyacentes transmitidos puede verse como una ISI introducida por el codificador duobinario en la señal transmitida. Esta ISI está bajo el control del diseñador y es el fundamento de la codificación correlativa.

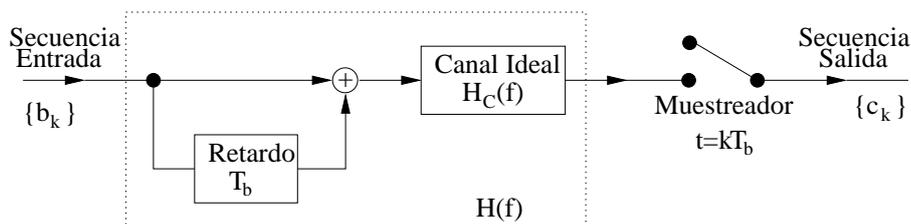


Figura 4.1: Esquema de un codificador duobinario.

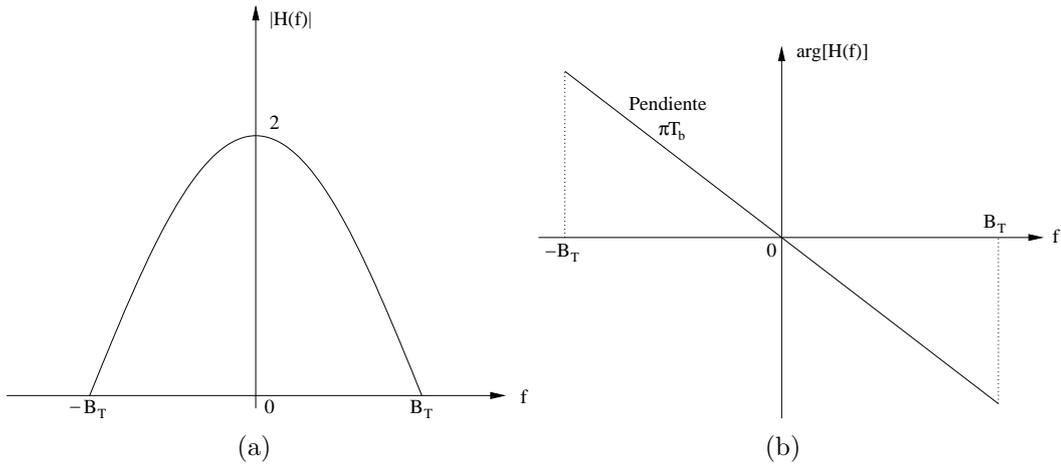


Figura 4.2: (a) Respuesta en amplitud y (b) respuesta en fase de la función de transferencia global $H(f)$ en el caso duobinario.

Un elemento de retardo T_b segundos ideal, tiene una función de transferencia $\exp(-j2\pi fT_b)$, de modo que la función de transferencia del filtro codificador es $1 + \exp(-j2\pi fT_b)$. La función de transferencia del filtro codificador en cascada con el filtro del canal $H_C(f)$ (o en su caso la conexión en cascada del filtro de transmisión $H_T(f)$, del canal $H_C(f)$ y del filtro de recepción $H_R(f)$) vendrá dado por

$$\begin{aligned} H(f) &= H_C(f)[1 + \exp(-j2\pi fT_b)] = H_C(f)[\exp(j\pi fT_b) + \exp(-j\pi fT_b)] \exp(-j\pi fT_b) \\ &= 2H_C(f) \cos(\pi fT_b) \exp(-j\pi fT_b) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para el caso ideal con $2T_bB_T = 1$ se tiene que $H_C(f)$ viene dado por

$$H_C(f) = \begin{cases} 1 & |f| < \frac{1}{2T_b} = B_T \\ 0 & \text{para el resto,} \end{cases} \quad (4.3)$$

entonces la función de transferencia global $H(f)$ tiene fase lineal y amplitud con forma de medio coseno según

$$H(f) = \begin{cases} 2 \cos(\pi fT_b) \exp(-j\pi fT_b) & |f| < \frac{1}{2T_b} = B_T \\ 0 & \text{para el resto.} \end{cases} \quad (4.4)$$

En la figura 4.2 podemos ver la gráfica de la respuesta en amplitud y en fase de este filtro.

La ventaja fundamental de este filtro es que no presenta discontinuidades y por lo tanto va a poder aproximarse fácilmente en la práctica. Se puede determinar de forma sencilla la respuesta al impulso global $h(t)$ correspondiente a la función de transferencia global $H(f)$. Salvo un factor de escala viene dada por

$$h(t) = \text{sinc}(2B_T t) + \text{sinc}[2B_T(t - T_b)] = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_b}\right) + \text{sinc}\left(\frac{t - T_b}{T_b}\right) = \frac{T_b^2 \sin(2\pi B_T t)}{\pi t(T_b - t)}. \quad (4.5)$$

En la figura 4.3 se puede ver esta respuesta al impulso gráficamente. Como se puede ver en dicha figura sólo tiene dos valores distintos de cero en los instantes de muestreo $t_i = iT_b$ correspondientes a $t = 0$ y $t = T_b$.

Los datos originales $\{b_k\}$ se pueden extraer de la secuencia duobinaria $\{c_k\}$ restando el dígito binario recibido previamente de c_k . Si \hat{b}_k es la estimación hecha por el receptor del dígito original b_k para $t = kT_b$, vendrá dada por

$$\hat{b}_k = c_k - \hat{b}_{k-1}. \quad (4.6)$$

Es evidente que si se ha detectado c_k sin error y si la estimación \hat{b}_{k-1} es correcta, el estimador \hat{b}_k será correcto. Esta técnica que estima un símbolo usando la estimación del símbolo anterior se denomina *decisión realimentada* (decision feedback).

El procedimiento de detección dado por la ecuación (4.6) es esencialmente el inverso de la operación realizada en el codificador del transmisor dado por la ecuación (4.1). Un inconveniente de este proceso de detección es que una vez que ocurre un error, este tiende a propagarse. Esto es debido a que la decisión en

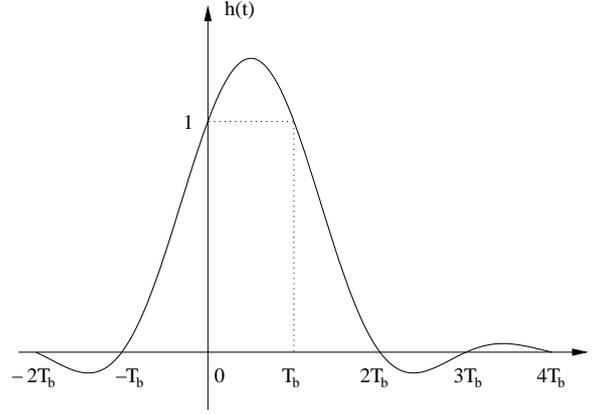
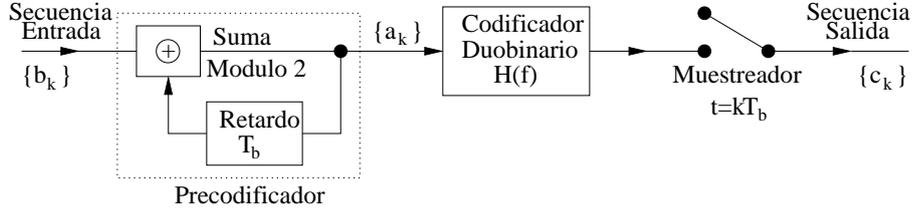
Figura 4.3: Respuesta al impulso global $h(t)$ en el caso duobinario.

Figura 4.4: Técnica de precodificación.

el bit actual depende de la decisión del bit anterior. Una forma práctica de evitar esta propagación de los errores cometidos es utilizar la técnica de precodificación según se puede ver en la figura 4.4 previamente al codificador duobinario. La operación de precodificación llevada a cabo en la secuencia de entrada $\{b_k\}$, la convierte en otra secuencia binaria $\{a_k\}$ definida por

$$a_k = b_k \oplus a_{k-1}, \quad (4.7)$$

donde el símbolo \oplus representa la suma módulo 2 de los dígitos b_k y a_{k-1} . Esta suma es equivalente a la operación **XOR** (OR exclusiva). Si uno de los dos operandos y sólo uno vale 1, la salida es 1, en caso contrario la salida es 0. La señal $\{a_k\}$ se aplica al codificador duobinario, dando lugar a la señal $\{c_k\}$ relacionada siguiendo la ecuación (4.1), pero en este caso usando la secuencia $\{a_k\}$ en lugar de $\{b_k\}$, es decir, se tiene ahora que

$$c_k = a_k + a_{k-1}. \quad (4.8)$$

Aunque la codificación duobinaria es una operación lineal (filtro lineal), la precodificación mediante XOR es una operación no lineal. Si representamos la secuencia $\{a_k\}$ a la salida del precodificador con un pulso de amplitud 1 para el símbolo 1 y un pulso de amplitud -1 para el símbolo 0, se puede demostrar que se cumple

$$c_k = \begin{cases} \pm 2 & \text{si } b_k \text{ es } 0 \\ 0 & \text{si } b_k \text{ es } 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

A partir de esta expresión, se puede deducir la regla

$$\hat{b}_k = \begin{cases} 0 & \text{si } |c_k| > 1 \\ 1 & \text{si } |c_k| < 1 \end{cases} \quad (4.10)$$

para el decisor del receptor, que permite estimar el símbolo \hat{b}_k a partir del símbolo recibido c_k . En la figura 4.5 se puede ver el esquema del decisor en este caso. Como se puede ver en esta figura la secuencia $\{c_k\}$ obtenida muestreando la señal recibida en $t = kT_b$ se pasa por un rectificador seguido de un decisor con umbral unitario obteniéndose la secuencia $\{\hat{b}_k\}$.

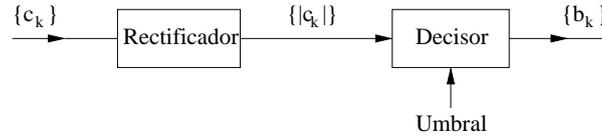


Figura 4.5: Esquema del decisor cuando se emplea precodificación en el transmisor.

instante k	0	1	2	3	4	5	6	7
bits $\{b_k\}$		0	0	1	0	1	1	0
bits $\{a_k\}$	1	1	1	0	0	1	0	0
amplitudes $\{a_k\}$	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
amplitudes $\{c_k\}$		2	2	0	-2	0	0	-2
bits $\{\hat{b}_k\}$		0	0	1	0	1	1	0

Tabla 4.1: Ejemplo de funcionamiento de la codificación duobinaria con precodificación.

Una característica muy importante del decisor de la figura 4.5 es que no es necesario utilizar muestras detectadas previamente para poder determinar la actual, como ocurría cuando no se empleaba precodificación y se empleaba la ecuación (4.6). Por tanto ahora no hay propagación de error.

En la tabla 4.1 podemos ver las diferentes secuencias y señales presentes a lo largo del sistema para cuando la secuencia de entrada es $\{b_k\} \equiv 0010110$. En este ejemplo se ha supuesto que el canal no introduce ruido y que o bien tampoco introduce ISI o bien ésta se ha compensado mediante los filtros de transmisión y recepción como vimos en el capítulo 3. Se ha supuesto también que el bit previo a_0 a la salida del precodificador antes de llegar la secuencia es 1.

4.2. Señalización Duobinaria Modificada

La técnica **duobinaria modificada** es muy similar a la duobinaria pero usando correlaciones con el bit anterior al previo, esto es a $2T_b$ segundos. En este caso se utilizarán retardos de $2T_b$ segundos en lugar de retardos de T_b segundos. Usando la técnica de precodificación el esquema completo se puede ver en la figura 4.6. Ahora se tiene que

$$c_k = a_k - a_{k-2}. \tag{4.11}$$

Esta ecuación es la que relaciona la secuencia $\{c_k\}$ a la salida del filtro duobinario modificado con la secuencia $\{a_k\}$ a su entrada. En este caso se emplea la resta en lugar de la suma del caso duobinario según la ecuación (4.8). De nuevo la secuencia $\{c_k\}$ tiene 3 niveles. En este caso, la secuencia $\{a_k\}$ se representa con un pulso de amplitud 1 para el símbolo 1 y un pulso de amplitud 0 para el símbolo 0 a la entrada del filtro duobinario modificado, dando lugar a los niveles -1, 0 y 1 para la secuencia $\{c_k\}$ a la salida del filtro.

La función global de transferencia $H(f)$ del filtro duobinario modificado conectado en cascada con $H_C(f)$

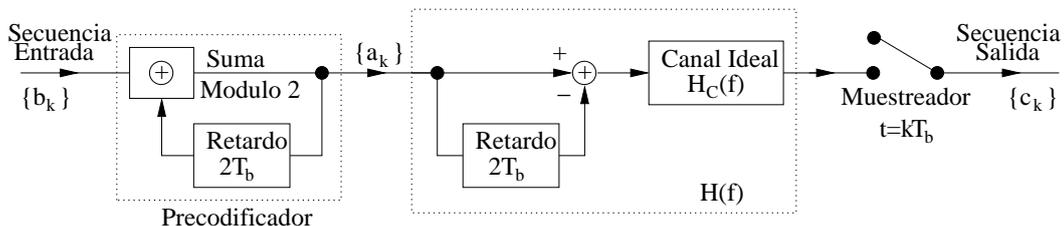


Figura 4.6: Esquema codificación duobinaria modificada empleando precodificación.

viene dada por

$$\begin{aligned} H(f) &= H_C(f)[1 - \exp(-j4\pi fT_b)] = H_C(f)[\exp(j2\pi fT_b) - \exp(-j2\pi fT_b)] \exp(-j2\pi fT_b) \\ &= 2jH_C(f) \sin(2\pi fT_b) \exp(-j2\pi fT_b). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Suponiendo que $H_C(f)$ sea un filtro ideal con ancho de banda B_T , con $2T_bB_T = 1$, dado por la ecuación (4.3), entonces la respuesta global del sistema duobinario modificado es un ciclo completo de un seno según

$$H(f) = \begin{cases} 2j \sin(2\pi fT_b) \exp(-j2\pi fT_b) & |f| < \frac{1}{2T_b} = B_T \\ 0 & \text{para el resto.} \end{cases} \quad (4.13)$$

En la figura 4.7 podemos ver la gráfica de la respuesta en amplitud y en fase de este filtro. Como se puede ver no presenta discontinuidades en frecuencia por lo que se va a poder aproximar de forma sencilla.

Una propiedad importante del codificador duobinario modificado que lo diferencia del caso duobinario es que la señal a la salida no presenta componente continua, ya que su respuesta en frecuencia es cero en el origen como puede verse en la figura 4.7. Esta propiedad es importante puesto que de hecho muchos canales en la práctica no puede transmitir componente continua.

Se puede comprobar fácilmente que, salvo por un factor de escala, la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema global viene dada por

$$h(t) = \text{sinc}(2B_T t) - \text{sinc}[2B_T(t - 2T_b)] = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_b}\right) - \text{sinc}\left(\frac{t - 2T_b}{T_b}\right) = \frac{2T_b^2 \sin(2\pi B_T t)}{\pi t(2T_b - t)}. \quad (4.14)$$

En la figura 4.8 se puede ver esta respuesta al impulso gráficamente. Como se puede ver en dicha figura sólo tiene dos valores distintos de cero en los instantes de muestreo $t_i = iT_b$ correspondientes a $t = 0$ y $t = 2T_b$

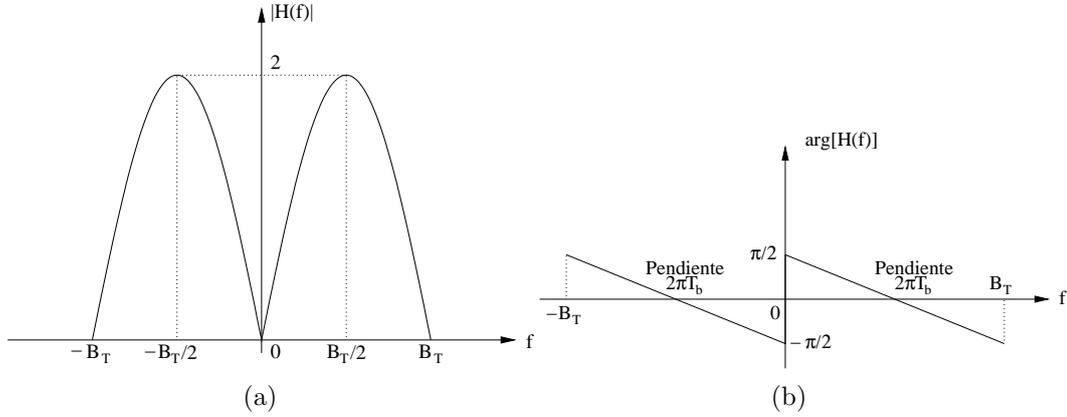


Figura 4.7: (a) Respuesta en amplitud y (b) respuesta en fase de la función de transferencia global $H(f)$ en el caso duobinario modificado.

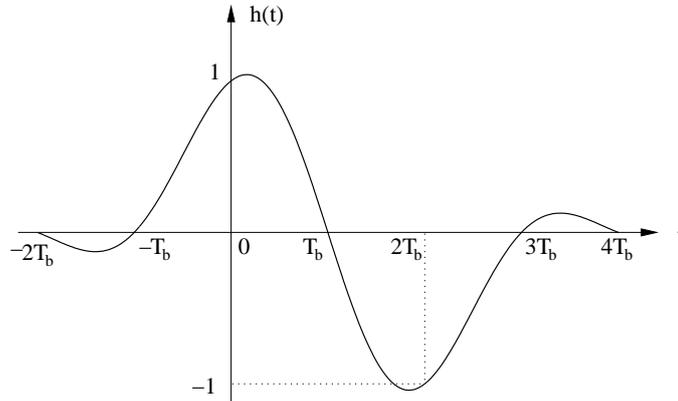


Figura 4.8: Respuesta al impulso global $h(t)$ en el caso duobinario modificado.

(con amplitud negativa en este segundo caso debido al signo menos que aparece en la ecuación (4.11) o en la figura 4.6).

Al igual que hicimos en el caso duobinario para evitar la propagación de errores, ahora en el sistema duobinario modificado podemos usar la misma técnica de precodificación. Antes del filtro duobinario modificado usamos la suma módulo 2 o el operador XOR (la suma y la resta módulo 2 son la misma operación) para determinar la secuencia $\{a_k\}$ a partir de la secuencia de entrada $\{b_k\}$. En este caso usamos un retardo de $2T_b$ como puede verse en la figura 4.6. La expresión

$$a_k = b_k \oplus a_{k-2} \tag{4.15}$$

nos relaciona la entrada y la salida del precodificador en este caso.

En cuanto a la regla del decisor, se puede comprobar que se puede recuperar $\{\hat{b}_k\}$ a partir de $\{c_k\}$ simplemente eliminando la polaridad de la secuencia $\{c_k\}$. La regla de decisión viene dada entonces por

$$\hat{b}_k = |c_k| = c_k \bmod 2. \tag{4.16}$$

4.3. Forma General de Codificación Correlativa

Las técnicas duobinaria y duobinaria modificada tienen ancho de correlación de 1 y 2 bits, respectivamente. De aquí podemos deducir una forma generalizada de este tipo de esquemas de codificación que se denominan **codificadores correlativos**. En la figura 4.9 podemos ver el esquema general de codificador correlativo, donde $H_C(f)$ es la respuesta ideal del canal o la conexión en cascada del filtro de transmisión, la respuesta del canal y del filtro de recepción.

Como se puede ver en la figura 4.9, el codificador es fundamentalmente un filtro transversal que tiene como salida la suma ponderada de versiones retardadas de la entrada. Esta ponderación viene fijada por un conjunto de pesos w_0, w_1, \dots, w_{N-1} . La ecuación

$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1} w_n b_{k-n} \tag{4.17}$$

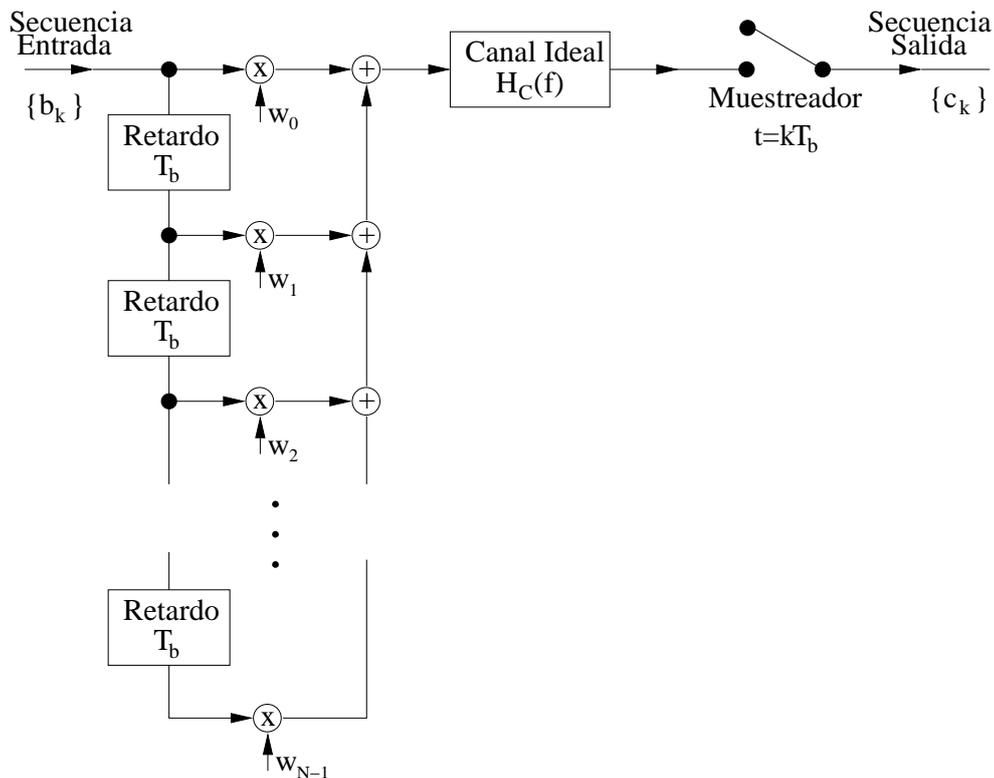


Figura 4.9: Esquema general de un codificador correlativo.

relaciona la secuencia de salida $\{c_k\}$ con la secuencia de entrada $\{b_k\}$ del codificador correlativo de la figura 4.9. Como se puede ver estamos superponiendo al bit actual los $N - 1$ bits anteriores. Eligiendo los pesos w_n de forma adecuada se obtienen los diferentes esquemas concretos de codificación correlativa. En particular:

- Para $w_0 = 1$, $w_1 = 1$ y $w_n = 0$ para $n > 1$ se tiene la codificación duobinaria.
- Para $w_0 = 1$, $w_1 = 0$, $w_2 = -1$ y $w_n = 0$ para $n > 2$ se tiene la codificación duobinaria modificada.

Capítulo 5

Sistemas Banda Base M-arios

En un sistema PAM binario, la señal de salida del generador de pulsos está formada por pulsos binarios, es decir, con dos valores de amplitud posibles. Por otro lado, en un sistema banda base PAM M -ario, la salida del generador de pulsos toma uno entre M niveles de amplitud posibles, con $M > 2$. En la figura 5.1 podemos ver un ejemplo de una señal PAM para el caso cuaternario, $M = 4$. En este caso los bits de entrada se agrupan de dos en dos y a cada par de bits se le asigna un nivel de amplitud determinado como se puede ver en la tabla que aparece en la figura 5.1.

En un sistema M -ario, la fuente de información genera una secuencia de símbolos pertenecientes a un alfabeto de tamaño M . Cada nivel de amplitud a la salida del generador de pulsos corresponde a un símbolo distinto de los M posibles, por lo que habrá M niveles de amplitud distintos.

Consideramos un sistema PAM M -ario con un alfabeto de M símbolos equiprobables e independientes. Sea T la duración de símbolo en segundos. La tasa de señalización R expresada en símbolos por segundo o **baudios** viene dada por

$$R = \frac{1}{T}. \quad (5.1)$$

Vamos a relacionar esta tasa de señalización con el sistema PAM binario equivalente para el cual $M = 2$. Supondremos en el sistema binario que los símbolos 1 y 0 son equiprobables e independientes, y con una duración de bit de T_b segundos. La tasa R_b de este sistema en bits por segundo (bps) viene dada por

$$R_b = \frac{1}{T_b}. \quad (5.2)$$

Para el ejemplo de la figura 5.1, el sistema era cuaternario, $M = 4$. En este caso se agrupaban los bits de dos en dos, por lo que un símbolo era equivalente a dos bits y por tanto 1 baudio equivalía a 2 bps. Vamos a generalizar este resultado para un caso M -ario general con M arbitrario. Se puede comprobar fácilmente que 1 símbolo es equivalente a $\log_2 M$ bits, por lo que 1 baudio equivale a $\log_2 M$ bps. En particular la tasa R y la tasa binaria R_b están relacionadas a través de

$$R = \frac{R_b}{\log_2 M} \quad (5.3)$$

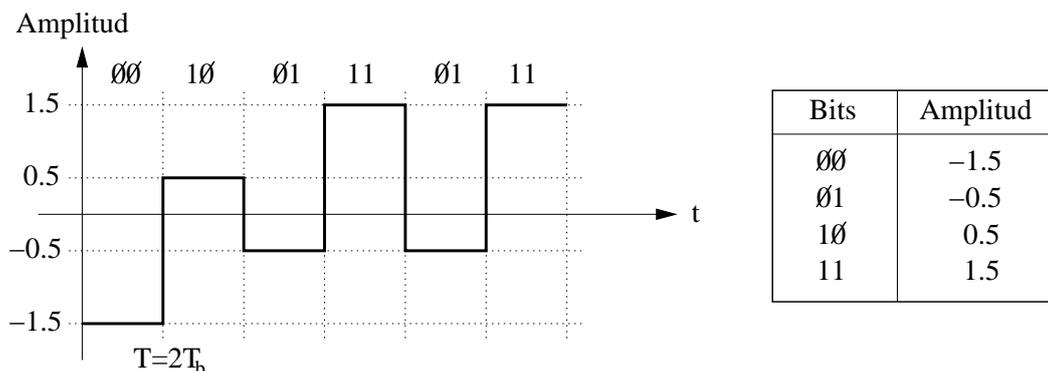


Figura 5.1: Ejemplo de señal PAM M -aria con $M = 4$.

y la duración de símbolo T y la duración de bit T_b a través de

$$T = T_b \log_2 M. \quad (5.4)$$

En un canal con un ancho de banda dado, se puede ver, según la ecuación (5.3), que pasar de un sistema binario a un sistema M -ario significa que podemos incrementar la tasa de transmisión por un factor de $\log_2 M$. Por otro lado, dada una tasa de información a transmitir pasar de un sistema binario a otro M -ario significa que el ancho de banda necesario se reduce en un factor de $\log_2 M$. Sin embargo, en ambos casos para mantener la calidad, esto es, mantener la misma probabilidad media de error, un sistema M -ario necesita una mayor cantidad de potencia de transmitida o equivalentemente tolera una cantidad menor de ruido presente en el canal de transmisión.

Si M es bastante mayor que 2 y la probabilidad media de error es arbitrariamente pequeña comparada con la unidad, el incremento de potencia transmitida (o equivalentemente la disminución de potencia de ruido introducido por el canal), con respecto al sistema binario, para mantener la calidad viene dado aproximadamente por

$$\frac{M^2}{\log_2 M}. \quad (5.5)$$

En un sistema M -ario, el generador de pulsos convierte la secuencia de símbolos emitida por la fuente de información (o equivalentemente la secuencia de símbolos obtenida tras agrupar los bits en grupos de $\log_2 M$ cuando la fuente es binaria como en el ejemplo analizado en la figura 5.1) en un tren de pulsos con M niveles. Este tren de pulsos pasa a través del filtro de transmisión y se transmite. El canal introducirá ruido y distorsión (ISI). En el receptor la señal recibida pasa a través del filtro de recepción y se muestrea en los instantes apropiados cada T segundos manteniendo el sincronismo con el transmisor. Finalmente, la señal tras el muestreador se pasa por el decisor que la comparará con $M - 1$ umbrales (slicing levels), elegidos de forma adecuada para minimizar la probabilidad media de error. La forma de los pulsos antes del muestreador deberá ser similar a la vista en el capítulo 2 para evitar la ISI. Para ello se deben diseñar los filtros de transmisión y recepción de forma adecuada. Estos filtros deben además minimizar el efecto del ruido garantizando una probabilidad media de error mínima como vimos en el capítulo 3. Estos procedimientos serán similares a los vistos pero extendidos para un valor de M arbitrario. El análisis en detalle de los mismos es más complicado que el visto para el caso binario, por lo que no se verá aquí, pero la idea de diseño sigue siendo la misma que en el caso binario. Cualquier error de diseño dará lugar a que la ISI, el ruido y los errores de sincronización empeoren la calidad del sistema, esto es, aumenten la probabilidad media de error.

Capítulo 6

Filtro Adaptado

Vamos a ver ahora un análisis alternativo al visto en el capítulo 3 usando una técnica conocida con el nombre de **filtro adaptado**. Esta técnica permite resolver el problema de la detección de un pulso transmitido con forma conocida a través de un canal que está fundamentalmente limitado por el ruido. Supondremos por ahora que el canal no introduce distorsión (ISI). En particular, vamos a considerar un sistema de transmisión como el que se puede ver en la figura 6.1. El objetivo va a ser diseñar la respuesta al impulso $h(t)$ del filtro adaptado para minimizar el efecto del ruido tras el muestreador (para $t = T$) cuando se conoce la forma del pulso transmitido $g(t)$. Vamos a suponer que este pulso comienza en $t = 0$ y que tiene una duración T . T puede considerarse como el periodo de observación. El pulso transmitido $g(t)$ representará en general al símbolo 1 o al símbolo \emptyset en el caso de una transmisión binaria.

La señal a la entrada del filtro según se puede ver en la figura 6.1 viene dada por

$$x(t) = g(t) + w(t) \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6.1)$$

$w(t)$ es la señal ruidosa que se suma a nuestro pulso transmitido a lo largo del canal de comunicaciones. Es un proceso de ruido blanco, con media cero y densidad espectral de potencia $N_0/2$. Puesto que suponemos que el filtro adaptado es lineal e invariante en el tiempo la señal a su salida $y(t)$ se puede descomponer en componente de señal y ruido según

$$y(t) = g_0(t) + n(t) \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6.2)$$

siendo $g_0(t)$ la versión filtrada del pulso $g(t)$ y $n(t)$ la versión filtrada del ruido $w(t)$. $n(t)$ ya no es un ruido blanco pero sigue teniendo media cero.

Según vimos en el capítulo 3 minimizar la probabilidad media de error es equivalente a maximizar la SNR tras el muestreador (a la entrada por tanto del decisor). En este caso la SNR (que podríamos llamar de pico o para $t = T$) viene dada por

$$\eta = \frac{|g_0(T)|^2}{\sigma_N^2}, \quad (6.3)$$

donde σ_N^2 es la varianza o potencia del ruido filtrado $n(t)$. El objetivo entonces es determinar aquella respuesta al impulso $h(t)$ que de lugar a un valor de SNR de pico η máximo.

Sea $G(f)$ la transformada de Fourier del pulso $g(t)$ y $H(f)$ la función de transferencia del filtro adaptado. Entonces se cumple

$$g_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)G(f) \exp(j2\pi ft)df. \quad (6.4)$$

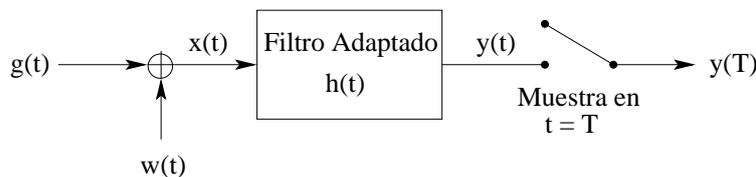


Figura 6.1: Esquema de un sistema de transmisión limitado por ruido que emplea detección mediante filtro adaptado.

Si ahora muestreamos la señal a la salida del filtro en $t = T$ se tiene

$$|g_0(T)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)G(f) \exp(j2\pi fT) df \right|^2. \quad (6.5)$$

Ahora con respecto al ruido, la densidad espectral de potencia $S_N(f)$ del ruido $n(t)$ a la salida del filtro viene dada por

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2, \quad (6.6)$$

por lo que la potencia de ruido (o la varianza) σ_N^2 viene dada por

$$\sigma_N^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df. \quad (6.7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (6.6) y (6.7) en la ecuación (6.3), se tiene que

$$\eta = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)G(f) \exp(j2\pi fT) df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \quad (6.8)$$

para la SNR de pico η . Nuestro problema ahora es, dado $G(f)$, determinar la función de transferencia del filtro adaptado $H(f)$ que maximice la SNR de pico η . Para resolver este problema vamos a utilizar la desigualdad de Schwarz de forma similar a como lo hicimos en el capítulo 3, pero en este caso usando la versión compleja. Sean $U(f)$ y $V(f)$ dos funciones complejas arbitrarias de variable real, entonces se cumple siempre que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} U(f)V(f) df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |U(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df. \quad (6.9)$$

En la ecuación (6.9) el término de la izquierda siempre es menor o igual que el término de la derecha, por lo que alcanzará su valor máximo cuando se satisfaga la igualdad, cosa que ocurre cuando

$$U(f) = kV^*(f), \quad (6.10)$$

siendo k una constante arbitraria y donde el asterisco indica conjugación. Si definimos

$$U(f) = H(f) \quad (6.11)$$

$$V(f) = G(f) \exp(j2\pi fT), \quad (6.12)$$

entonces la ecuación (6.9) se transforma en

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)G(f) \exp(j2\pi fT) df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df, \quad (6.13)$$

por lo que sustituyendo el numerador de la ecuación (6.8) obtenemos la desigualdad dada por

$$\eta \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \frac{2E}{N_0} \quad (6.14)$$

para la SNR de pico η , donde E es la energía del pulso $g(t)$. Como se puede ver el término de la derecha de la ecuación (6.14) no depende de la función de transferencia del filtro adaptado $H(f)$, sólo depende de la energía E del pulso y de la densidad espectral de potencia N_0 del ruido del canal.

La SNR η dada por la ecuación (6.14) alcanzará su valor máximo cuando se cumpla la igualdad en dicha ecuación cosa que ocurre cuando se satisface la ecuación (6.10). Teniendo en cuenta las definiciones hechas a través de las ecuaciones (6.11) y (6.12), la función de transferencia óptima $H_{\text{opt}}(f)$ vendrá dada por

$$H_{\text{opt}}(f) = kG^*(f) \exp(-j2\pi fT). \quad (6.15)$$

En este caso la SNR de pico alcanza su valor máximo $\eta_{\text{máx}}$ por lo que se tiene

$$\eta_{\text{máx}} = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \frac{2E}{N_0} \quad (6.16)$$

La ecuación (6.15) nos dice que excepto por el factor $k \exp(-j2\pi fT)$, la función de transferencia del filtro adaptado óptima viene dada por el conjugado del espectro del pulso, $G^*(f)$. Para determinar la respuesta al impulso óptima $h_{\text{opt}}(t)$ del filtro adaptado, podemos tomar la transformada inversa de Fourier de la ecuación (6.15) según

$$h_{\text{opt}}(t) = k \int_{-\infty}^{\infty} G^*(f) \exp[-j2\pi f(T-t)] df. \quad (6.17)$$

Puesto que el pulso $g(t)$ es real se cumple la propiedad de simetría conjugada en frecuencia, $G^*(f) = G(-f)$, por lo que se tiene finalmente que

$$h_{\text{opt}}(t) = k \int_{-\infty}^{\infty} G(-f) \exp[-j2\pi f(T-t)] df = kg(T-t). \quad (6.18)$$

La ecuación (6.18) nos dice que excepto por la constante k la respuesta al impulso del filtro adaptado es una versión dada la vuelta y retrasada en el tiempo del pulso $g(t)$, esto es, el filtro está **adaptado** a la señal, de ahí el nombre que se le da. Para llegar a este resultado la única suposición que hemos hecho con respecto al ruido introducido por el canal es que sea estacionario, blanco, aditivo, con media cero y densidad espectral de potencia $N_0/2$.

El resultado más importante en los sistemas que emplean la técnica de filtro adaptado se puede enunciar de la siguiente forma: **la SNR de pico a la salida del filtro adaptado sólo depende del cociente entre la energía de la señal para la que se ha diseñado el filtro y la densidad espectral de potencia del ruido blanco a la entrada.**

Si $G_0(f)$ es la transformada de Fourier de $g_0(t)$ vendrá dada por

$$G_0(f) = H_{\text{opt}}(f)G(f) = kG^*(f)G(f) \exp(-j2\pi fT) = k|G(f)|^2 \exp(-j2\pi fT). \quad (6.19)$$

Tomando la transformada inversa de Fourier y para $t = T$ se tiene que

$$g_0(T) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(f) \exp(j2\pi fT) df = k \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = kE, \quad (6.20)$$

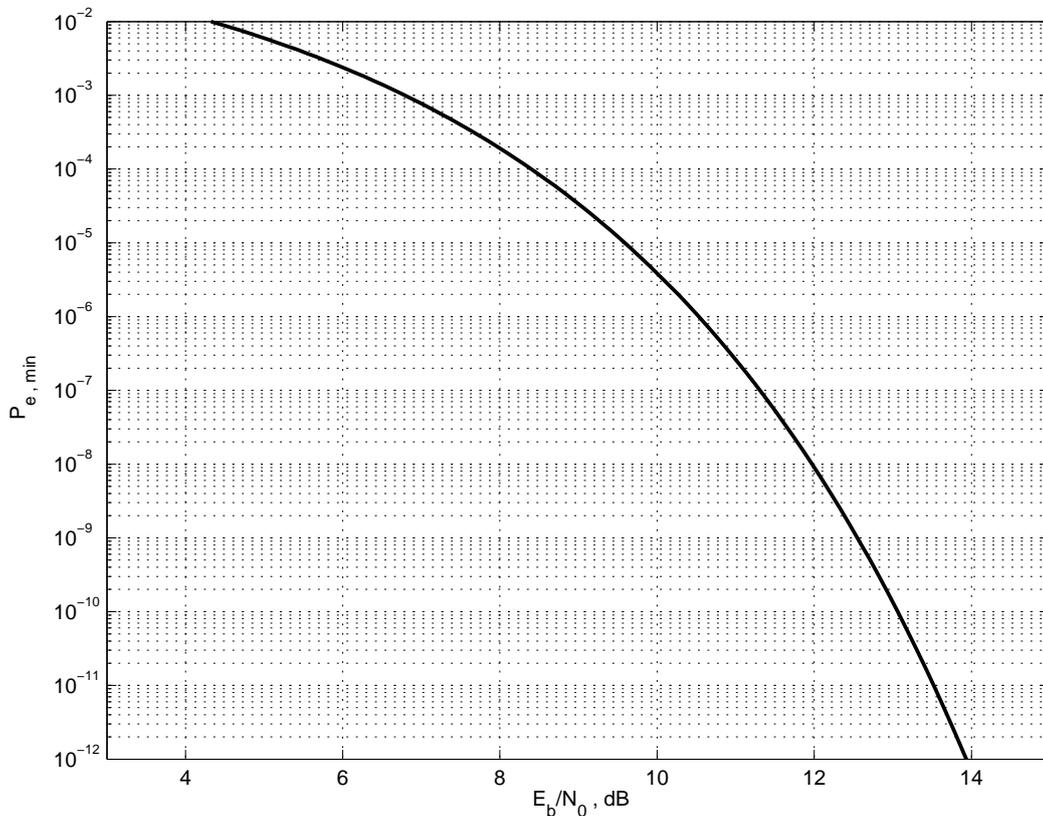


Figura 6.2: Probabilidad media de error mínima como función de la relación adimensional E_b/N_0 en un sistema binario que emplea filtro adaptado.

siendo E la energía del pulso $g(t)$. Haciendo lo mismo para la varianza del ruido a la salida del filtro, se tiene

$$\sigma_N^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\text{opt}}(f)|^2 df = \frac{k^2 N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \frac{k^2 N_0 E}{2}. \quad (6.21)$$

Finalmente, usando la ecuación (6.3) el valor $\eta_{\text{máx}}$ viene dado por

$$\eta_{\text{máx}} = \frac{(kE)^2}{\frac{k^2 N_0 E}{2}} = \frac{2E}{N_0}. \quad (6.22)$$

De esta ecuación se puede ver que el filtro adaptado a eliminado completamente la dependencia con respecto a la forma del pulso $g(t)$. De aquí se puede deducir que todas las señales con igual energía E son igualmente efectivas de cara a combatir el ruido.

La cantidad E/N_0 es adimensional y es la que caracteriza la calidad del sistema. Vamos a suponer un sistema binario que emplea la técnica de filtro adaptado en el receptor. El generador de pulsos envía un pulso positivo $g(t)$ para representar el símbolo 1 y un pulso negativo $-g(t)$ para representar el símbolo \emptyset . El filtro del receptor está adaptado al pulso $g(t)$. El valor $g_0(T)$ es según la ecuación (6.20) kE_b (E_b indica ahora energía por bit) para cuando se envía $g(t)$ y será $-kE_b$ cuando se envía $-g(t)$ por lo que la SNR de pico viene dada en cualquier caso por la ecuación (6.22). Si tras el muestreador se usa un decisor que emplee como umbral 0, se puede comprobar fácilmente que la probabilidad media de error mínima (debido a que el filtro adaptado es óptimo) viene dada por

$$P_{e,\text{mín}} = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \eta_{\text{máx}}} \right) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right), \quad (6.23)$$

por lo que hemos comprobado como afirmábamos que la calidad del sistema viene fijada por la relación adimensional E_b/N_0 . En la figura 6.2 podemos ver gráficamente esta probabilidad de error como función de dicha relación adimensional. Como se puede ver un ligero incremento de esta relación va a resultar en la inmunidad de nuestro sistema frente al ruido.

Capítulo 7

Diagrama de Ojos

Un modo práctico de estudiar el efecto de la distorsión (ISI) y el ruido en un sistema de transmisión digital en banda base consiste en aplicar la señal recibida (filtrada) antes del muestreador a las placas de deflexión vertical de un osciloscopio y una señal con forma de dientes de sierra a la tasa de señalización R en sincronismo con la señal recibida a las placas de deflexión horizontal. De esta manera todas los símbolos recibidos se superponen en la pantalla del osciloscopio en un único periodo de símbolo. El diagrama observado se denomina **diagrama de ojos** por su similitud con el ojo humano. La región interior del ojo se denomina **apertura del ojo** y su forma va a condicionar la calidad del sistema.

En la figura 7.1 podemos ver un ejemplo de una señal binaria recibida (los primeros 8 bits) y filtrada para un canal que introduce ruido y distorsión. En la figura 7.2 podemos ver su diagrama de ojos (para 160 bits). Dicho diagrama va a permitir determinar entre otras cosas el mejor instante de muestreo, el margen

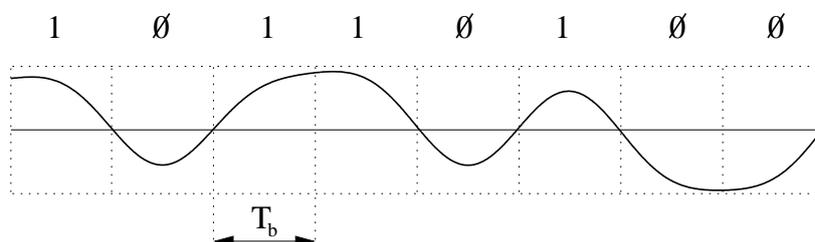


Figura 7.1: Detalle de una señal binaria antes del muestreador.

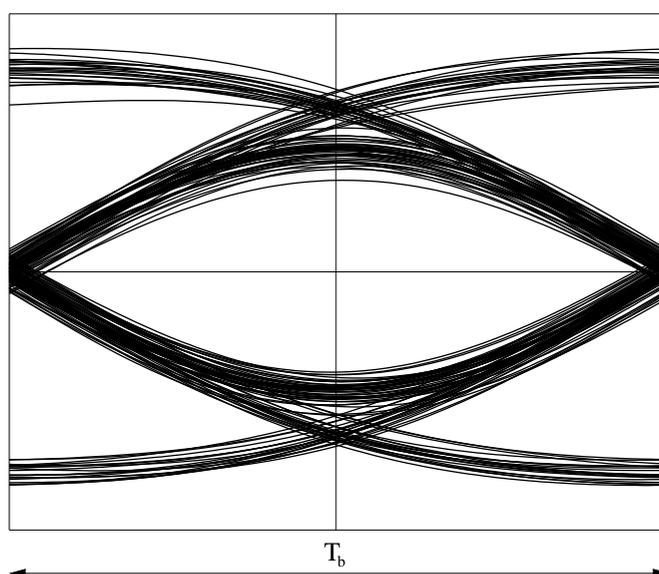


Figura 7.2: Diagrama de ojos para la señal de la figura 7.1.

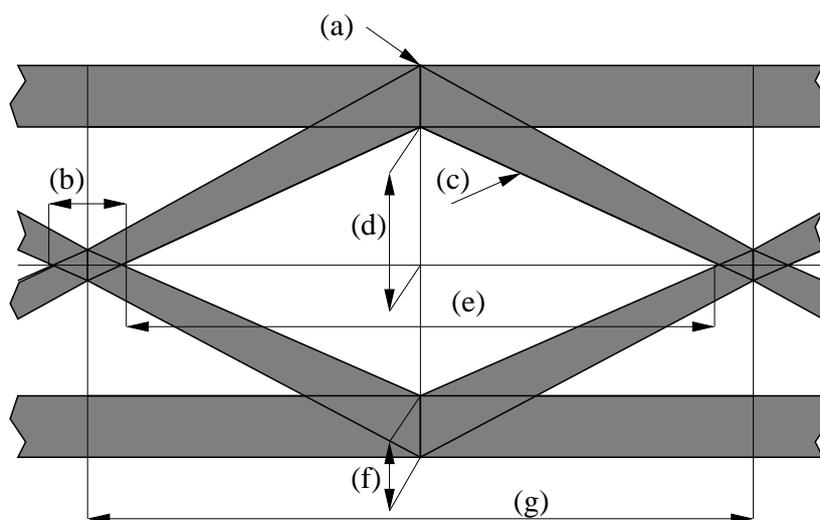


Figura 7.3: Parámetros de interés del diagrama de ojos. (a) Mejor instante de muestreo. (b) Distorsión del cruce por cero. (c) La pendiente es la sensibilidad a errores de temporización. (d) Margen sobre el ruido. (e) Intervalo temporal en el que se puede muestrear. (f) Distorsión en el instante de muestreo. (g) Período de bit T_b .

sobre el ruido, la distorsión en el instante de muestreo y la sensibilidad frente a errores de temporización como veremos a continuación.

Un diagrama de ojos va a proporcionar mucha información práctica sobre las prestaciones del sistema. En la figura 7.3 podemos ver esquemáticamente un diagrama de ojos con los principales parámetros asociados. Los más interesantes son:

1. El ancho de la apertura del ojo indica el intervalo de tiempo durante el que se puede muestrear sin error. Como es evidente el mejor instante de muestreo corresponderá a aquel instante temporal para el que la apertura del ojo es mayor.
2. La sensibilidad frente a errores de temporización se puede determinar por la velocidad (pendiente de la zona interior del ojo) a la que se cierra el ojo según variamos el instante de muestreo.
3. La altura de la apertura del ojo define el margen sobre el ruido para un valor dado del instante de muestreo.

En la figura 7.3 también aparecen definidos otros parámetros como son la distorsión en el instante de muestreo y la distorsión del cruce por cero.

Cuando el efecto conjunto de la ISI y del ruido es muy grande, la traza superior e inferior del ojo se cruzan, dando como resultado que el ojo se cierre. En esta situación es imposible evitar errores, por lo que el sistema no será inmune frente al ruido y la ISI.

En el caso que el sistema sea M -ario con $M > 2$, se puede realizar el mismo procedimiento que para el caso binario obteniéndose un diagrama de ojos con $M - 1$ ojos dispuestos en posición vertical. Para que el sistema pueda tener inmunidad frente al ruido todos los ojos deben estar abiertos. En un sistema estrictamente lineal y con símbolos independientes y equiprobables se debe observar una simetría de los ojos con respecto al ojo central. En la práctica se suelen observar ciertas asimetrías debido fundamentalmente a no linealidades del canal.