
TRANSMISIÓN DIGITAL PASO BANDA.

Marcos Martín Fernández
E. T. S. de Ingenieros de Telecomunicación
Universidad de Valladolid.

CONTENIDOS

INDICE DE FIGURAS	vii
1. MODELO DE UN SISTEMA DE TRANSMISIÓN DIGITAL PASO BANDA.	1
2. PROCEDIMIENTO DE ORTONORMALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT.	5
3. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE SEÑALES.	11
4. RESPUESTA DE UN BANCO DE CORRELADORES A ENTRADA RUIDOSA.	13
5. DETECCIÓN COHERENTE DE SEÑALES EN LA PRESENCIA DE RUIDO.	17
5.1. Decisor Máximo a Posteriori.	18
5.2. Decisor de Máxima Verosimilitud.	20
5.3. Probabilidad de Error.	22
6. RECEPTOR CORRELADOR.	23
7. RECEPTOR CON FILTRO ADAPTADO.	25
7.1. Maximización de la Relación Señal a Ruido a la Salida.	26
7.2. Propiedades de los Filtros Adaptados.	28
8. TÉCNICAS DE CODIFICACIÓN COHERENTE.	31
8.1. BPSK Coherente.	31
8.2. BFSK Coherente.	35
8.3. Propiedades Espectrales de BFSK y BPSK.	39
9. TÉCNICAS DE SEÑALIZACIÓN M-ARIA.	43
9.1. MPSK Coherente.	43
9.2. MFSK Coherente.	44
10. DETECCIÓN DE SEÑALES CON FASE ALEATORIA	47
11. DETECCIÓN NO COHERENTE DE BFSK.	51
12. COMPARACIÓN DE CALIDAD DE LOS SISTEMAS VISTOS.	55

INDICE DE FIGURAS

Capítulo 1

- 1.1. Esquema de un sistema de transmisión digital paso banda. 1
- 1.2. Ejemplo de señales ASK, FSK y PSK para el caso binario. 2
- 1.3. Modelo de canal AWGN empleado. 3

Capítulo 2

- 2.1. Síntesis de la señal $s_i(t)$ a partir de los coeficientes s_{ij} . 6
- 2.2. Análisis de la señal $s_i(t)$ para obtener los coeficientes s_{ij} . 7

Capítulo 3

- 3.1. Ejemplo de representación geométrica de $M = 3$ señales en una base con $N = 2$ funciones ortonormales. 12

Capítulo 4

Capítulo 5

- 5.1. Representación en el espacio de señal de los puntos de señal transmitida \mathbf{s}_i y recibida \mathbf{x} , junto con el vector de ruido \mathbf{w} . 18
- 5.2. Ejemplo de las regiones en las que se divide el espacio de señal para $M = 4$ símbolos con igual energía E y espacio de señal con $N = 2$ dimensiones. 21

Capítulo 6

- 6.1. Detector mediante banco de correladores. 23
- 6.2. Receptor de vectores para regla MAP y ML. 24

Capítulo 7

- 7.1. Detector mediante banco de filtros adaptados. 26
- 7.2. Configuración empleada para determinar la respuesta al impulso que maximiza la relación señal a ruido a la salida. 27

Capítulo 8

- 8.1. Regiones en las que queda dividido el espacio de señal para BPSK. 32
- 8.2. Esquema del transmisor de BPSK. 34
- 8.3. Esquema del receptor de BPSK empleando un correlador. 34
- 8.4. Esquema del receptor de BPSK empleando un filtro adaptado. 34
- 8.5. Regiones en las que queda dividido el espacio de señal para BFSK. 36
- 8.6. Esquema del transmisor de BFSK. 38
- 8.7. Esquema del receptor de BFSK empleando correladores. 38
- 8.8. Esquema del receptor de BFSK empleando filtros adaptados. 39
- 8.9. Densidades espectrales banda base para BPSK y BFSK fase continua. 41

Capítulo 9**Capítulo 10**

- 10.1. Detector en cuadratura no coherente que elimina la dependencia con respecto a la fase aleatoria θ en la señal a su salida. 48
- 10.2. Detector en cuadratura no coherente alternativo que emplea filtros adaptados en lugar de correladores. 48
- 10.3. Tercera forma alternativa para el detector en cuadratura no coherente. 49

Capítulo 11

- 11.1. Receptor en cuadratura no coherente para BFSK. 51

Capítulo 12

- 12.1. Comparación de la probabilidad de error media para BPSK coherente, BFSK coherente y BFSK no coherente como función de E_b/N_0 . 55

MODELO DE UN SISTEMA DE TRANSMISIÓN DIGITAL PASO BANDA.

Cuando se necesita transmitir datos por un canal paso banda es necesario modular los datos mediante una portadora normalmente sinusoidal con restricciones en frecuencia impuestas por el canal. En cualquier caso modular de forma digital significa conmutar la amplitud, la frecuencia o la fase de la portadora de acuerdo con los datos. Va a haber tres técnicas básicas de modulación: **ASK** (Amplitude Shift Keying), **FSK** (Frequency Shift Keying) y **PSK** (Phase Shift Keying).

FSK y PSK tienen la envolvente constante. Esto hace que funcionen bien frente a no linealidades. En general FSK y PSK se utilizan mucho más que ASK. Nos centraremos en FSK y PSK. Vamos a estudiar el diseño del receptor de modo que se cometan el menor número de errores posible y el cálculo de la probabilidad de error medio.

En la figura 1.1 podemos ver el esquema general de un sistema de transmisión digital paso banda. La fuente de información emite símbolos de duración T segundos. El alfabeto utilizado por esta fuente consiste en M símbolos denotados por m_1, m_2, \dots, m_M . En el caso binario estos símbolos son \emptyset y 1. En cualquier caso se conocen las probabilidades *a priori* $p(m_1), p(m_2), \dots, p(m_M)$ que especifican la salida de la fuente de información.

Vamos a suponer en principio que los símbolos emitidos por la fuente son equiprobables, por lo que se cumple la ecuación (1.1).

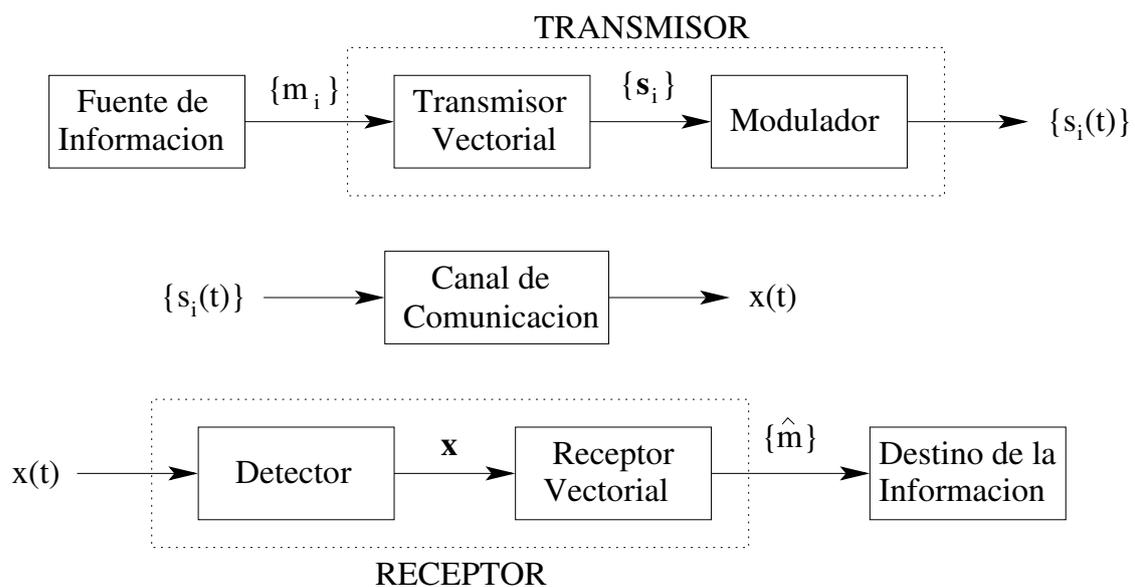


Figura 1.1 Esquema de un sistema de transmisión digital paso banda.

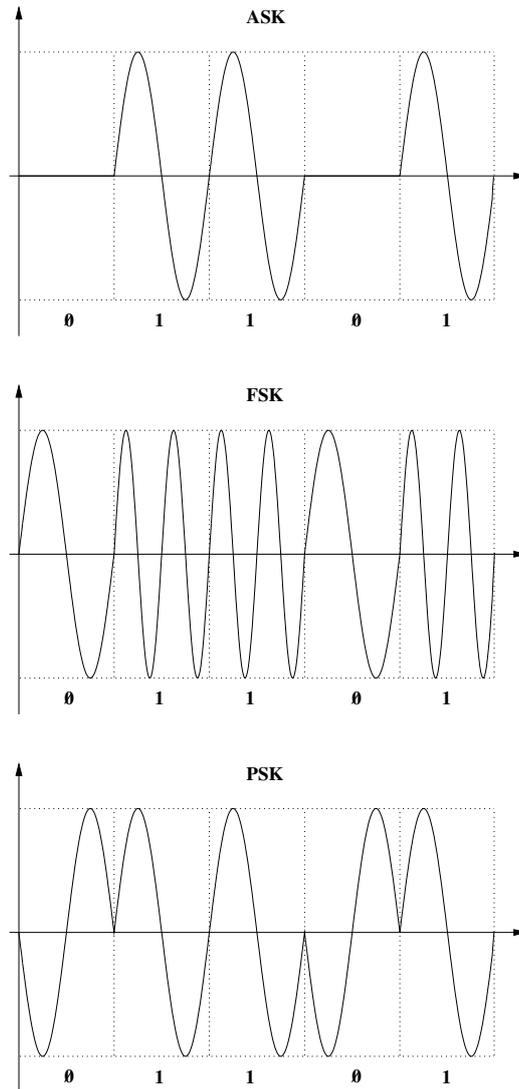


Figura 1.2 Ejemplo de señales ASK, FSK y PSK para el caso binario.

$$p_i = p(m_i) = \frac{1}{M} \quad \text{para } 1 \leq i \leq M \quad (1.1)$$

La salida de la fuente pasa a través del transmisor vectorial que genera un vector de números reales. En particular, cuando el símbolo de entrada al transmisor vectorial es m_i el vector de salida generado \mathbf{s}_i , con $1 \leq i \leq M$, viene dado por la ecuación (1.2), donde la dimensión de este vector cumple que $N \leq M$.

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \\ \vdots \\ s_{iN} \end{bmatrix} \quad \text{para } 1 \leq i \leq M \quad (1.2)$$

A partir de los vectores \mathbf{s}_i generados para los símbolos m_i el modulador construye la señal $s_i(t)$ de duración T segundos a su salida. La señal $s_i(t)$ tiene una energía E_i finita que va a venir dada por la ecuación (1.3).

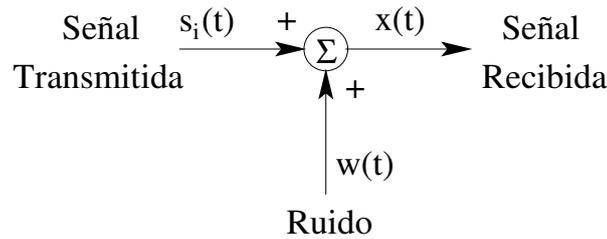


Figura 1.3 Modelo de canal AWGN empleado.

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt \quad \text{para } 1 \leq i \leq M \quad (1.3)$$

La señal $s_i(t)$ generada por el modulador es una señal real que se transmite durante T segundos. Las señales transmitidas cada periodo de símbolo T dependen únicamente de la entrada proporcionada por la fuente en dicho periodo T y posiblemente de las entradas en los periodos precedentes (o equivalentemente de las señales transmitidas en los periodos precedentes).

Para portadora sinusoidal, lo que distingue en el modulador las señales generadas para los diferentes símbolos es la amplitud, la frecuencia o la fase de las mismas. En la figura 1.2, podemos ver un ejemplo de señales ASK, FSK y PSK para el caso binario ($M = 2$). Como se puede ver en dicha figura sí es posible distinguir visualmente las señales FSK y PSK a diferencia de los casos analógicos FM y PM que eran visualmente indistinguibles.

El canal de comunicaciones entre el transmisor y receptor tiene las siguientes características:

- Es lineal con un ancho de banda suficiente como para acomodar la señal a la salida del modulador, las señales $s_i(t)$, sin distorsión o con una distorsión no apreciable.
- La señal transmitida viene perturbada a lo largo del canal con un proceso de ruido $W(t)$ que es aditivo, Gaussiano, blanco, de media cero y estacionario. Esta aproximación simplifica considerablemente los cálculos y se acerca bastante a la realidad.

Este tipo de canal se denomina **canal AWGN** (Additive White Gaussian Noise).

El proceso aleatorio $X(t)$ que representa a la señal recibida viene dado por la ecuación (1.4), cuando se transmitió el símbolo m_i . Podríamos considerar al canal dado por el modelo que se puede ver en la figura 1.3.

$$X(t) = s_i(t) + W(t) \quad \text{para } 1 \leq i \leq M \text{ y para } 0 \leq t \leq T \quad (1.4)$$

Según se puede ver en la figura 1.1 el receptor tiene encomendada la tarea de observar la función muestra $x(t)$ recibida del proceso $X(t)$ durante T segundos de cara a hacer la mejor estimación de la señal transmitida $s_i(t)$ o equivalentemente del símbolo transmitido m_i . Esto se va a hacer en dos etapas:

- A partir de la muestra $x(t)$ del proceso recibido $X(t)$ el detector obtiene un vector muestra \mathbf{x} , dado por la ecuación (1.5), del vector de variables aleatorias \mathbf{X} con N componentes.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

- A partir del vector muestra \mathbf{x} y del conocimiento de los vectores transmitidos \mathbf{s}_i para $1 \leq i \leq M$ y de las probabilidades *a priori* $p(m_i)$ para $1 \leq i \leq M$, el receptor vectorial produce una estimación \hat{m} del símbolo transmitido m_i .

Debido a la presencia del ruido a la entrada del receptor se pueden cometer errores durante el proceso de decisión llevado a cabo en el receptor vectorial. El criterio óptimo de diseño del receptor será entonces aquel que minimice la presencia de dichos errores, es decir, hay que minimizar la probabilidad de error promedio dada por la ecuación (1.6), siendo m_i el símbolo transmitido. Si seguimos este criterio de diseño podremos decir que el receptor es óptimo en el sentido de mínima probabilidad de error promedio.

$$p_e = p(\hat{m} \neq m_i) \quad (1.6)$$

Vamos a suponer siempre que el receptor está sincronizado con el transmisor a nivel de símbolo, lo que significa que el receptor sabe los instantes temporales de cambio de símbolo o cambio de estado de modulación. En algunos casos también se va a suponer que el receptor está en sincronismo de fase con el transmisor. En este caso se dice que el receptor emplea **detección coherente** y que el receptor es coherente. En caso contrario se dice que la **detección es no coherente** y el receptor será no coherente.

El modelo descrito nos da la base para poder realizar el diseño del receptor óptimo. Vamos a dar a continuación una interpretación geométrica del conjunto de señales $\{s_i(t)\}$ usadas por el modulador que simplifica en gran medida el diseño de receptores óptimos.

PROCEDIMIENTO DE ORTONORMALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT.

El proceso por el cual los símbolos m_i se transforman en las señales moduladas $s_i(t)$ se puede dividir en operaciones discretas en tiempo y operaciones continuas en tiempo. La justificación de esta separación nos la da el **procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt**, que permite la representación de cualquier conjunto de M señales de energía $\{s_i(t)\}$, como combinación de N funciones base ortonormales, con $N \leq M$.

Se pueden representar las señales de energía $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$, todas ellas de duración T , según la ecuación (2.1), donde los coeficientes de esta expansión están definidos por la ecuación (2.2).

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N s_{ij} \phi_j(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \text{ y para } 1 \leq i \leq M \quad (2.1)$$

$$s_{ij} = \int_0^T s_i(t) \phi_j(t) dt \quad \text{para } 1 \leq i \leq M \text{ y para } 1 \leq j \leq N \quad (2.2)$$

Las funciones reales de energía $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)$ tienen duración T y forman una base ortonormal, es decir, se cumple la ecuación (2.3).

$$\int_0^T \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) nos dice que la energía de las funciones $\phi_j(t)$ es unidad y además que las funciones $\phi_j(t)$ son ortogonales entre sí en el intervalo $0 \leq t \leq T$. Dado el conjunto de coeficientes $\{s_{ij}\}$ para $1 \leq j \leq N$ como entrada, se pueden obtener las señales $s_i(t)$ para $1 \leq i \leq M$ usando la ecuación (2.1) o equivalentemente el esquema de la figura 2.1. La síntesis de $s_i(t)$ a partir de los coeficientes s_{ij} consiste en N multiplicadores de dos entradas (cada uno de ellos multiplica el coeficiente s_{ij} por el elemento de la base $\phi_j(t)$ correspondiente) y un sumador con N entradas. Este esquema observando la figura 1.1 desempeña el papel del modulador en el transmisor.

Dadas las señales $\{s_i(t)\}$ para $1 \leq i \leq M$ como entrada, se pueden calcular los coeficientes $\{s_{ij}\}$ para $1 \leq j \leq N$ usando la ecuación (2.2) o equivalentemente el esquema de la figura 2.2. Este esquema consiste en un banco de N correladores con las funciones base $\phi_j(t)$ con entrada común $s_i(t)$ (producto de la señal de entrada $s_i(t)$ por cada elemento de la base $\phi_j(t)$ e integración en $0 \leq t \leq T$).

El procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt permite determinar la base del conjunto de N funciones $\{\phi_j(t)\}$ a partir del conjunto de las M señales $\{s_i(t)\}$. El procedimiento tiene dos etapas:

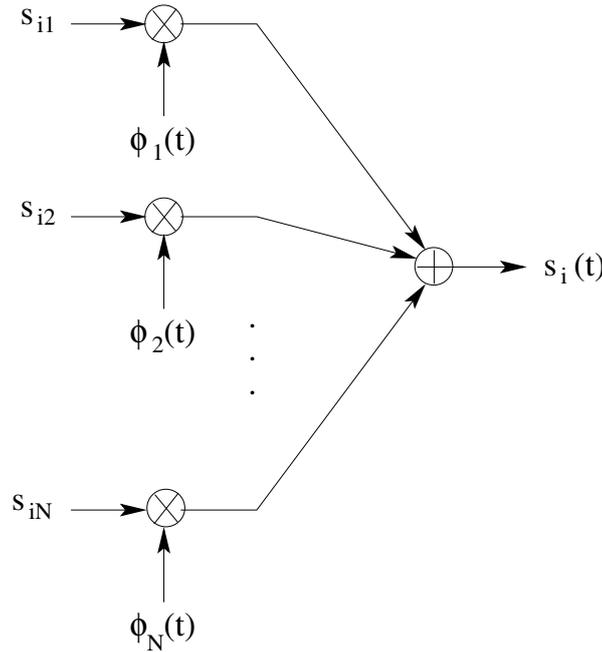


Figura 2.1 Síntesis de la señal $s_i(t)$ a partir de los coeficientes s_{ij} .

1. Hay que establecer si las señales $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$ son linealmente independientes. En caso contrario, debe existir un conjunto de coeficientes a_1, a_2, \dots, a_M , no todos nulos, de modo que se pueda escribir la ecuación (2.4).

$$a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) + \dots + a_M s_M(t) = 0 \quad (2.4)$$

Si suponemos por ejemplo que a_M es distinto de cero, podemos poner la señal $s_M(t)$ como función de las $M - 1$ restantes según la ecuación (2.5).

$$s_M(t) = - \left[\frac{a_1}{a_M} s_1(t) + \frac{a_2}{a_M} s_2(t) + \dots + \frac{a_{M-1}}{a_M} s_{M-1}(t) \right] \quad (2.5)$$

Consideremos ahora el conjunto de las $M - 1$ señales restantes. Vamos a comprobar ahora si este nuevo conjunto de señales son o no linealmente independientes. En caso de que no lo sean, debe existir un conjunto de coeficientes b_1, b_2, \dots, b_{M-1} , no todos nulos, de modo que se pueda escribir la ecuación (2.6).

$$b_1 s_1(t) + b_2 s_2(t) + \dots + b_{M-1} s_{M-1}(t) = 0 \quad (2.6)$$

Si suponemos ahora que por ejemplo b_{M-1} es distinto de cero, podemos poner la señal $s_{M-1}(t)$ como función de las $M - 2$ restantes según la ecuación (2.7).

$$s_{M-1}(t) = - \left[\frac{b_1}{b_{M-1}} s_1(t) + \frac{b_2}{b_{M-1}} s_2(t) + \dots + \frac{b_{M-2}}{b_{M-1}} s_{M-2}(t) \right] \quad (2.7)$$

Continuando este procedimiento hasta que no encontremos un conjunto de coeficientes, no todos nulos, que haga que la ecuación similar a la (2.4) en su caso se satisfaga, entonces nos quedará el conjunto de N señales $s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)$ que son linealmente independientes (no podemos poner ninguna de ellas como combinación lineal de las demás). Puesto que hemos ido descartando señales, siempre se satisface que $N \leq M$. Podemos terminar diciendo entonces que todas las M señales del conjunto original

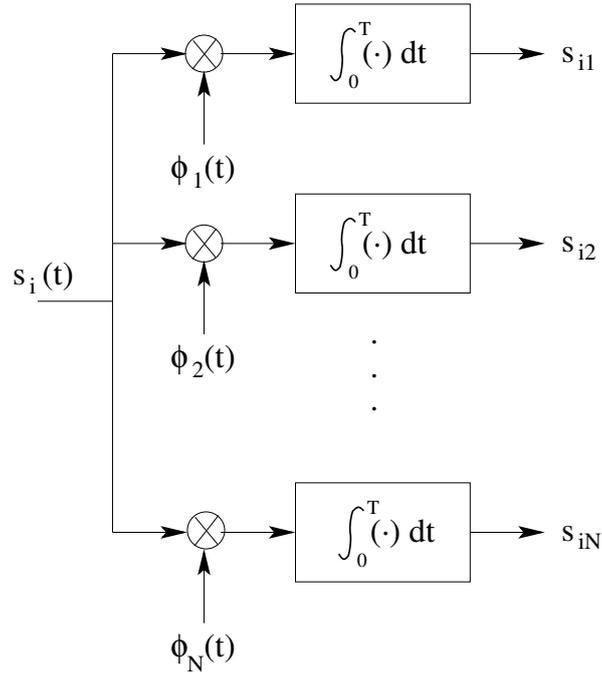


Figura 2.2 Análisis de la señal $s_i(t)$ para obtener los coeficientes s_{ij} .

$s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$ se pueden poner como combinación lineal del conjunto final $s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)$ con N señales.

- Ahora vamos a ver que siempre va a ser posible determinar un conjunto de N funciones base ortonormales $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)$ a partir del conjunto de N señales linealmente independientes $s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)$. Si esto es así podremos poner todas las M señales del conjunto original $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$ como combinación lineal de las N funciones de dicha base.

Como punto de partida vamos a definir la primera de dichas funciones $\phi_1(t)$ según la ecuación (2.8), donde E_1 es la energía de la señal $s_1(t)$. Así conseguimos que $\phi_1(t)$ tenga la forma de $s_1(t)$ y energía unidad según la ecuación (2.9). Los coeficientes s_{1j} con $1 \leq j \leq N$ para la señal $s_1(t)$ vienen dados por la ecuación (2.10). También podemos escribir la ecuación (2.11) para obtener de nuevo la señal a partir de sus coeficientes.

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} \quad (2.8)$$

$$\int_0^T \phi_1^2(t) dt = 1 \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} s_{11} = \sqrt{E_1} \\ s_{1j} = 0 \quad \text{para } 2 \leq j \leq N \end{cases} \quad (2.10)$$

$$s_1(t) = s_{11}\phi_1(t) = \sqrt{E_1}\phi_1(t) \quad (2.11)$$

Como ya hemos definido la primera función base $\phi_1(t)$ podemos calcular el coeficiente s_{21} de la segunda señal $s_2(t)$ con respecto a dicha función base $\phi_1(t)$ según la ecuación (2.12).

$$s_{21} = \int_0^T s_2(t)\phi_1(t)dt \quad (2.12)$$

Ahora definimos la función intermedia $g_2(t)$ según la ecuación (2.13). Se puede comprobar que esta señal $g_2(t)$ es ortogonal tanto a $\phi_1(t)$ como a $s_1(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq T$, es decir, se cumple la ecuación (2.14).

$$g_2(t) = s_2(t) - s_{21}\phi_1(t) \quad (2.13)$$

$$\int_0^T g_2(t)s_1(t)dt = \int_0^T g_2(t)\phi_1(t)dt = 0 \quad (2.14)$$

La señal $g_2(t)$ es ortogonal a $\phi_1(t)$ según la ecuación (2.14), pero su energía no es unitaria, sino que viene dada por la ecuación (2.15), donde E_2 es la energía de la señal $s_2(t)$. Si ahora dividimos la señal $g_2(t)$ entre su energía dada por la ecuación (2.15), conseguimos la segunda señal base $\phi_2(t)$ según la ecuación (2.16).

$$\int_0^T g_2^2(t)dt = E_2 - s_{21}^2 \quad (2.15)$$

$$\phi_2(t) = \frac{g_2(t)}{\sqrt{E_2 - s_{21}^2}} \quad (2.16)$$

Los coeficientes s_{2j} con $1 \leq j \leq N$ para la señal $s_2(t)$ vienen dados por la ecuación (2.17). También podemos escribir la ecuación (2.18) para obtener de nuevo la señal a partir de sus coeficientes.

$$\begin{cases} s_{21} \text{ dado por la ecuación (2.12)} \\ s_{22} = \sqrt{E_2 - s_{21}^2} \\ s_{2j} = 0 \quad \text{para } 3 \leq j \leq N \end{cases} \quad (2.17)$$

$$s_2(t) = s_{21}\phi_1(t) + s_{22}\phi_2(t) = s_{21}\phi_1(t) + \sqrt{E_2 - s_{21}^2}\phi_2(t) \quad (2.18)$$

Se puede comprobar fácilmente que la función base $\phi_2(t)$ así obtenida es ortogonal a $\phi_1(t)$ según la ecuación (2.19) y de energía unitaria según la ecuación (2.20).

$$\int_0^T \phi_2(t)\phi_1(t)dt = 0 \quad (2.19)$$

$$\int_0^T \phi_2^2(t)dt = 1 \quad (2.20)$$

Procediendo de forma similar se pueden obtener el resto de funciones base. Suponiendo que hayamos calculado ya las funciones base $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_{i-1}(t)$ vamos a ver como proceder para determinar la función base $\phi_i(t)$. Los coeficiente s_{ij} , con $1 \leq j \leq i-1$ para la señal $s_i(t)$ con respecto a las funciones base $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_{i-1}(t)$ ya determinadas se pueden calcular según la ecuación (2.21).

$$s_{ij} = \int_0^T s_i(t)\phi_j(t)dt \quad \text{para } 1 \leq j \leq i-1 \quad (2.21)$$

Ahora definimos la función intermedia $g_i(t)$ según la ecuación (2.22). Se puede comprobar que esta señal $g_i(t)$ es ortogonal a las funciones base $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_{i-1}(t)$ y también a las señales $s_1(t), s_2(t), \dots, s_{i-1}(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq T$, es decir, se cumple la ecuación (2.23).

$$g_i(t) = s_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij}\phi_j(t) \quad (2.22)$$

$$\int_0^T g_i(t)s_j(t)dt = \int_0^T g_i(t)\phi_j(t)dt = 0 \quad \text{para } 1 \leq j \leq i-1 \quad (2.23)$$

La señal $g_i(t)$ es ortogonal a las señales $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_{i-1}(t)$ según la ecuación (2.23), pero su energía no es unitaria, sino que viene dada por la ecuación (2.24), donde E_i es la energía de la señal $s_i(t)$. Si ahora dividimos la señal $g_i(t)$ entre su energía dada por la ecuación (2.24), conseguimos la señal base $\phi_i(t)$ buscada según la ecuación (2.25).

$$\int_0^T g_i^2(t)dt = E_i - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij}^2 \quad (2.24)$$

$$\phi_i(t) = \frac{g_i(t)}{\sqrt{E_i - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij}^2}} \quad (2.25)$$

Los coeficientes s_{ij} con $1 \leq j \leq N$ para la señal $s_i(t)$ vienen entonces dados por la ecuación (2.26). También podemos escribir la ecuación (2.27) para obtener de nuevo la señal a partir de sus coeficientes.

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{ij} \text{ dados por la ecuación (2.21) para } 1 \leq j \leq i-1 \\ s_{ii} = \sqrt{E_i - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij}^2} \\ s_{ij} = 0 \quad \text{para } i+1 \leq j \leq N \end{array} \right. \quad (2.26)$$

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^i s_{ij}^2\phi_j(t) = \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij}\phi_j(t) + \sqrt{E_i - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij}^2}\phi_i(t) \quad (2.27)$$

Se puede comprobar fácilmente que la función base $\phi_i(t)$ así obtenida es ortogonal a las señales $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_{i-1}(t)$ según la ecuación (2.28) y de energía unitaria según la ecuación (2.29).

$$\int_0^T \phi_i(t)\phi_j(t)dt = 0 \quad \text{para } 1 \leq j \leq i-1 \quad (2.28)$$

$$\int_0^T \phi_i^2(t)dt = 1 \quad (2.29)$$

De esta forma continuamos hasta determinar la última función base cuando $i = N$.

Como hemos mostrado, cada una de las N señales linealmente independientes $s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)$ se puede expresar como combinación lineal de las funciones base ortonormales $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)$. Entonces podemos decir que todas las M señales originales $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$ también se pueden expresar como combinación lineal de las funciones base ortonormales $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)$. Esto completa el enunciado y comprobación del procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt.

La expansión convencional de una señal periódica en serie de Fourier se puede considerar un caso particular de una expansión del tipo descrito. Otro tipo de expansión es el muestreo de una señal limitada en banda. En el primer caso la base de funciones ortonormales son las exponenciales complejas. En el segundo la función sinc y sus versiones desplazadas un número entero de muestras. Sin embargo tenemos que considerar lo siguiente:

- La forma de las funciones base ortonormales $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)$ no está en absoluto especificada. A diferencia de la serie de Fourier para señales periódicas y el muestreo para señales limitadas en banda, el procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt no se restringe a exponenciales complejas ni a funciones tipo sinc desplazadas.
- La expansión de cada señal $s_i(t)$ en términos de un número finito de N funciones base ortonormales no es una aproximación para la cual sólo se consideran los primeros términos o los más significativos (la serie de Fourier y el muestreo tienen infinitos términos). La expansión de cada señal $s_i(t)$ es exacta con N términos y únicamente con esos N .

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE SEÑALES.

Una vez que hayamos adoptado un conjunto de funciones base ortonormales $\{\phi_j(t)\}$ para $1 \leq j \leq N$, entonces cada señal del conjunto $\{s_i(t)\}$ para $1 \leq i \leq M$ se puede expresar según la ecuación (3.1) donde los coeficientes s_{ij} se pueden determinar con la ecuación (3.2).

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N s_{ij} \phi_j(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \text{ y para } 1 \leq i \leq M \quad (3.1)$$

$$s_{ij} = \int_0^T s_i(t) \phi_j(t) dt \quad \text{para } 1 \leq i \leq M \text{ y para } 1 \leq j \leq N \quad (3.2)$$

Se puede decir que cualquier señal del conjunto $\{s_i(t)\}$ viene completamente determinada por el vector de coeficientes de la ecuación (3.3).

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \\ \vdots \\ s_{iN} \end{bmatrix} \quad \text{para } 1 \leq i \leq M \quad (3.3)$$

Al vector \mathbf{s}_i se le denomina **vector señal**. Si consideramos un espacio Euclídeo con N dimensiones (por extensión del de 2 y 3), se pueden visualizar los vectores señal $\{\mathbf{s}_i\}$ para $1 \leq i \leq M$ como un conjunto de M puntos en ese espacio Euclídeo cuyos N ejes mutuamente ortogonales vienen dados por el conjunto de señales base ortonormales $\{\phi_j(t)\}$ con $1 \leq j \leq N$. Este espacio Euclídeo con N dimensiones recibe el nombre de **espacio de señal**.

Representar el conjunto de señales de energía $\{s_i(t)\}$ para $1 \leq i \leq M$ de forma geométrica es fundamental, ya que va a simplificar en gran medida los cálculos. En la figura 3.1 podemos ver un ejemplo de este tipo de representación para $N = 2$ y $M = 3$.

En un espacio Euclídeo de dimensión N se pueden definir fácilmente longitudes y ángulos entre vectores. Por ahora sólo nos van a interesar las longitudes o distancias definidas en dicho espacio Euclídeo. Se suele denotar la longitud o **norma** de un vector \mathbf{s}_i como $\|\mathbf{s}_i\|$. La norma de un vector al cuadrado viene definida como el producto escalar (o interno) de dicho vector consigo mismo, es decir, se cumple la ecuación (3.4).

$$\|\mathbf{s}_i\|^2 = \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i \rangle = \sum_{j=1}^N s_{ij}^2 \quad (3.4)$$

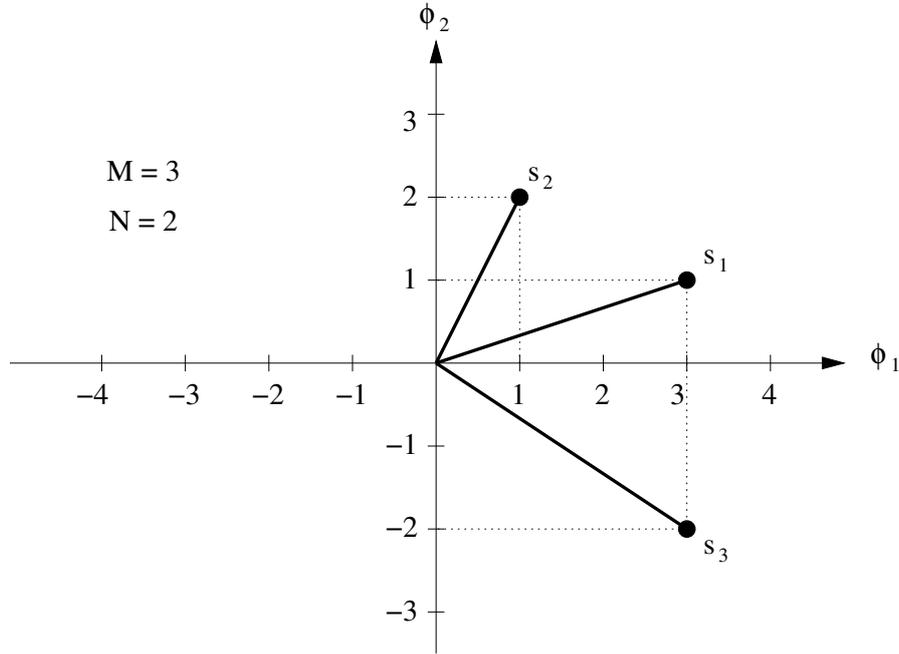


Figura 3.1 Ejemplo de representación geométrica de $M = 3$ señales en una base con $N = 2$ funciones ortonormales.

Vamos a ver como la norma del vector que representa a una señal $s_i(t)$ en el espacio Euclídeo que hemos definido está relacionada con la energía de la señal E_i . La señal considerada $s_i(t)$ tiene duración T y su energía viene dada por la ecuación (3.5). Usando la ecuación (3.1) se puede escribir el desarrollo de la ecuación (3.6), que nos lleva al resultado de que la norma al cuadrado (el cuadrado de la longitud) del vector que representa nuestra señal en el espacio Euclídeo definido es igual a la energía de la señal o equivalentemente la norma (la longitud) del vector es la raíz cuadrada de la energía de la señal según la ecuación (3.7).

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt \quad (3.5)$$

$$E_i = \int_0^T \left[\sum_{j=1}^N s_{ij} \phi_j(t) \right] \left[\sum_{k=1}^N s_{ik} \phi_k(t) \right] dt = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N s_{ij} s_{ik} \int_0^T \phi_j(t) \phi_k(t) dt = \sum_{j=1}^N s_{ij}^2 = \|\mathbf{s}_i\|^2 \quad (3.6)$$

$$\|\mathbf{s}_i\| = \sqrt{E_i} \quad (3.7)$$

En el caso de un par de señales $s_i(t)$ y $s_k(t)$ representadas respectivamente por \mathbf{s}_i y por \mathbf{s}_k se tiene la ecuación (3.8), donde $\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\|$ es la distancia entre los puntos \mathbf{s}_i y \mathbf{s}_k , es decir, la distancia al cuadrado entre dos puntos cualesquiera \mathbf{s}_i y \mathbf{s}_k del espacio Euclídeo es igual a la energía de la señal diferencia $s_i(t) - s_k(t)$.

$$\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\|^2 = \sum_{j=1}^N (s_{ij} - s_{kj})^2 = \int_0^T [s_i(t) - s_k(t)]^2 dt \quad (3.8)$$

RESPUESTA DE UN BANCO DE CORRELADORES A ENTRADA RUIDOSA.

Vamos a considerar el banco de N correladores que vimos en la figura 2.2 pero que a la entrada en lugar de tener la señal transmitida $s_i(t)$, tenemos el proceso ruidoso recibido $X(t)$ para cuando el canal es AWGN. En este caso tenemos para el proceso ruidoso $X(t)$ la ecuación (4.1), donde $W(t)$ es el proceso de ruido que se suma a la señal a lo largo del canal. Es un ruido blanco, Gaussiano, de media cero y de densidad espectral de potencia constante $N_0/2$.

$$X(t) = s_i(t) + W(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \text{ y para } 1 \leq i \leq M \quad (4.1)$$

La salida de cada correlador j , con $1 \leq j \leq N$, es una variable aleatoria X_j dada por la ecuación (4.2).

$$X_j = \int_0^T X(t)\phi_j(t)dt = s_{ij} + W_j \quad \text{para } 1 \leq j \leq N \quad (4.2)$$

El primer sumando s_{ij} de la ecuación (4.2) es una cantidad determinista debida a $s_i(t)$ según la ecuación (4.3).

$$s_{ij} = \int_0^T s_i(t)\phi_j(t)dt \quad (4.3)$$

El segundo sumando W_j de la ecuación (4.2) es una variable aleatoria debido a la presencia del proceso ruidoso $W(t)$. La variable aleatoria W_j viene dada por la ecuación (4.4).

$$W_j = \int_0^T W(t)\phi_j(t)dt \quad (4.4)$$

Consideremos ahora un nuevo proceso $X'(t)$ relacionado con el proceso ruidoso recibido $X(t)$ a través de la ecuación (4.5). Sustituyendo en la ecuación (4.5), las ecuaciones (4.1) y (4.2) se puede obtener el desarrollo de la ecuación (4.6) que nos permite definir el nuevo proceso de ruido $W'(t)$. Como se puede ver este proceso $W'(t)$ sólo depende de términos de ruido y no depende en absoluto de la señal transmitida $s_i(t)$.

$$X'(t) = X(t) - \sum_{j=1}^N X_j\phi_j(t) \quad (4.5)$$

$$X'(t) = s_i(t) + W(t) - \sum_{j=1}^N (s_{ij} + W_j)\phi_j(t) = W(t) - \sum_{j=1}^N W_j\phi_j(t) = W'(t) \quad (4.6)$$

Juntando las ecuaciones (4.5) y (4.7) se obtiene la ecuación (4.7). En la ecuación (4.7), $W'(t)$ debe considerarse como un término de ruido residual para que se conserve la igualdad, pero que no va a influir para nada ya que es eliminado por el banco de correladores.

$$X(t) = \sum_{j=1}^N X_j\phi_j(t) + W'(t) \quad (4.7)$$

Vamos a caracterizar el conjunto de variables aleatorias $\{X_j\}$, con $1 \leq j \leq J$, a la salida del banco de correladores. Como $X(t)$ es un proceso Gaussiano, se puede deducir fácilmente que cada variable aleatoria X_j es Gaussiana por lo que marginalmente va a venir caracterizada por su media y su varianza. Consideradas las variables de forma conjunta habrá que estudiar su covarianza.

El proceso de ruido $W(t)$ tiene como hemos dicho media cero, por lo que la variable aleatoria W_j extraída de $W(t)$ también va a tener media cero. Entonces, según la ecuación (4.8), la media de la variable X_j sólo va a depender de s_{ij} .

$$m_{X_j} = E[X_j] = E[s_{ij} + W_j] = s_{ij} + E[W_j] = s_{ij} \quad (4.8)$$

Con respecto a la varianza de X_j se puede llegar a la ecuación (4.8).

$$\sigma_{X_j}^2 = Var[X_j] = E[(X_j - m_{X_j})^2] = E[(X_j - s_{ij})^2] = E[W_j^2] \quad (4.9)$$

Sustituyendo el valor de W_j dado en la ecuación (4.4), se puede obtener el desarrollo de la ecuación (4.10), donde $R_W(t, u)$ es la función de autocorrelación del proceso de ruido $W(t)$. Como este proceso $R_W(t, u)$ es siempre estacionario, sólo va a depender de la diferencia de tiempos $t - u$. Además, como el proceso de ruido $W(t)$ es blanco, se cumple la ecuación (4.11).

$$\begin{aligned} \sigma_{X_j}^2 &= E \left[\int_0^T W(t)\phi_j(t)dt \int_0^T W(u)\phi_j(u)du \right] = E \left[\int_0^T \int_0^T \phi_j(t)\phi_j(u)W(t)W(u)dtdu \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T \phi_j(t)\phi_j(u)E[W(t)W(u)]dtdu = \int_0^T \int_0^T \phi_j(t)\phi_j(u)R_W(t, u)dtdu \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$R_W(t - u) = \frac{N_0}{2} \delta(t - u) \quad (4.11)$$

Finalmente sustituyendo el resultado de la ecuación (4.11) en la ecuación (4.10) tenemos la ecuación (4.12). Como se puede ver todas las variables X_j tienen la misma varianza $N_0/2$.

$$\sigma_{X_j}^2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \phi_j(t)\phi_j(u)\delta(t - u)dtdu = \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \phi_j^2(t)dt = \frac{N_0}{2} \quad (4.12)$$

Vamos a estudiar ahora la covarianza de las variables X_j y X_k considerándolas de forma conjunta. Podemos poner el desarrollo de la ecuación (4.13), es decir, es igual a la correlación de las variables W_j y W_k . Podemos seguir desarrollando según la ecuación (4.14), por lo que para $j \neq k$, la covarianza de las variables X_j y X_k es igual a cero.

$$\text{Cov}[X_j, X_k] = E[(X_j - m_{X_j})(X_k - m_{X_k})] = E[(X_j - s_{ij})(X_k - s_{ik})] = E[W_j W_k] \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_j, X_k] &= \text{Corr}[W_j, W_k] = E[W_j W_k] = E \left[\int_0^T W(t) \phi_j(t) dt \int_0^T W(t) \phi_k(t) dt \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T \phi_j(t) \phi_k(t) R_W(t, u) dt du = \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \phi_j(t) \phi_k(t) \delta(t - u) dt du \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \phi_j(t) \phi_k(t) dt = 0 \quad \text{para } j \neq k \end{aligned} \quad (4.14)$$

Podemos decir que las variables X_j , para $1 \leq j \leq N$ son mutuamente incorreladas. Además, como dichas variables son Gaussianas, se deduce que son estadísticamente independientes.

Podemos ahora agrupar todas las variables X_j , con $1 \leq j \leq N$, en un vector \mathbf{X} de variables aleatorias según la ecuación (4.15), cuyos elementos son variables X_j Gaussianas, independientes, con media s_{ij} y varianza $N_0/2$.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Como los elementos de \mathbf{X} son estadísticamente independientes, se puede expresar la función densidad de probabilidad del vector \mathbf{X} , mediante el producto de las funciones de densidad de cada variable, todo ello suponiendo que se transmitió el símbolo m_i , por lo que se tiene la ecuación (4.16), con $1 \leq i \leq M$, donde el vector \mathbf{x} y el escalar x_j son valores muestra de \mathbf{X} y X_j , respectivamente.

$$f_{\mathbf{X}|M_i}(\mathbf{x}|m_i) = \prod_{j=1}^N f_{X_j|M_i}(x_j|m_i) \quad (4.16)$$

Las funciones $f_{X_j|M_i}(x_j|m_i)$, para cada señal m_i se denominan **funciones verosimilitud**. Estas funciones son las que van a caracterizar al canal de comunicaciones, por lo que también reciben el nombre de **funciones de transición del canal**. Un canal cuyas funciones de verosimilitud cumplan la ecuación (4.16) se dice que es **sin memoria**.

La función densidad de probabilidad de una variable X_j Gaussiana, con media s_{ij} y varianza $N_0/2$ viene dada por la ecuación (4.17), para $1 \leq i \leq M$ y para $1 \leq j \leq N$.

$$f_{X_j|M_i}(x_j|m_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[-\frac{(x_j - s_{ij})^2}{N_0} \right] \quad (4.17)$$

La función de verosimilitud conjunta para un canal AWGN viene entonces dada por la ecuación (4.18), para $1 \leq j \leq M$.

$$f_{\mathbf{X}|M_i}(\mathbf{x}|m_i) = (\pi N_0)^{-\frac{N}{2}} \exp \left[-\frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^N (x_j - s_{ij})^2 \right] \quad (4.18)$$

De la ecuación (4.7), puesto que el vector \mathbf{X} caracteriza completamente al primer término, $\sum_{j=1}^N X_j \phi_j(t)$, entonces $W'(t)$ depende únicamente del ruido del canal $W(t)$. Como $W(t)$ es Gaussiano con media cero, $W'(t)$ también va a ser Gaussiano con media cero. Cualquier variable aleatoria $W'(t_k)$ derivada de $W'(t)$ fijando el tiempo $t = t_k$ va a ser ortogonal con X_j según la ecuación (4.19), pero como además la media de $W'(t)$ es cero, va a estar incorrelada con X_j , para $1 \leq j \leq N$ y con $0 \leq t_k \leq T$. Además en el caso Gaussiano $W'(t)$ será independiente de X_j .

$$E[W'(t_k)X_j] = 0 \quad (4.19)$$

Puesto que cualquier variable aleatoria procedente del término de ruido $W'(t)$ es independiente de los $\{X_j\}$ y por tanto independiente de la señal transmitida $s_i(t)$, la señal ruidosa $W'(t)$ es completamente irrelevante a la hora de decidir cual fue el símbolo transmitido. Las variables $\{X_j\}$ a la salida del banco de correladores determinadas a partir de la señal $X(t)$ van a ser las únicas necesarias para llevar a cabo el proceso de decisión. Podríamos decir que la señal $W'(t)$ cae fuera de nuestro espacio de señal.

DETECCIÓN COHERENTE DE SEÑALES EN LA PRESENCIA DE RUIDO.

Vamos a suponer que en cada intervalo temporal de duración T segundos se transmite una de las M posibles señales $s_i(t)$ con probabilidad p_i (probabilidades *a priori*). Entonces para un canal AWGN una posible realización o función muestra $x(t)$ del proceso recibido $X(t)$ vendría dada por la ecuación (5.1), para $0 \leq t \leq T$ y $1 \leq i \leq M$, y donde $w(t)$ es una función muestra de un proceso $W(t)$ de ruido blanco, Gaussiano, con media cero y densidad espectral de potencia $N_0/2$.

$$x(t) = s_i(t) + w(t) \tag{5.1}$$

El receptor tiene que observar la señal $x(t)$ y hacer **la mejor estimación** de la señal transmitida $s_i(t)$ o equivalentemente del símbolo transmitido m_i . Hay que tener en cuenta que cuando la señal transmitida $s_i(t)$, con $1 \leq i \leq M$, se aplica a un banco de N correladores definidos a partir de un conjunto apropiado de N funciones base ortonormales que representen al conjunto de señales $\{s_i(t)\}$, la salida de estos correladores definen el vector de señal \mathbf{s}_i , para $1 \leq i \leq M$. Dado que conocer el vector de señal \mathbf{s}_i es lo mismo que conocer la señal transmitida $s_i(t)$ y viceversa, se puede representar dicha señal $s_i(t)$ mediante un punto en el espacio de señal generado por las N funciones base ortonormales. Este espacio de señal será un espacio Euclídeo de dimensión $N \leq M$. Vamos a llamar al punto \mathbf{s}_i que representa a la señal $s_i(t)$ en este espacio de señal, *punto de señal transmitida*.

La representación de la señal recibida $x(t)$ es algo más complicado debido a la presencia del ruido $w(t)$. Debido a que parte de este ruido $w(t)$ cae fuera de nuestro espacio de señal (es ortogonal al mismo), lo mismo ocurre con la señal recibida $x(t)$. Sin embargo, cuando esta señal recibida $x(t)$ se aplica al mismo banco de correladores, la salida de estos correladores va a definir un vector \mathbf{x} que ahora sí que va a estar dentro de nuestro espacio de señal y se le va a poder representar igualmente mediante un punto en dicho espacio. A este punto que representa al vector \mathbf{x} en el espacio de señal se le denomina **punto de observación** y va a ser la proyección de la señal recibida $x(t)$ en nuestro espacio de señal.

El vector \mathbf{x} difiere de la señal transmitida \mathbf{s}_i en un vector aleatorio de ruido \mathbf{w} . Este vector de ruido \mathbf{w} estaría formado por las salidas del mismo banco de correladores cuando a la entrada tuviéramos sólo la señal de ruido $w(t)$. Se puede entender también como la proyección de la señal ruidosa $w(t)$ en nuestro espacio de señal. En particular se cumple la ecuación (5.2).

$$\mathbf{x} = \mathbf{s}_i + \mathbf{w} \tag{5.2}$$

Los vectores \mathbf{x} y \mathbf{w} son muestras de los vectores aleatorios \mathbf{X} y \mathbf{W} , respectivamente, según como se definieron en el capítulo 4. El vector de ruido \mathbf{w} viene completamente caracterizado por la señal ruidosa $w(t)$, pero lo contrario no es cierto. Este vector \mathbf{w} representa la porción del ruido $w(t)$ que interfiere en el proceso de detección. Será la parte del ruido que pasa a través del banco de correladores, el resto del ruido, representado por el proceso $W'(t)$ en el capítulo 4, es eliminado por el banco de correladores.

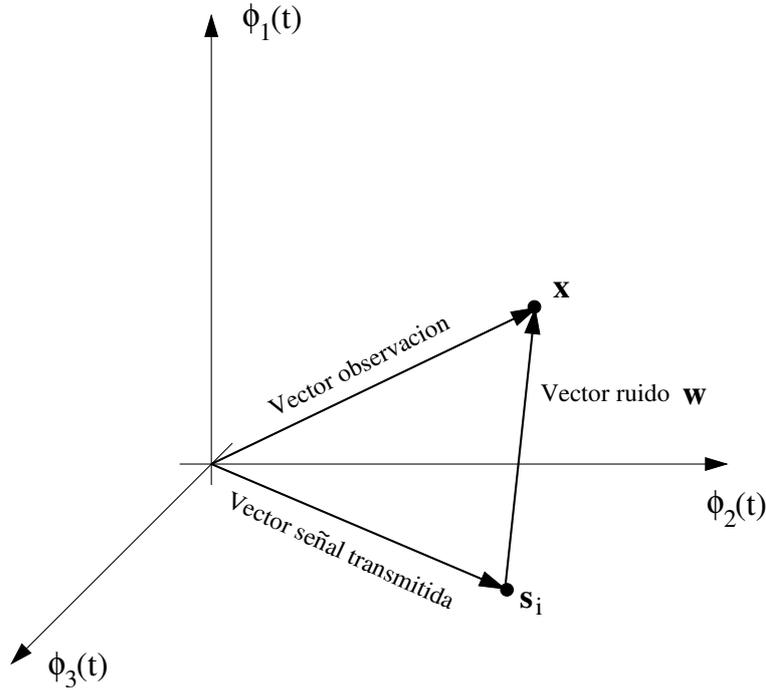


Figura 5.1 Representación en el espacio de señal de los puntos de señal transmitida s_i y recibida \mathbf{x} , junto con el vector de ruido \mathbf{w} .

Vamos a poder representar en el espacio Euclídeo de señal tanto el punto de señal transmitida, s_i , como el punto de señal recibida o punto de observación, \mathbf{x} . La diferencia entre ambos viene representada por el vector de ruido \mathbf{w} como se puede ver en la figura 5.1 para un caso particular en el que $N = 3$.

Ahora vamos a pasar a abordar el problema de la detección que consiste en dado el punto de observación \mathbf{x} , determinar la mejor estimación \hat{m} para el símbolo transmitido m_i . Habrá que determinar una regla que asigne a cada posible valor de \mathbf{x} la estimación \hat{m} que haga que la probabilidad media de error sea mínima. Veremos dos tipos de detectores: el **detector máximo a posteriori** (MAP) y el **detector de máxima verosimilitud** (ML).

5.1 DECISOR MÁXIMO A POSTERIORI.

Vamos a suponer que cuando el vector observación es \mathbf{x} , se hace la decisión $\hat{m} = m_i$. La probabilidad de error cometida en esta decisión $P_e(m_i, \mathbf{x})$ viene dada por la ecuación (5.3).

$$P_e(m_i, \mathbf{x}) = \text{Prob}(m_i \text{ no haya sido enviado} \mid \mathbf{x}) = 1 - \text{Prob}(m_i \text{ fue enviado} \mid \mathbf{x}) \quad (5.3)$$

Como nuestro criterio consiste en minimizar la probabilidad de error cometida en la etapa de decisión, la regla de decisión va a consistir en la dada por la ecuación (5.4).

$$\hat{m} = m_i \iff \text{Prob}(m_i \text{ fue enviado} \mid \mathbf{x}) \geq \text{Prob}(m_k \text{ fue enviado} \mid \mathbf{x}) \quad \text{para } 1 \leq k \leq M \quad (5.4)$$

La regla de decisión dada por la ecuación (5.4) se denomina **máxima probabilidad a posteriori** o **regla MAP**. Esta condición se puede expresar de forma más explícita en términos de las probabilidades

p_k a priori y las funciones de verosimilitud $f_{\mathbf{X}|M_k}(\mathbf{x}|m_k)$, definidas en el capítulo 4, aplicando el teorema de Bayes. Se obtiene entonces la regla dada por la ecuación (5.5).

$$\hat{m} = m_i \iff \frac{p_i f_{\mathbf{X}|M_i}(\mathbf{x}|m_i)}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} \geq \frac{p_k f_{\mathbf{X}|M_k}(\mathbf{x}|m_k)}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} \quad \text{para } 1 \leq k \leq M \quad (5.5)$$

Como se puede observar en la ecuación (5.5), los denominadores no dependen del índice k , por lo que se pueden eliminar obteniéndose como regla MAP la dada por la ecuación (5.6), es decir, las relaciones entre las funciones de verosimilitud deben ser mayores que las relaciones inversas de las probabilidades a priori.

$$\hat{m} = m_i \iff \frac{f_{\mathbf{X}|M_i}(\mathbf{x}|m_i)}{f_{\mathbf{X}|M_k}(\mathbf{x}|m_k)} \geq \frac{p_k}{p_i} \quad \text{para } 1 \leq k \leq M \quad (5.6)$$

Para nuestro canal AWGN la función de verosimilitud venía dada por la ecuación (4.18), por lo que la ecuación (5.6) se puede volver a escribir, simplificando, según la ecuación (5.7). Para poder continuar, podemos eliminar la función exponencial tomando logaritmos neperianos. La desigualdad se mantiene ya que el logaritmo neperiano es una función monótona creciente, por lo que podemos obtener la ecuación (5.8).

$$\hat{m} = m_i \iff \exp \left\{ \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^N [(x_j - s_{kj})^2 - (x_j - s_{ij})^2] \right\} \geq \frac{p_k}{p_i} \quad \text{para } 1 \leq k \leq M \quad (5.7)$$

$$\hat{m} = m_i \iff \sum_{j=1}^N (x_j - s_{ij})^2 - N_0 \ln(p_i) \leq \sum_{j=1}^N (x_j - s_{kj})^2 - N_0 \ln(p_k) \quad \text{para } 1 \leq k \leq M \quad (5.8)$$

Podemos desarrollar los cuadrado en la ecuación (5.8) y simplificar, obteniendo la ecuación (5.9). Además sabemos que la energía de cada símbolo transmitido m_k viene dado por la ecuación (5.10), por lo que la regla quedaría definitivamente según la ecuación (5.11). En definitiva el decisor siguiendo la regla MAP asignará $\hat{m} = m_i$ cuando $\sum_{j=1}^N X_j s_{kj} + \frac{N_0}{2} \ln(p_k) - \frac{1}{2} E_k$ toma su valor máximo para $k = i$.

$$\hat{m} = m_i \iff \sum_{j=1}^N s_{ij}^2 - 2 \sum_{j=1}^N X_j s_{ij} - N_0 \ln(p_i) \leq \sum_{j=1}^N s_{kj}^2 - 2 \sum_{j=1}^N X_j s_{kj} - N_0 \ln(p_k) \quad \text{para } 1 \leq k \leq M \quad (5.9)$$

$$E_k = \sum_{j=1}^N s_{kj}^2 \quad (5.10)$$

$$\hat{m} = m_i \iff \sum_{j=1}^N X_j s_{ij} + \frac{N_0}{2} \ln(p_i) - \frac{1}{2} E_i \geq \sum_{j=1}^N X_j s_{kj} + \frac{N_0}{2} \ln(p_k) - \frac{1}{2} E_k \quad \text{para } 1 \leq k \leq M \quad (5.11)$$

5.2 DECISOR DE MÁXIMA VEROSIMILITUD.

Vamos a considerar ahora el caso para el que los símbolos sean equiprobables. En este caso se cumple la ecuación (5.12), por lo que todas las probabilidades *a priori* son iguales y la relación entre cualquiera dos de ellas va a ser unidad. En este caso podemos volver a escribir la ecuación (5.6) según la ecuación (5.13). Esta regla de decisión se denomina de *máxima verosimilitud* o **regla ML** (Maximum Likelihood), ya que asignamos $\hat{m} = m_i$ cuando la verosimilitud es máxima para i .

$$p_k = \frac{1}{M} \quad \text{para } 1 \leq k \leq M \quad (5.12)$$

$$\hat{m} = m_i \iff f_{\mathbf{X}|M_i}(\mathbf{x}|m_i) \geq f_{\mathbf{X}|M_k}(\mathbf{x}|m_k) \quad \text{para } 1 \leq k \leq M \quad (5.13)$$

Debido a que normalmente las funciones de verosimilitud toman una forma exponencial, es práctica común trabajar con el logaritmo neperiano de la función de verosimilitud en lugar de con esta directamente. Además debido a que como ya dijimos la función logaritmo neperiano es monótona creciente, se mantienen las desigualdades, o lo que es lo mismo, si la función de verosimilitud es máxima para i el logaritmo neperiano de dicha función también lo va a ser. Para un canal sin memoria el logaritmo neperiano de la función de verosimilitud se denomina **métrica**. La regla de máxima verosimilitud decidirá por aquel símbolo m_i cuya métrica sea máxima, es decir, ahora la regla viene dada por la ecuación (5.14).

$$\hat{m} = m_i \iff \ln[f_{\mathbf{X}|M_i}(\mathbf{x}|m_i)] \geq \ln[f_{\mathbf{X}|M_k}(\mathbf{x}|m_k)] \quad \text{para } 1 \leq k \leq M \quad (5.14)$$

Es útil tener una interpretación gráfica del decisor de máxima verosimilitud. Sea Z el espacio de señal de N dimensiones en el que podemos representar todos los posibles vectores \mathbf{x} de señal recibida. Este espacio Z lo podemos denominar **espacio de observación**. La regla ML debe establecer $\hat{m} = m_i$ a partir de la observación \mathbf{x} . Vamos a ver que el criterio ML es equivalente a dividir el espacio de observación Z en M regiones Z_1, Z_2, \dots, Z_M de forma que se decida en favor de m_i cuando la observación \mathbf{x} caiga en la región Z_i . Estas regiones deben ser una partición de todo el espacio de observación Z , es decir, la unión de todas ellas debe recubrir el espacio Z . En definitiva podemos escribir la regla ML según la ecuación (5.15).

$$\mathbf{x} \text{ cae en la región } Z_i \iff \ln[f_{\mathbf{X}|M_i}(\mathbf{x}|m_i)] \geq \ln[f_{\mathbf{X}|M_k}(\mathbf{x}|m_k)] \quad \text{para } 1 \leq k \leq M \quad (5.15)$$

En el caso de que el vector de observación \mathbf{x} cayera justamente en la región de separación entre dos regiones, el decisor optaría de forma aleatoria entre ambas. La regla no es necesario modificarla debido al signo de igual que hemos empleado en la ecuación (5.15).

Para nuestro canal AWGN la función de verosimilitud venía dada por la ecuación (4.18), por lo que se puede determinar la métrica según la ecuación (5.16).

$$\ln[f_{\mathbf{X}|M_k}(\mathbf{x}|m_k)] = -\frac{N}{2} \ln(\pi N_0) - \frac{1}{N_0} \exp \left[\sum_{j=1}^N (x_j - s_{kj})^2 \right] \quad \text{para } 1 \leq k \leq M \quad (5.16)$$

Sustituyendo la métrica calculada en la ecuación (5.16) en la regla dada por la ecuación (5.15) y simplificando la regla queda ahora según la ecuación (5.17).

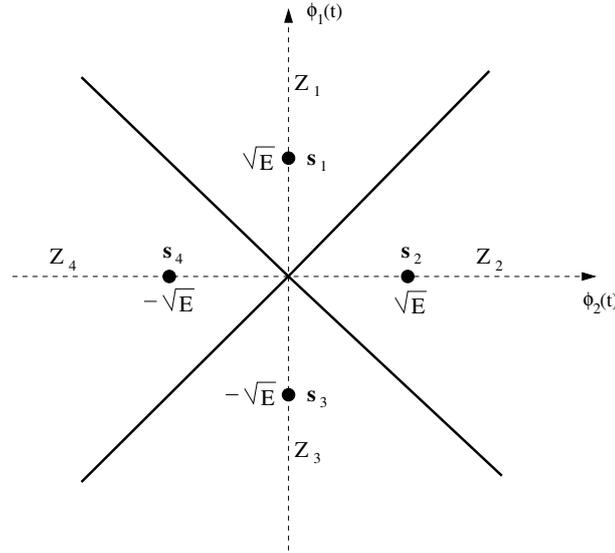


Figura 5.2 Ejemplo de las regiones en las que se divide el espacio de señal para $M = 4$ símbolos con igual energía E y espacio de señal con $N = 2$ dimensiones.

$$\mathbf{x} \text{ cae en la región } Z_i \iff \sum_{j=1}^N (x_j - s_{ij})^2 \leq \sum_{j=1}^N (x_j - s_{kj})^2 \quad \text{para } 1 \leq k \leq M \quad (5.17)$$

La ecuación (5.18) nos dice que la regla de decisión se puede volver a escribir según la ecuación (5.19), es decir, la regla ML no es más que elegir $\hat{m} = m_i$ cuando el vector de observación \mathbf{x} esté más cerca (usando la métrica Euclídea) del punto de señal \mathbf{s}_i que de los demás en el espacio de observación Z . En este caso la región Z_i se puede determinar como el conjunto de puntos del espacio de señal Z que están más cerca (en el sentido Euclídeo) del punto de señal \mathbf{s}_i que del resto.

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_k\|^2 = \sum_{j=1}^N (x_j - s_{kj})^2 \quad (5.18)$$

$$\mathbf{x} \text{ cae en la región } Z_i \iff \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_k\| \quad \text{para } 1 \leq k \leq M \quad (5.19)$$

Al igual que hicimos en el caso MAP podemos simplificar la ecuación (5.17) desarrollando los cuadrados, obteniéndose la ecuación (5.20).

$$\mathbf{x} \text{ cae en la región } Z_i \iff \sum_{j=1}^N X_j s_{ij} - \frac{1}{2} E_i \geq \sum_{j=1}^N X_j s_{kj} - \frac{1}{2} E_k \quad \text{para } 1 \leq k \leq M \quad (5.20)$$

Para un canal AWGN las regiones de decisión Z_i en el espacio de observación Z con dimensión N usando la regla ML van a estar limitadas por hiperplanos con dimensión $N - 1$. En la figura 5.2 podemos ver un ejemplo para el caso $M = 4$ símbolos con igual energía E y dimensión del espacio de señal $N = 2$.

5.3 PROBABILIDAD DE ERROR.

Vamos a ver cómo se determinaría la probabilidad de error en el caso de la regla ML. Hemos dicho que el espacio de observación queda dividido en regiones Z_i separadas por hiperplanos. Si hemos transmitido el símbolo m_i y hemos recibido el vector de observación \mathbf{x} el decisor cometerá error siempre que \mathbf{x} caiga fuera de la región Z_i asociada al vector de señal \mathbf{s}_i . Promediando para todos los símbolos tendremos la probabilidad de error P_e . Ya que los símbolos son equiprobables como suposición para la regla ML, se puede escribir la ecuación (5.21).

$$\begin{aligned}
 P_e &= \sum_{i=1}^M p_i \text{Prob}(\mathbf{x} \text{ no cae dentro de } Z_i \mid m_i \text{ fue enviado}) \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \text{Prob}(\mathbf{x} \text{ no cae dentro de } Z_i \mid m_i \text{ fue enviado}) \\
 &= 1 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \text{Prob}(\mathbf{x} \text{ cae dentro de } Z_i \mid m_i \text{ fue enviado}) \tag{5.21}
 \end{aligned}$$

Haciendo uso de la función de verosimilitud, la probabilidad de error se puede poner según la ecuación (5.22).

$$P_e = 1 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \int_{Z_i} f_{\mathbf{x}|M_i}(\mathbf{x}|m_i) d\mathbf{x} \tag{5.22}$$

Para canales AWGN, dependiendo de la forma de las regiones Z_i , es posible encontrar expresiones exactas para la probabilidad de error sólo en ciertos casos. En otros caso solamente va a ser posible determinar cotas superior e inferior para dicha probabilidad de error que van a ser útiles para predecir el valor de SNR que hace que dicha probabilidad de error se mantenga dentro de unos límites adecuados. Para los casos de especial interés como son PSK y FSK sí que va a ser posible determinar de forma exacta la probabilidad de error.

RECEPTOR CORRELADOR.

En el caso de un canal AWGN para cuando se transmiten el conjunto de señales $\{s_i(t)\}$ con $1 \leq i \leq M$ el receptor óptimo tiene dos partes:

1. Un banco de N correladores cuyas entradas auxiliares corresponden a las N funciones base ortonormales $\{\phi_j(t)\}$ con $1 \leq j \leq N$ generadas de forma local en el receptor. A partir de la señal recibida $x(t)$ para $0 \leq t \leq T$ se va a obtener el vector observado \mathbf{x} usando el esquema que se puede ver en la figura 6.1.
2. La segunda parte se denomina receptor de vectores y va a implementar la forma del detector usando la regla MAP o la regla ML a partir del vector de observación \mathbf{x} obtenido a la salida del banco de correladores, para obtener la mejor estimación \hat{m} del símbolo transmitido en el sentido de mínima probabilidad de error, según se puede ver en la figura 6.2. Teniendo en cuenta la ecuación (5.11) para la regla MAP y la ecuación (5.20) para la regla ML, va a ser necesario en primer lugar multiplicar el

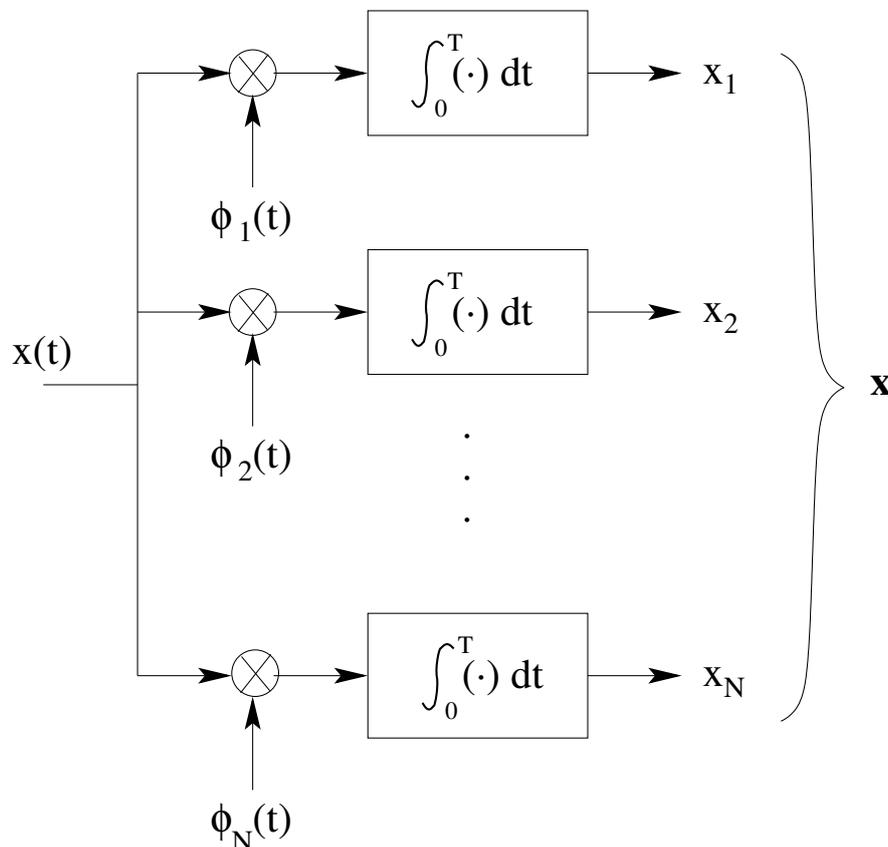


Figura 6.1 Detector mediante banco de correladores.

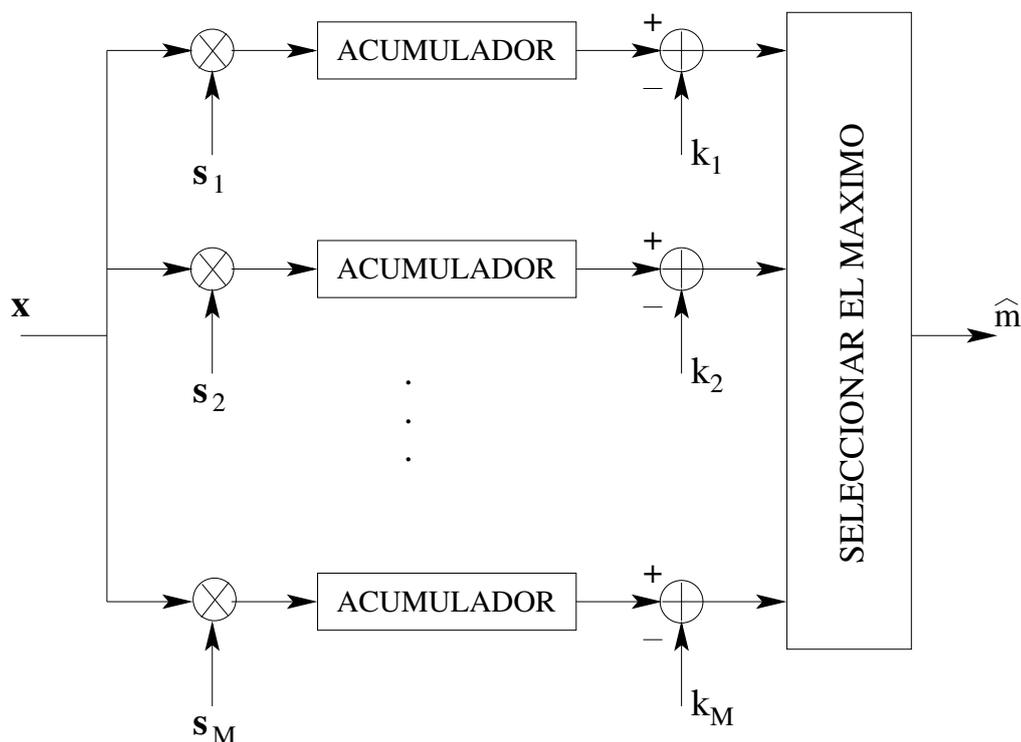


Figura 6.2 Receptor de vectores para regla MAP y ML.

vector de observación \mathbf{x} por cada posible vector de señal transmitida \mathbf{s}_i con $1 \leq i \leq M$ y acumular el resultado obteniendo así los productos escalares $(\mathbf{x}, \mathbf{s}_i)$, es decir las proyecciones del vector observación \mathbf{x} en cada una de las posibles señales transmitidas \mathbf{s}_i . Posteriormente se ajusta el resultado mediante las constantes K_i para compensar las diferencias energéticas de cada señal \mathbf{s}_i en la regla ML y estas diferencias energéticas y las diferentes probabilidades *a priori* en la regla MAP.

En particular para la regla MAP, las constantes K_i vienen dadas por la ecuación (6.1). En el caso ML, debido a que las probabilidades *a priori* son iguales, las constantes K_i compensan sólo las diferencias energéticas según la ecuación (6.2). Finalmente, en el caso en el que las energías de las M señales sean iguales las constantes K_i son nulas según la ecuación (6.3), por lo que en el esquema de la figura 6.2 los sumadores delante del decisor desaparecen. En este caso se decide en favor del símbolo m_i para el que la proyección del vector observación \mathbf{x} sobre el vector de señal transmitida \mathbf{s}_i es máxima.

$$k_i = \frac{1}{2}E_i - \frac{N_0}{2} \ln(p_i) \quad \text{para } 1 \leq i \leq M \quad (6.1)$$

$$k_i = \frac{1}{2}E_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq M \quad (6.2)$$

$$k_i = 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq M \quad (6.3)$$

Este receptor recibe el nombre de **receptor correlador**.

RECEPTOR CON FILTRO ADAPTADO.

Las funciones base ortonormales $\{\phi_j(t)\}$ para $1 \leq j \leq N$ valen cero fuera del intervalo $0 \leq t \leq T$. El uso de multiplicadores se puede evitar en la primera etapa del receptor. Esto es deseable puesto que los multiplicadores analógicos son difíciles de lograr. Vamos a suponer un filtro lineal e invariante en el tiempo cuya respuesta al impulso viene dada por $h_j(t)$. Cuando a la entrada de dicho filtro se tiene la señal $x(t)$, la salida resultante $y_j(t)$ viene dada por la ecuación (7.1).

$$y_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_j(t - \tau)d\tau \quad (7.1)$$

Vamos a suponer que diseñamos el filtro anterior de forma que se tenga la ecuación (7.2), entonces la salida $y_j(t)$ vendrá dada por la ecuación (7.3).

$$h_j(t) = \phi_j(T - t) \quad (7.2)$$

$$y_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\phi_j(T - t + \tau)d\tau \quad (7.3)$$

Muestreando la salida $y_j(t)$ en el instante de tiempo $t = T$ se obtiene la ecuación (7.4) y además ya que $\phi_j(t)$ es cero fuera del intervalo $0 \leq t \leq T$, podemos cambiar los límites en la ecuación (7.4) por los de la ecuación (7.5).

$$y_j(T) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\phi_j(\tau)d\tau \quad (7.4)$$

$$y_j(T) = \int_0^T x(\tau)\phi_j(\tau)d\tau \quad (7.5)$$

De la ecuación (7.5) se deduce que $y_j(T) = x_j$, es decir la salida del correlador de la señal $x(t)$ con la función base $\phi_j(t)$. Por lo tanto un esquema equivalente al banco de correladores de la figura 6.1 es el que se puede ver en la figura 7.1 empleando un banco de N filtros seguidos de muestreadores para $t = T$.

Un filtro cuya respuesta al impulso es una versión invertida en el tiempo y retardada de una señal $\phi_j(t)$ se dice que está **adaptado** a la señal $\phi_j(t)$. Un receptor óptimo que emplea este tipo de filtros se denomina **receptor con filtro adaptado**.

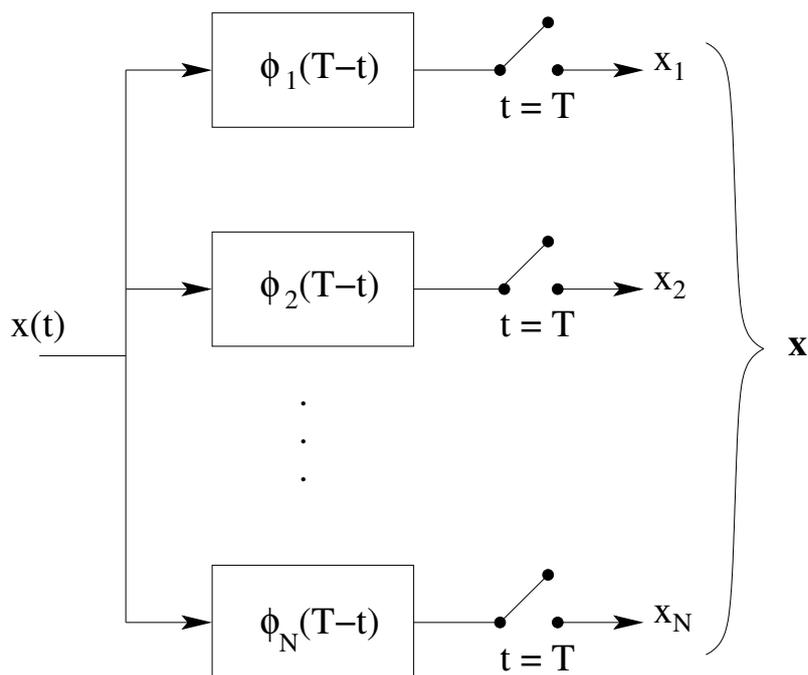


Figura 7.1 Detector mediante banco de filtros adaptados.

Para que un filtro adaptado pueda operar en tiempo real y sea físicamente realizable, debe ser causal, es decir, su respuesta al impulso debe ser cero para tiempos negativos según la ecuación (7.6). Puesto que $\phi_j(t)$ es cero fuera del intervalo temporal $0 \leq t \leq T$, $h_j(t)$ definido por la ecuación (7.2) también es cero fuera de dicho intervalo, por lo que este filtro adaptado siempre va a ser realizable.

$$h_j(t) = 0 \quad \text{para todo } t < 0 \quad (7.6)$$

7.1 MAXIMIZACIÓN DE LA RELACIÓN SEÑAL A RUIDO A LA SALIDA.

Vamos a profundizar en el funcionamiento del filtro adaptado usando como criterio de optimización la maximización de la relación señal a ruido a la salida o SNR_O .

Consideremos un filtro lineal con respuesta al impulso $h(t)$ cuya entrada $x(t)$ es la suma de una señal conocida $\phi(t)$ y una componente ruidosa $w(t)$ en la configuración que se puede ver en la figura 7.2, donde T es un instante arbitrario de observación. $\phi(t)$ puede ser cualquiera de las funciones base ortonormales. $w(t)$ será una muestra de un proceso blanco, estacionario, con media cero y densidad espectral de potencia $N_0/2$. Puesto que el filtro es lineal e invariante en el tiempo, la señal a la salida se puede expresar según la ecuación (7.7), donde $\phi_0(t)$ y $n(t)$ son las salidas debidas a las componentes de señal y ruido a la entrada, respectivamente.

$$y(t) = \phi_0(t) + n(t) \quad (7.7)$$

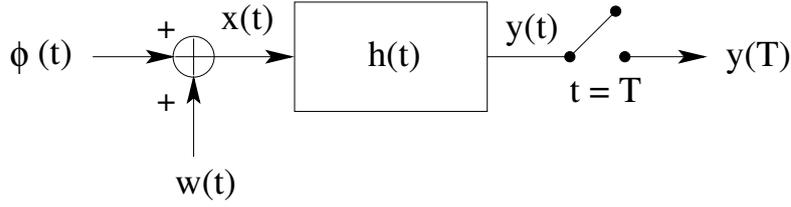


Figura 7.2 Configuración empleada para determinar la respuesta al impulso que maximiza la relación señal a ruido a la salida.

Una forma de describir el requisito de que la señal de salida $\phi_0(t)$ sea grande comparada con el ruido $n(t)$ es mediante la SNR_O de pico en el instante $t = T$ definida como la relación entre la potencia instantánea de la componente de señal a la salida en dicho instante y la potencia de la componente de ruido. Vamos a maximizar la SNR_O definida por la ecuación (7.8). Vamos a mostrar que la maximización de la SNR_O definida por la ecuación (7.8) ocurre cuando el filtro está adaptado a $\phi(t)$.

$$SNR_O = \frac{|\phi_0(T)|^2}{E[n^2(t)]} \quad (7.8)$$

Sea $\Phi(f)$ la transformada de Fourier de $\phi(t)$ y $H(f)$ la de $h(t)$. Entonces podemos expresar la componente de señal a la salida $\phi_0(t)$ según la ecuación (7.9).

$$\phi_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\Phi(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (7.9)$$

La potencia de pico de la componente de señal a la salida va a venir dada por la ecuación (7.10).

$$|\phi_0(T)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\Phi(f) \exp(j2\pi fT) df \right|^2 \quad (7.10)$$

La densidad espectral de potencia de la componente de ruido a la salida $n(t)$ viene dada por la ecuación (7.11), por lo que la potencia de ruido es la de la ecuación (7.12).

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 \quad (7.11)$$

$$E[n^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \quad (7.12)$$

Usando las ecuaciones (7.10) y (7.12), la SNR_O viene dada por la ecuación (7.13).

$$SNR_O = \frac{2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\Phi(f) \exp(j2\pi fT) df \right|^2}{N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \quad (7.13)$$

El problema ahora se plantea de la siguiente forma: manteniendo constante $\Phi(f)$, determinar la función de transferencia $H(f)$ que maximiza la SNR_O dada por la ecuación (7.13). Para hacer esto podemos emplear la desigualdad de Schwarz dada por la ecuación (7.14) al numerador de la ecuación (7.13), obteniéndose la ecuación (7.15).

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\Phi(f) \exp(j2\pi fT) df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(f)|^2 df \quad (7.14)$$

$$\text{SNR}_O \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(f)|^2 df \quad (7.15)$$

El término de la derecha de la desigualdad de la ecuación (7.15) no depende de $H(f)$. Sólo depende de la energía de la señal $\phi(t)$ y de la densidad espectral de ruido. La SNR_O será máxima cuando se cumpla la igualdad según la ecuación (7.16). En este caso la función de transferencia del filtro $H(f)$ tomará su valor óptimo $H_{\text{OPT}}(f)$. Esta función de transferencia óptima será aquella que haga que se cumpla la desigualdad de Schwarz con el signo de igual, cosa que ocurre cuando, salvo por un factor de escala, se cumple la ecuación (7.17).

$$\text{SNR}_{O, \text{máx}} = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(f)|^2 df \quad (7.16)$$

$$H_{\text{OPT}}(f) = \Phi^*(f) \exp(-j2\pi fT) \quad (7.17)$$

Tomando la transformada inversa de Fourier de la ecuación (7.17) se puede obtener la respuesta al impulso de dicho filtro óptimo, $h_{\text{OPT}}(t)$. No es difícil ver que viene dada por la ecuación (7.18), que es lo que habíamos definido como filtro adaptado a la señal de entrada $\phi(t)$: su respuesta al impulso es una versión invertida en el tiempo y retardada. La única suposición necesaria es que el ruido sea blanco, estacionario, con media cero y densidad espectral de potencia $N_0/2$.

$$h_{\text{OPT}}(t) = \phi(T - t) \quad (7.18)$$

7.2 PROPIEDADES DE LOS FILTROS ADAPTADOS.

Hemos visto que un filtro adaptado a una señal $\phi(t)$ tiene por respuesta al impulso la dada por la ecuación (7.18) y por función de transferencia la dada por la ecuación (7.17). Basándonos en estas dos ecuaciones se puede deducir las siguientes propiedades:

1. El espectro $\Phi_o(f)$ de la señal de salida $\phi_o(t)$ de un filtro adaptado a una señal $\phi(t)$ cuando a la entrada está presente dicha señal $\phi(t)$ es, excepto por un retardo, proporcional a la densidad espectral de energía $\Psi_\phi(f)$ de la señal de entrada. Se cumple la ecuación (7.19).

$$\Phi_o(f) = H_{\text{OPT}}(f)\Phi(f) = \Phi^*(f)\Phi(f) \exp(-j2\pi fT) = \Psi_\phi(f) \exp(-j2\pi fT) \quad (7.19)$$

2. La señal de salida $\phi_o(t)$ de un filtro adaptado a una señal $\phi(t)$ cuando a la entrada está presente dicha señal $\phi(t)$ es proporcional a una versión desplazada de la autocorrelación $R_\phi(\tau)$ de la señal de entrada. Esta propiedad se deduce directamente de la propiedad anterior tomando transformada inversa de Fourier de la ecuación (7.19) y teniendo en cuenta que la transformada de Fourier de la autocorrelación es la densidad espectral de energía. Se cumple entonces la ecuación (7.20).

$$\phi_o(t) = R_\phi(t - T) \quad (7.20)$$

En el punto $t = T$ la ecuación (7.20) es la autocorrelación en el origen que es donde la autocorrelación toma su valor máximo y es igual la energía de la señal $\phi(t)$, por lo que podemos escribir la ecuación (7.21). En ausencia de ruido el valor máximo del filtro adaptado cuando a la entrada tenemos $\phi(t)$ ocurre en $t = T$ y es proporcional a la energía E de la señal $\phi(t)$.

$$\phi_o(T) = R_\phi(0) = E \quad (7.21)$$

3. La SNR_O máxima de un filtro adaptado depende sólo de la relación entre la energía de la señal $\phi(t)$ a la que el filtro está adaptado y la densidad espectral del ruido blanco a la entrada.

Según la ecuación (7.21) el valor máximo de la señal a la salida ocurre en $t = T$ para cuando la entrada es $\phi(t)$ y es igual a la energía E de la señal $\phi(t)$.

La potencia de ruido viene dada por la ecuación (7.12). Teniendo en cuenta que la función de transferencia del filtro adaptado viene dada por la ecuación (7.17), se puede escribir la ecuación (7.22).

$$E[n^2(t)] = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\phi(f) df = \frac{N_0 E}{2} \quad (7.22)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (7.21) y (7.22), el valor máximo de la relación señal a ruido a la salida viene dado por la ecuación (7.23).

$$\text{SNR}_{O, \text{máx}} = \frac{2E}{N_0} \quad (7.23)$$

4. El funcionamiento del filtro adaptado se puede separar en dos condiciones de adaptación:

- a) Adaptación de fase espectral que da lugar a la máxima salida para $t = T$.
- b) Adaptación de amplitud espectral que hace que en $t = T$ la SNR a la salida sea máxima.

El espectro $\Phi(f)$ de la señal $\phi(t)$ a la que se adapta el filtro se puede descomponer en amplitud espectral $|\Phi(f)|$ y fase espectral $\theta(f)$ según la ecuación (7.24).

$$\Phi(f) = |\Phi(f)| \exp[j \theta(f)] \quad (7.24)$$

Un filtro $H(f)$ se dice que está adaptado en fase espectral a la señal $\phi(t)$ si la función de transferencia del filtro viene dada por la ecuación (7.25), donde T es una constante temporal no negativa.

$$H(f) = |H(f)| \exp[-j \theta(f) - j2\pi fT] \quad (7.25)$$

Cuando la entrada de dicho filtro es $\phi(t)$ la señal a la salida $\phi'_o(t)$ viene dada por la ecuación (7.26).

$$\phi'_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \Phi(f) \exp(j2\pi ft) df = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)| |\Phi(f)| \exp[j2\pi f(t - T)] df \quad (7.26)$$

La adaptación en $t = T$ asegura que todas las componentes se suman de forma constructiva a la salida dando lugar al máximo en ese instante temporal. Podemos escribir la ecuación (7.27).

$$\phi'_0(t) \leq \phi'_0(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)| |\Phi(f)| df \quad (7.27)$$

Para la adaptación de amplitud espectral, se elige la respuesta en amplitud $|H(f)|$ para maximizar la SNR a la salida en $t=T$ mediante la ecuación (7.28). Ahora la ecuación (7.27) toma el valor máximo igual a la energía según la ecuación (7.29).

$$|H(f)| = |\Phi(f)| \quad (7.28)$$

$$\phi_0(t) \leq \phi_0(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\phi}(f) df = E \quad (7.29)$$

Juntando las ecuaciones (7.25) y (7.28), se llega al filtro adaptado habitual según la ecuación (7.30).

$$H(f) = |\Phi(f)| \exp[-j \theta(f)] \exp(-j2\pi fT) = \Phi^*(f) \exp(-j2\pi fT) \quad (7.30)$$

TÉCNICAS DE CODIFICACIÓN COHERENTE.

Vamos a considerar las técnicas de codificación coherentes binarias. En este caso estas técnicas consisten en conmutar la amplitud, la frecuencia o la fase entre dos posibles valores uno para el \emptyset y otro para el 1. Tenemos las siguientes técnicas:

- ASK. Se transmite una portadora sinusoidal con frecuencia y amplitud fijas de duración T_b para el símbolo 1 y señal a cero durante T_b segundos para el \emptyset .
- FSK. Consiste en dos señales sinusoidales de igual amplitud pero de diferente frecuencia, ambas con duración T_b para el \emptyset y para el 1, respectivamente.
- PSK. Una portadora sinusoidal con frecuencia y amplitud fija representa tanto el \emptyset como el 1. La diferencia entre ambos es un desfase de 180° , o lo que es lo mismo, una de ellas tiene el signo cambiado. Puesto que cambiar el signo es modificar la amplitud, este tipo de modulación se puede considerar también como ASK.

Como podemos ver ASK, PSK y FSK son las versiones discretas de las modulaciones continuas AM, PM y FM. Vamos a analizar con más detalle a continuación FSK y PSK con detección coherente.

8.1 BPSK COHERENTE.

Como estamos en el caso binario tenemos dos señales $s_1(t)$ y $s_2(t)$ para representar el símbolo 1 y el símbolo \emptyset respectivamente. En particular, estas dos señales vienen dadas por las ecuaciones (8.1) y (8.2), donde $0 \leq t \leq T_b$ y E_b es la energía de señal transmitida por bit.

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t) \quad (8.1)$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t + \pi) = -\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t) \quad (8.2)$$

Para asegurar que cada bit transmitido contiene un número entero de ciclos de portadora, la frecuencia f_c se elige según la ecuación (8.3), donde n_c es un número entero positivo arbitrario. Como se desprende de las ecuaciones (8.1) y (8.2), éstas se diferencian exclusivamente en un desfase de 180° , es decir, una de ellas tiene el signo cambiado con respecto a la otra.

$$f_c = \frac{n_c}{T_b} \quad (8.3)$$

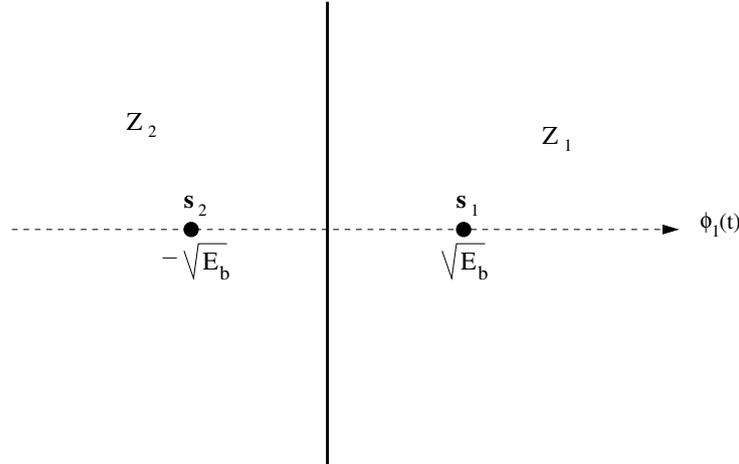


Figura 8.1 Regiones en las que queda dividido el espacio de señal para BPSK.

Es fácil de ver que la dimensión del espacio de señal es $N = 1$ en este caso y que la única función base viene dada por la ecuación (8.4), para $0 \leq t \leq T_b$. Entonces como tenemos dos símbolos o señales, $M = 2$ y podemos escribir las ecuaciones (8.5) y (8.6).

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_c t) \quad (8.4)$$

$$s_1(t) = \sqrt{E_b} \phi_1(t) \quad (8.5)$$

$$s_2(t) = -\sqrt{E_b} \phi_1(t) \quad (8.6)$$

Los vectores de señal transmitida \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_2 viene dados por las ecuaciones (8.7) y (8.8).

$$\mathbf{s}_1 = (s_{11}) = (\sqrt{E_b}) \quad (8.7)$$

$$\mathbf{s}_2 = (s_{21}) = (-\sqrt{E_b}) \quad (8.8)$$

Vamos a suponer que los símbolos son equiprobables $p_1 = p_2 = 0,5$, con lo que se puede aplicar la regla ML para el caso en el que la energía de los símbolos es la misma, E_b . En este caso la regla de decisión consistirá en dividir el espacio con $N = 1$ dimensiones en $M = 2$ regiones. La primera de ellas, Z_1 , vendrá dada por el conjunto de puntos más cercanos a $\sqrt{E_b}$ que a $-\sqrt{E_b}$ y la otra, Z_2 , por los puntos más cercanos a $-\sqrt{E_b}$ que a $\sqrt{E_b}$. Es fácil de ver que Z_1 son los puntos de la zona del eje positiva y Z_2 los puntos de la zona negativa como se puede ver en la figura 8.1. La frontera de separación de ambas regiones es un hiperplano con dimensiones $N - 1 = 0$, que en este caso es un punto: el origen del eje (cuando vale cero).

La regla de decisión es sencilla: se decide que se transmitió $s_1(t)$, símbolo 1, cuando el punto de señal observado \mathbf{x} caiga en Z_1 , es decir, x_1 sea mayor que cero; y se decide que se transmitió $s_2(t)$, símbolo 0, cuando el punto de señal observado \mathbf{x} caiga en la región Z_2 , es decir, x_1 sea menor que cero. Pueden ocurrir dos tipos de errores: se transmitió $s_1(t)$, símbolo 1, pero debido al efecto del ruido el punto se señal

observado \mathbf{x} cae en la región Z_2 y se decide en favor de $s_2(t)$, símbolo \emptyset . El segundo tipo de error ocurre cuando se transmitió $s_2(t)$, símbolo \emptyset , pero debido al efecto del ruido el punto se señal observado \mathbf{x} cae en la región Z_1 y se decide en favor de $s_1(t)$, símbolo 1.

En el segundo tipo de error, la región Z_1 viene dada por la ecuación (8.9), donde x_1 viene dado por la ecuación (8.10).

$$Z_1 : \quad 0 < x_1 < \infty \quad (8.9)$$

$$x_1 = \int_0^{T_b} x(t)\phi_1(t)dt \quad (8.10)$$

La función de verosimilitud, cuando se transmite $s_2(t)$, símbolo \emptyset , viene definida por la ecuación (8.11).

$$f_{X_1|\emptyset}(x_1|\emptyset) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[-\frac{(x_1 - s_{21})^2}{N_0} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[-\frac{(x_1 + \sqrt{E_b})^2}{N_0} \right] \quad (8.11)$$

La probabilidad condicional de decidir por el símbolo 1 cuando se transmitió el símbolo \emptyset viene dada por la ecuación (8.12). Haciendo el cambio de variable de la ecuación (8.13), se llega finalmente al resultado de la ecuación (8.14), donde la función erfc es la **función error complementario** dada por la ecuación (8.15).

$$P_{e\emptyset} = \int_{Z_1} f_{X_1|\emptyset}(x_1|\emptyset)dx_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{(x_1 + \sqrt{E_b})^2}{N_0} \right] dx_1 \quad (8.12)$$

$$z = \frac{x_1 + \sqrt{E_b}}{\sqrt{N_0}} \quad (8.13)$$

$$P_{e\emptyset} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{E_b}{N_0}}^{\infty} \exp(-z^2)dz = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (8.14)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-z^2)dz \quad (8.15)$$

Si repetimos los cálculos para cuando se transmitió el símbolo 1 y cometemos error decidiendo en favor del símbolo \emptyset , obtendríamos el mismo resultado, es decir, la ecuación (8.16). Finalmente, la probabilidad media de error se puede ahora calcular según la ecuación (8.17), para la que hemos supuesto que los símbolos son equiprobables con lo cual las probabilidades *a priori* son $p_1 = p_2 = 0,5$.

$$P_{e1} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (8.16)$$

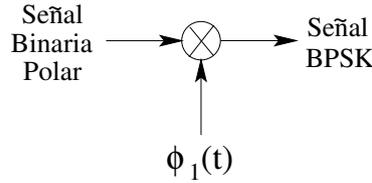


Figura 8.2 Esquema del transmisor de BPSK.

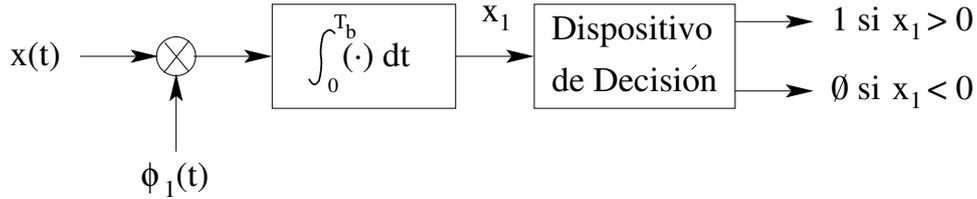


Figura 8.3 Esquema del receptor de BPSK empleando un correlador.

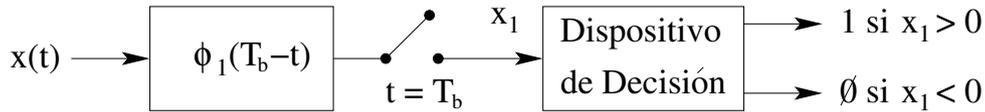


Figura 8.4 Esquema del receptor de BPSK empleando un filtro adaptado.

$$P_e = p_1 P_{e1} + p_2 P_{e\emptyset} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (8.17)$$

Siempre que las probabilidades *a priori* sean iguales y las zonas de decisión dividan al espacio de observación en zonas simétricas las probabilidades de error condicionadas y la probabilidad de error media toman el mismo valor.

Vamos a ver cómo generar una señal PSK. Va a ser necesario representar la señal binaria de entrada de forma polar de forma que el símbolo 1 se represente con un pulso constante de amplitud $\sqrt{E_b}$ con duración T_b y el símbolo \emptyset con un pulso de amplitud $-\sqrt{E_b}$ de igual duración. En la figura 8.2 podemos ver el esquema del transmisor. Consiste simplemente el multiplicar la señal polar generada en la forma indicada más arriba por la función base $\phi_1(t)$ usando por ejemplo un modulador producto. Va a ser necesario que la señal binaria polar y la señal $\phi_1(t)$ estén sincronizadas. Para ello debe existir una señal de temporización que permita lograr el sincronismo de la portadora $\phi_1(t)$ con los instantes de cambio de bit. Como se puede ver, este tipo de modulación digital se puede considerar un caso particular de modulación DSB, para el que la señal moduladora es una señal binaria polar.

En cuando al receptor que debe reconstruir la señal binaria original a partir de la señal recibida ruidosa $x(t)$, podemos emplear un esquema usando correladores o filtros adaptados. En la figura 8.3 se puede ver el esquema del receptor empleando en este caso un correlador. Como se puede ver se aplica la señal recibida ruidosa $x(t)$ a un correlador al que se le aplica de forma coherente (en sincronismo de frecuencia y fase) la función base $\phi_1(t)$, para obtener después de integrar entre 0 y T_b el vector de señal observada \mathbf{x} que en este caso sólo tiene una componente x_1 . En la etapa de decisión se compara x_1 con el umbral de separación de las regiones de decisión, que es 0 en este caso: si $x_1 < 0$ se decide por el símbolo \emptyset en caso contrario por el símbolo 1.

Un esquema alternativo para el de la figura 8.3 es el de la figura 8.4 en el que se ha sustituido el correlador con $\phi_1(t)$ por un filtro adaptado a $\phi_1(t)$.

Para cualquiera de los dos receptores es necesario recuperar la portadora $\phi_1(t)$. Ésta se puede extraer de la señal $x(t)$ empleando un bucle de costas o un bucle cuadrático de forma similar a como se hacía para modulación DSB, sin embargo, vamos a tener una ambigüedad de 180° en la señal de salida, que referido a la señal binaria podría significar que los ceros están cambiados con los unos. Para solucionar esto se puede emplear la técnica de codificación diferencial en lugar de la binaria polar en la señal aplicada a la entrada del transmisor y decodificar la señal a la salida del receptor tras el decisor.

8.2 BFSK COHERENTE.

En FSK binario los símbolos 1 y \emptyset los vamos a representar mediante dos señales $s_1(t)$ y $s_2(t)$, respectivamente, mediante dos señales sinusoidales con frecuencias diferentes, f_1 y f_2 , pero fijas. Estas señales van a venir dadas por las ecuaciones (8.18) y (8.19), para $0 \leq t \leq T_b$, donde E_b es la energía transmitida por bit y las frecuencias f_i , con $i = 1, 2$ cumplen la ecuación (8.20), siendo n_c un entero positivo arbitrario.

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_1 t) \quad (8.18)$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_2 t) \quad (8.19)$$

$$f_i = \frac{n_c + i}{T_b} \quad \text{para } i = 1, 2 \quad (8.20)$$

$s_1(t)$ y $s_2(t)$ tiene frecuencia distinta por lo que son ortogonales. Además tienen la misma energía E_b . El espacio de señal en este caso tiene $N = 2$ dimensiones. Como tenemos dos señales $M = 2$. Tenemos $N = 2$ funciones base ortonormales en este caso: $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$. La forma más útil de las mismas es la dada por las ecuaciones (8.21) y (8.22).

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_1 t) \quad (8.21)$$

$$\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_2 t) \quad (8.22)$$

Los vectores de señal transmitidos se puede ver que van a venir dados por las ecuaciones (8.23) y (8.24). La distancia entre los símbolos viene dada por la ecuación (8.25).

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{E_b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{E_b} \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

$$\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\| = \sqrt{2E_b} \quad (8.25)$$

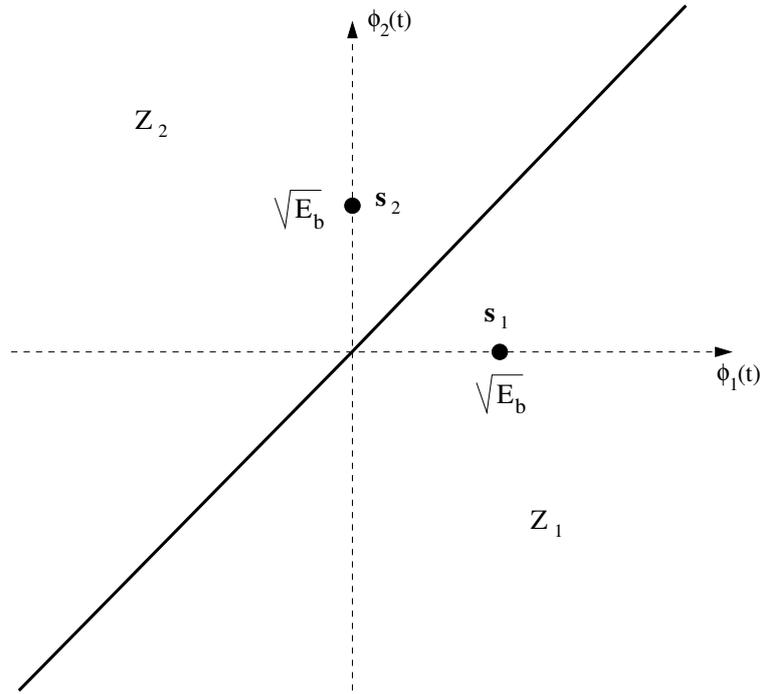


Figura 8.5 Regiones en las que queda dividido el espacio de señal para BFSK.

Si $x(t)$ es la señal recibida a la entrada del receptor, el vector de observación \mathbf{x} tendrá dos componentes y vendrá dado por la ecuación (8.26). Si se transmitió 1, la señal recibida es $x(t) = s_1(t) + w(t)$ y si se transmitió \emptyset , la señal recibida es $x(t) = s_2(t) + w(t)$, donde $w(t)$ es una muestra de un proceso Gaussiano, estacionario, blanco, con media cero y densidad espectral de potencia $N_0/2$.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^{T_b} x(t)\phi_1(t)dt \\ \int_0^{T_b} x(t)\phi_2(t)dt \end{bmatrix} \quad (8.26)$$

Si suponemos que los símbolos 1 y \emptyset son equiprobables, es decir, $p_1 = p_2 = 0,5$, podemos aplicar la regla de ML. Además, los dos símbolos tienen la misma energía E_b como hemos visto. Aplicando la regla ML el espacio de observación con $N = 2$ dimensiones va a quedar dividido en $M = 2$ regiones Z_1 y Z_2 según puede verse en la figura 8.5. Se decide que se transmitió 1 si el vector de observación \mathbf{x} cae en Z_1 , esto es, si $x_1 > x_2$; y se decide que se transmitió \emptyset si el vector de observación \mathbf{x} cae en Z_2 , esto es, si $x_1 < x_2$. La frontera de las dos regiones corresponde a un hiperplano con $N - 1 = 1$ dimensiones, que en este caso es la línea $x_1 = x_2$.

Vamos a definir una nueva variable aleatoria Y cuya muestra y va a venir dada por la ecuación (8.27).

$$y = x_1 - x_2 \quad (8.27)$$

Como las variables X_1 y X_2 eran Gaussianas, la variable Y también lo va a ser, ya que es una combinación lineal de las dos primeras. Para caracterizar una variable Gaussiana tenemos que calcular su media y su varianza. El valor medio de Y va a depender de si se transmitió 1 ó \emptyset . Si se transmitió 1, las variables X_1 y X_2 tienen media $\sqrt{E_b}$ y 0, respectivamente, por lo que en este caso se puede escribir la ecuación (8.28). Por otro lado, si se transmitió \emptyset , las variables X_1 y X_2 tienen media 0 y $\sqrt{E_b}$, respectivamente, por lo que en este caso se puede escribir la ecuación (8.29).

$$E[Y|1] = E[X_1 - X_2|1] = E[X_1|1] - E[X_2|1] = \sqrt{E_b} \quad (8.28)$$

$$E[Y|\emptyset] = E[X_1 - X_2|\emptyset] = E[X_1|\emptyset] - E[X_2|\emptyset] = -\sqrt{E_b} \quad (8.29)$$

Las variables X_1 y X_2 son independientes y tienen igual varianza, $N_0/2$, independientemente del símbolo transmitido, por lo que la varianza de la variable Y va a venir dada por la ecuación (8.30).

$$Var[Y] = Var[X_1 - X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] = N_0 \quad (8.30)$$

La función de verosimilitud cuando se transmitió \emptyset va a venir dada por (8.31).

$$f_{Y|\emptyset}(y|\emptyset) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \exp \left[-\frac{(y + \sqrt{E_b})^2}{2N_0} \right] \quad (8.31)$$

Cuando se transmitió \emptyset se cometerá error cuando el vector de observación \mathbf{x} caiga en la región Z_1 , o lo que es lo mismo, cuando $x_1 > x_2$. Se puede ver que esta condición corresponde a la condición $y > 0$, entonces la probabilidad de error cuando se transmitió \emptyset vendrá dada por la ecuación (8.32). Haciendo el cambio de variable de la ecuación (8.33), se llega finalmente al resultado de la ecuación (8.34).

$$P_{e\emptyset} = Prob(Y > 0 | \emptyset) = \int_0^\infty f_{Y|\emptyset}(y|\emptyset) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(x_1 + \sqrt{E_b})^2}{2N_0} \right] dx_1 \quad (8.32)$$

$$z = \frac{x_1 + \sqrt{E_b}}{\sqrt{2N_0}} \quad (8.33)$$

$$P_{e\emptyset} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{E_b}{2N_0}}^\infty \exp(-z^2) dz = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right) \quad (8.34)$$

Debido a que las regiones de decisión son simétricas, la probabilidad de error cuando se transmitió 1 toma el mismo valor que cuando se transmitió \emptyset . Además si los símbolos son equiprobables, las probabilidades *a priori* son iguales, $p_1 = p_2 = 0,5$, por lo que la probabilidad media de error P_e se puede escribir según la ecuación (8.35).

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right) \quad (8.35)$$

Comparándolo con BPSK, para mantener la misma probabilidad media de error, es necesario tener el doble de relación E_b/N_0 en BFSK que en BPSK. Esto es razonable comparando las figuras 8.1 y 8.5. En BPSK la distancia entre los símbolos es de $2\sqrt{E_b}$ mientras que en BFSK esta distancia es de $\sqrt{2E_b}$. Debido al factor $\sqrt{2}$ que diferencia la distancia entre los símbolos, es necesario duplicar la relación E_b/N_0

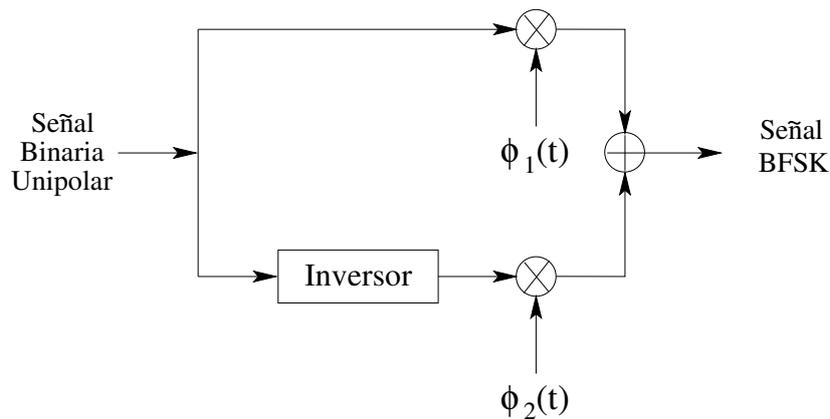


Figura 8.6 Esquema del transmisor de BFSK.

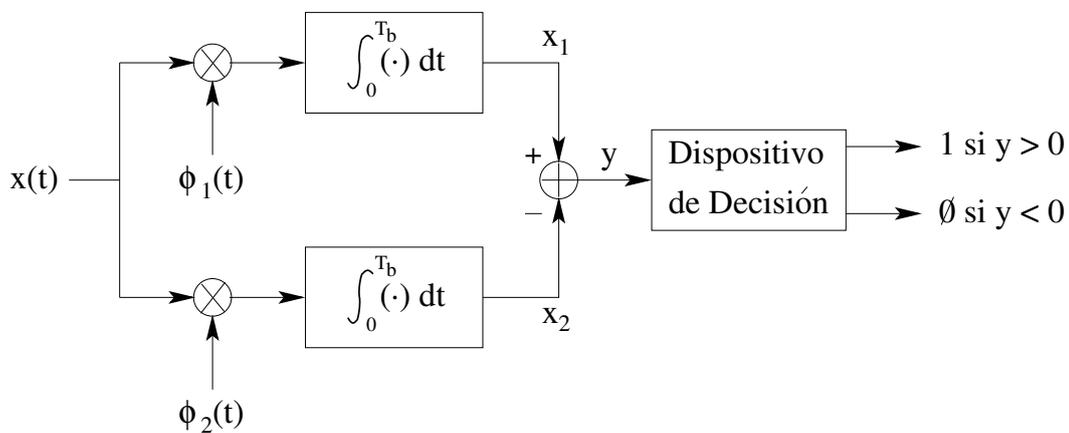


Figura 8.7 Esquema del receptor de BFSK empleando correladores.

para mantener la misma tasa de error. Esto se puede generalizar diciendo que en un canal AWGN con símbolos equiprobables e igual energía por bit E_b , la calidad del sistema sólo depende de la distancia entre las dos señales utilizadas para representar a los símbolos. Cuanto mayor sea dicha distancia menor será la probabilidad de error.

Para generar una señal BFSK se puede utilizar el esquema de la figura 8.6. La señal binaria de entrada se representa con un pulso constante de amplitud $\sqrt{E_b}$ y duración T_b para el símbolo 1 y nivel cero con duración T_b para el símbolo \emptyset , es decir, código binario unipolar. El inversor del canal inferior invierte la asignación representando con un pulso de amplitud $\sqrt{E_b}$ al \emptyset y nivel cero al 1. De esta forma cuando tenemos un 1, se transmite $\phi_1(t)$ y cuando tengamos \emptyset $\phi_2(t)$, pero con energía E_b . Según se deduce de la ecuación (8.20), las frecuencias f_1 y f_2 son múltiplos enteros de $1/T_b$.

En el transmisor de la figura 8.6 se supone que los generadores de las dos funciones base ortonormales $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ están sincronizados de forma que sus salidas satisfagan la condición de ortonormalidad. De forma alternativa se puede utilizar un único oscilador VCO conmutado. En ambos casos la señal va a tener fase continua, pero modificando su frecuencia siguiendo a la señal binaria de entrada. Es decir, la continuidad de fase se debe mantener siempre, incluidas las transiciones de bits. Este tipo de modulación se denomina **CPFSK** (Continuous Phase FSK).

Para recuperar la señal binaria original a partir de la señal recibida ruidosa $x(t)$ podemos emplear el receptor de la figura 8.7. Este esquema consiste en dos correladores con entrada común $x(t)$ a los que se aplican las dos funciones base ortonormales $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ generadas de forma localmente en el receptor de forma coherente. Las salidas de estos correladores serán las componentes, x_1 y x_2 , del vector de observación

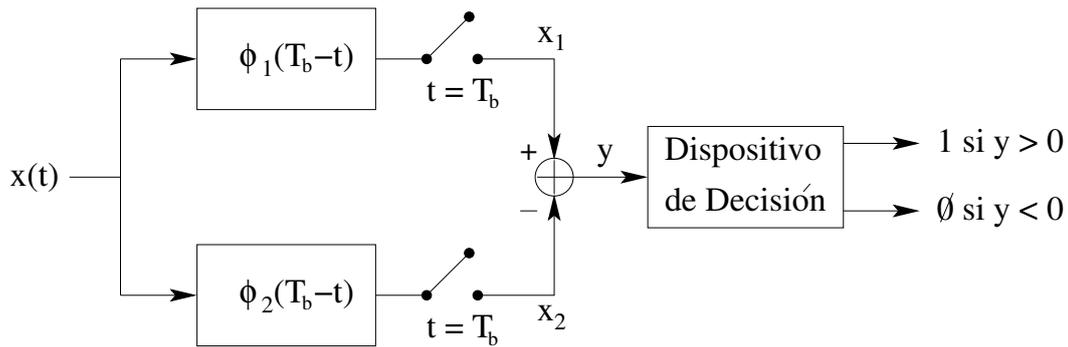


Figura 8.8 Esquema del receptor de BFSK empleando filtros adaptados.

x , que se restan para generar la variable y . En el decisor se compara y con el umbral de decisión cero, decidiéndose en favor del símbolo 1 siempre que $y > 0$ y en favor del símbolo \emptyset en otro caso.

Alternativamente, podemos emplear el esquema de la figura 8.8, en el que se han reemplazado los correladores por filtros adaptados a las funciones base ortonormales $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$. En ambos casos será importante que dichas funciones base generadas localmente en el receptor mantengan sincronismo tanto de frecuencia como de fase. En este caso, como la señal transmitida tiene componentes espectrales importantes a f_1 y f_2 , se van a poder extraer $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ aplicando a $x(t)$ dos filtros paso banda con ancho de banda lo menor posible, sintonizados a f_1 y f_2 , respectivamente.

8.3 PROPIEDADES ESPECTRALES DE BFSK Y BPSK.

Las señales BPSK y BFSK son paso banda, por lo que se van a poder expresar en términos de su envolvente compleja $\tilde{s}(t)$ según la ecuación (8.36), siendo $\hat{s}(t)$ la transformada de Hilbert de $s(t)$ y f_c la frecuencia central de la señal paso banda (frecuencia portadora).

$$\tilde{s}(t) = [s(t) + \hat{s}(t)] \exp(-j2\pi f_c t) \tag{8.36}$$

Basándonos en esta representación, se puede definir una densidad espectral de potencia banda base $S_B(f)$ de la señal paso banda $s(t)$ como la potencia de la envolvente compleja $\tilde{s}(t)$ como función de la frecuencia. La densidad espectral de potencia $S_S(f)$ de la señal paso banda $s(t)$ será, excepto por un factor de escala, una versión desplazada de la densidad espectral $S_B(f)$ según la ecuación (8.37).

$$S_S(f) = \frac{1}{4} [S_B(f - f_c) + S_B(f + f_c)] \tag{8.37}$$

Vamos a concentrarnos en evaluar la densidad espectral de potencia banda base, $S_B(f)$. Esta información será útil en el diseño del sistema, puesto que nos dará una estimación para el ancho de banda requerido y la interferencia con otros sistemas. Vamos a comenzar analizando la señal BPSK.

A partir del modulador de la figura 8.2, se puede ver que la envolvente compleja de una señal BPSK es real, puesto que la componente en cuadratura es cero. Además, dependiendo de si el símbolo transmitido es 1 ó \emptyset en el intervalo $0 \leq t \leq T_b$, se puede ver que la componente en fase toma el valor $g(t)$ ó $-g(t)$, respectivamente, donde $g(t)$ viene dado por la ecuación (8.38).

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (8.38)$$

Si suponemos que los símbolos de la señal binaria de entrada son equiprobables y que los símbolos en los diferentes intervalos temporales T_b estadísticamente independientes, la densidad espectral de potencia banda base $S_B(f)$ será igual a la densidad espectral de energía $\Psi_g(f)$ de $g(t)$ dividida entre T_b , es decir, se cumple la ecuación (8.39). Como se puede ver la densidad espectral $S_b(f)$ decae en frecuencia según $1/f^2$.

$$S_B(f) = \frac{\Psi_g(f)}{T_b} = 2E_b \text{sinc}^2(T_b f) = \frac{2E_b \sin^2(\pi f T_b)}{\pi^2 T_b^2 f^2} \quad (8.39)$$

Vamos a analizar ahora el caso BFSK. Supongamos que las frecuencias f_1 y f_2 que representan los símbolos 1 y \emptyset respectivamente, se diferencian entre sí $1/T_b$, según la ecuación (8.20) y que su media es la frecuencia de la portadora f_c . Supondremos que la señal es CPFSK, que tiene continuidad de fase incluso en los cambios de bit, en este caso la señal $s(t)$ se puede expresar según la ecuación (8.40), donde el signo menos representa al símbolo 1 y el signo menos al símbolo \emptyset .

$$s(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(2\pi f_c t \pm \frac{\pi t}{T_b}\right) & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (8.40)$$

Desarrollando el término coseno de la ecuación (8.40) se puede obtener la ecuación (8.41), en donde el signo más ahora representa al símbolo 1 y el signo menos al símbolo \emptyset .

$$s(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) \cos(2\pi f_c t) \mp \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) \sin(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (8.41)$$

Vamos a suponer que la señal binaria original es aleatoria, es decir, los símbolos son equiprobables y estadísticamente independientes. Se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. La componente en fase $s_c(t)$ es independiente de la señal binaria. Se puede poner la ecuación (8.42). La densidad espectral de potencia $S_{S_C}(f)$ de la componente en fase $s_c(t)$ vendrá dada por la ecuación (8.43)

$$s_c(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) \quad (8.42)$$

$$S_{S_C}(f) = \frac{E_b}{2T_b} \left[\delta\left(f - \frac{1}{2T_b}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2T_b}\right) \right] \quad (8.43)$$

2. La componente en cuadratura $s_s(t)$ está directamente relacionada con la señal binaria de entrada en el intervalo $0 \leq t \leq T_b$. Además, dependiendo de si el símbolo transmitido es 1 ó \emptyset en el intervalo $0 \leq t \leq T_b$, se puede ver que la componente en fase toma el valor $g(t)$ ó $-g(t)$, respectivamente, donde $g(t)$ viene dado por la ecuación (8.44).

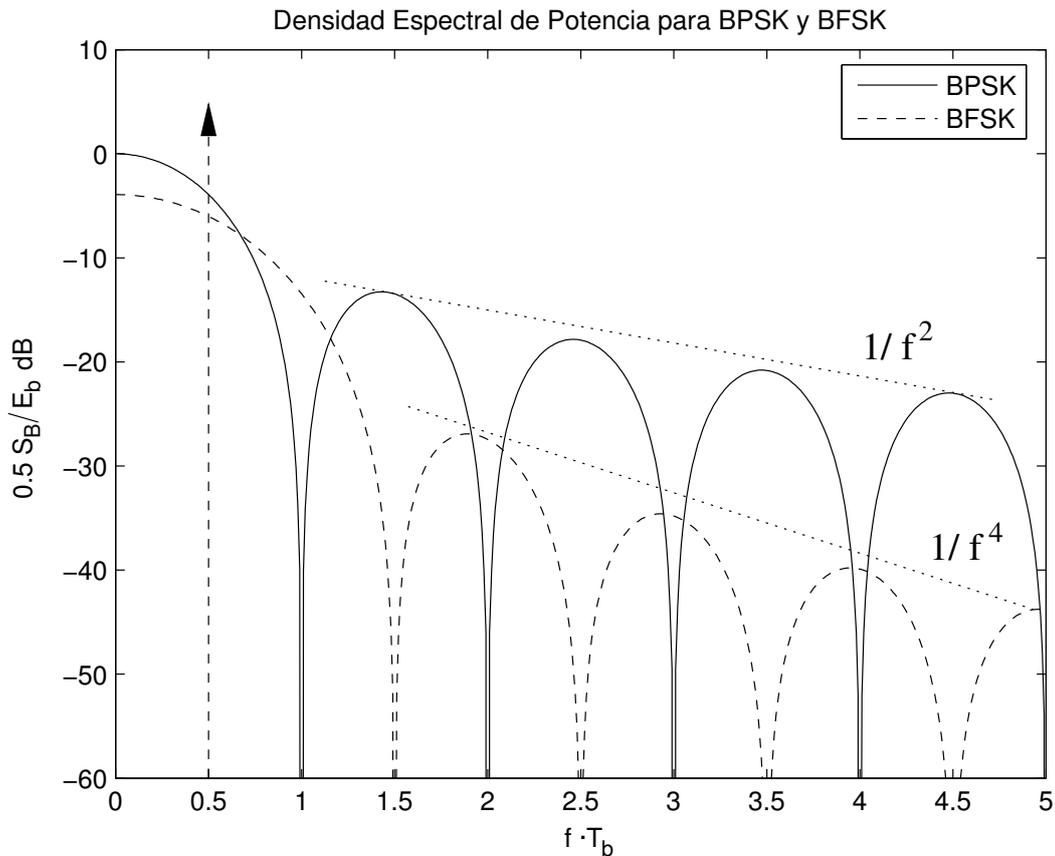


Figura 8.9 Densidades espectrales banda base para BPSK y BFSK fase continua.

$$g(t) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (8.44)$$

No es complicado ver que la densidad espectral de energía $\Psi_g(f)$ de la señal $g(t)$ dada por la ecuación (8.44) viene dada por la ecuación (8.45). Entonces la densidad espectral de potencia $S_{S_s}(f)$ de la componente en cuadratura $s_s(t)$ viene dada por la ecuación (8.46).

$$\Psi_g(f) = \frac{8E_b T_b \cos^2(\pi T_b f)}{\pi^2 (4T_b^2 f^2 - 1)^2} \quad (8.45)$$

$$S_{S_s}(f) = \frac{\Psi_g(f)}{T_b} = \frac{8E_b \cos^2(\pi T_b f)}{\pi^2 (4T_b^2 f^2 - 1)^2} \quad (8.46)$$

Se puede ver que las componentes en fase y cuadratura de la señal BFSK son estadísticamente independientes, por lo que la densidad espectral de potencia banda base $S_B(f)$ será la suma de las densidades espectrales de potencia de las componentes en fase y cuadratura, obteniéndose finalmente la ecuación (8.47).

$$S_B(f) = \frac{E_b}{2T_b} \left[\delta\left(f - \frac{1}{2T_b}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2T_b}\right) \right] + \frac{8E_b \cos^2(\pi T_b f)}{\pi^2 (4T_b^2 f^2 - 1)^2} \quad (8.47)$$

El espectro de la señal paso banda tiene deltas en las frecuencias $\pm f_1$ y $\pm f_2$ cuya potencia total es la mitad de la potencia de la señal BFSK. Estas deltas no llevan ningún tipo de información referida a la señal binaria a transmitir, pero van a permitir recuperar el sincronismo de portadora en el receptor.

La densidad espectral de potencia en el caso BFSK decae con la frecuencia según $1/f^4$. Si la señal BFSK tuviera discontinuidad de fase en los cambios de bit (debido por ejemplo a que los generadores a las frecuencias f_1 y f_2 fueran independientes), la densidad espectral de potencia pasaría a decaer según $1/f^2$ igual que en el caso BPSK. CPFSK no produce tanta interferencia fuera de banda como lo produce FSK con fase discontinua. Podríamos decir que tiene menor ancho de banda.

En la figura 8.9 podemos ver representadas las densidades espectrales banda base para BPSK y BFSK con fase continua dadas por las ecuaciones (8.39) y (8.47). La amplitud se ha representado en dB y se ha normalizado con respecto a $2E_b$ y la frecuencia se ha normalizado con respecto a $1/T_b$. Sólo se ha dibujado para frecuencias positivas, pero debido a que ambas densidades espectrales de potencia son pares, serían simétricas para frecuencias negativas. La diferencia de caídas en la densidad espectral de potencia depende de la forma del pulso $g(t)$. Cuanto más suave sea el pulso $g(t)$ más rápidamente cae la densidad espectral de potencia a cero. En CPFSK el pulso $g(t)$ es más suave de forma que los lóbulos secundarios son menores que en PSK.

TÉCNICAS DE SEÑALIZACIÓN M-ARIA.

Se utilizan M posibles señales $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$ durante cada intervalo de duración T . Para la mayoría de las aplicaciones M es una potencia de 2, es decir, $M = 2^n$, con n entero. La duración del símbolo será entonces $T = nT_b$, donde T_b es la duración de bit. Estas señales se generan modificando la amplitud, la frecuencia o la fase de una portadora de forma discreta (M valores). Tendremos MASK, de amplitud; MPSK, de fase; y MFSK, de frecuencia.

Los esquemas M -arios se utilizan cuando es necesario un ahorro del ancho de banda a costa de incrementar la potencia transmitida. En la práctica, casi ningún canal de comunicaciones tiene el ancho de banda necesario para emplear un sistema binario paso banda. Cuando el ancho de banda disponible es menor del necesario para el caso binario, se emplearán esquemas M -arios para tener mayor eficiencia en ancho de banda. Vamos a ver con más detalle los casos MPSK y MFSK.

9.1 MPSK COHERENTE.

En un sistema MPSK coherente la fase toma uno de entre M posibles valores θ_i según la ecuación (9.1). Durante el intervalo $0 \leq t \leq T$ las posibles señales $\{s_i(t)\}$ vienen dadas por la ecuación (9.2), donde E es la energía por símbolo y f_c es la frecuencia portadora dada por la ecuación (9.3), con n_c un número entero positivo arbitrario.

$$\theta_i = \frac{2i\pi}{M} \quad \text{para } 1 \leq i \leq M \quad (9.1)$$

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2i\pi}{M}\right) \quad (9.2)$$

$$f_c = \frac{n_c}{T} \quad (9.3)$$

Si la información a transmitir consiste en una secuencia binaria con duración de bit T_b , el ancho de banda necesario será proporcional a $1/T_b$. Si ahora se agrupan los bits de n en n para transmitir la información usando MPSK con $M = 2^n$ y $T = nT_b$, el ancho de banda necesario será proporcional a $1/T = 1/(nT_b)$, lo que significa que el ancho de banda necesario se ha reducido en un factor de n al pasar de BPSK a MPSK.

El receptor MPSK consistirá en un discriminador de fase cuya salida sea proporcional a la fase de la señal de entrada junto cierto ruido procedente del canal, medido durante un intervalo de duración T . Suponiendo que los símbolos sean equiprobables, el decisor usará la regla ML, que para este caso consistirá en lo

Número de Símbolos	Reducción Ancho Banda	Incremento Potencia Transmitida
4	0,5	0,34 dB
8	0,33	3,91 dB
16	0,25	8,52 dB
32	0,2	13,52 dB

Tabla 9.1 Comparación de BPSK y MPSK en lo que respecta a la reducción del ancho de banda y el incremento de potencia necesario para mantener probabilidad de error $P_e = 10^{-4}$.

siguiente: se decide que se transmitió el símbolo m_i cuando la fase de la señal detectada ruidosa pertenezca al intervalo $(\theta_i - \pi/M, \theta_i + \pi/M)$.

Suponiendo se mantenga constante la probabilidad de error $P_e = 10^{-4}$, en la tabla 9.1 se puede ver la reducción del ancho de banda y el incremento de potencia transmitida necesaria con respecto a BPSK para diferentes valores del número de símbolos M . Como se puede ver el mejor compromiso entre la reducción del ancho de banda y el incremento de potencia necesario para mantener la misma calidad se consigue para $M = 4$. 4PSK, también denominado QPSK (Quadrature PSK) se utiliza mucho en la práctica. Para $M = 8$ el incremento de potencia necesaria es excesivo y no compensa la reducción del ancho de banda por lo que no se utiliza mucho en la práctica. Además, los sistemas MPSK requieren un transmisor bastante más complicado que en el caso BPSK.

9.2 MFSK COHERENTE.

En este caso las señales MFSK vienen dadas por la ecuación (9.4), para el intervalo $0 \leq t \leq T$. Todas las M señales tienen energía E y puesto que las frecuencias están separadas $1/(2T)$, las señales son ortogonales. La frecuencia portadora sería la media aritmética de las M frecuencias que viene dada por la ecuación (9.5).

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \left[\frac{\pi}{T} \left(n_c + i - \frac{M+1}{2} \right) t \right] \quad (9.4)$$

$$f_c = \frac{n_c}{2T} \quad (9.5)$$

Un sistema MFSK así definido tiene las siguientes propiedades:

1. Para tasa binaria $1/T_b$ fija, densidad espectral de ruido $N_0/2$ fija y probabilidad de error P_e fija, incrementar M significa reducir la potencia de transmisión necesaria a costa de un incremento del ancho de banda de transmisión.
2. En el caso límite de que $M \rightarrow \infty$, la probabilidad de error satisface la ecuación (9.6), donde P es la potencia de señal a la entrada del receptor y T_b es la duración de bit.

$$P_e = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{1}{T_b} > \frac{P}{N_0} \log_2 e \\ 0 & \text{si } \frac{1}{T_b} < \frac{P}{N_0} \log_2 e \end{cases} \quad (9.6)$$

La condición dada por la ecuación (9.6) nos dice que la máxima tasa de transmisión a la que se puede transmitir sin error viene dada por la ecuación (9.7). Para lograr alcanzar esa tasa, es necesario que $M \rightarrow \infty$, con lo cual el ancho de banda sería también infinito, cosa que no es posible en la práctica.

$$\frac{1}{T_b} = \frac{P}{N_0} \log_2 e \quad (9.7)$$

La capacidad de un canal con ruido AWGN es $\frac{P}{N_0} \log_2 e$ cuando el ancho de banda es infinito, por lo que podemos decir que si la tasa binaria $1/T_b$ es menor que la capacidad del canal, la probabilidad de error se puede hacer arbitrariamente pequeña. Un sistema MFSK es capaz de transmitir datos hasta una tasa igual a la capacidad del canal con una probabilidad de error arbitrariamente pequeña.

DETECCIÓN DE SEÑALES CON FASE ALEATORIA EN PRESENCIA DE RUIDO.

En la práctica en las técnicas de transmisión de datos paso banda además de la incertidumbre debida al ruido aditivo a la entrada del receptor, existe otro tipo de incertidumbre añadida debido a la aleatoriedad de otro parámetro. La causa habitual de esto es la distorsión del medio de transmisión. El parámetro con mayor aleatoriedad es la fase, especialmente para señales de banda estrecha. Por ejemplo, la transmisión por una multiplicidad de caminos diferentes, con longitudes diferentes o retardos variando rápidamente en el medio de propagación del transmisor al receptor, harán que la fase de la señal recibida cambie de modo que el receptor no la pueda seguir. La sincronización de fase de la portadora transmitida será muy costoso y el diseñador puede simplemente elegir ignorar la información de fase de la señal recibida a expensas de algo de degradación de la calidad.

Consideremos un sistema de comunicaciones en el cual la señal transmitida venga dada por la ecuación (10.1), donde E es la energía de la señal, T es la duración del intervalo de símbolo y f_i la frecuencia que se supone es un múltiplo entero de $1/(2T)$.

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_i t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \quad (10.1)$$

Cuando no se pretende recuperar la fase para sincronizar el receptor con el transmisor, la señal recibida va a venir dada para un canal AGWN por la ecuación (10.2), donde $w(t)$ es una muestra de un proceso estocástico ruidoso estacionario, blanco, Gaussiano, con media cero y densidad espectral de potencia $N_0/2$.

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_i t + \theta) + w(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \quad (10.2)$$

La fase θ se desconoce y normalmente se la considera una muestra de una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $(0, 2\pi)$. Esto significa una pérdida de la información de fase. Un sistema de comunicaciones digitales así se denomina **no coherente**.

Los sistemas de detección presentados en los capítulos precedentes son inadecuados para sistemas no coherentes, puesto que para una señal de este tipo la salida sería función de la fase desconocida θ . Vamos a ver cuáles son las modificaciones necesarias para afrontar esta nueva situación.

La ecuación (10.2) se puede expandir desarrollando el término coseno obteniéndose la ecuación (10.3).

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\theta) \cos(2\pi f_i t) - \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin(\theta) \sin(2\pi f_i t) + w(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \quad (10.3)$$

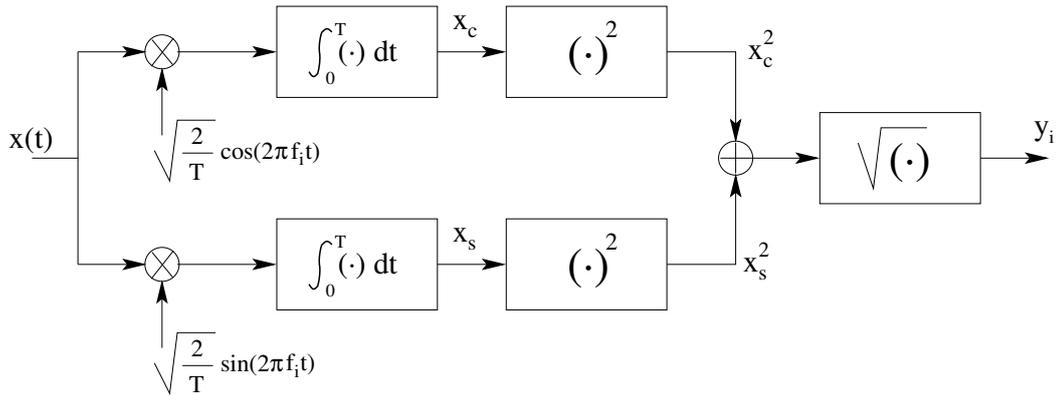


Figura 10.1 Detector en cuadratura no coherente que elimina la dependencia con respecto a la fase aleatoria θ en la señal a su salida.

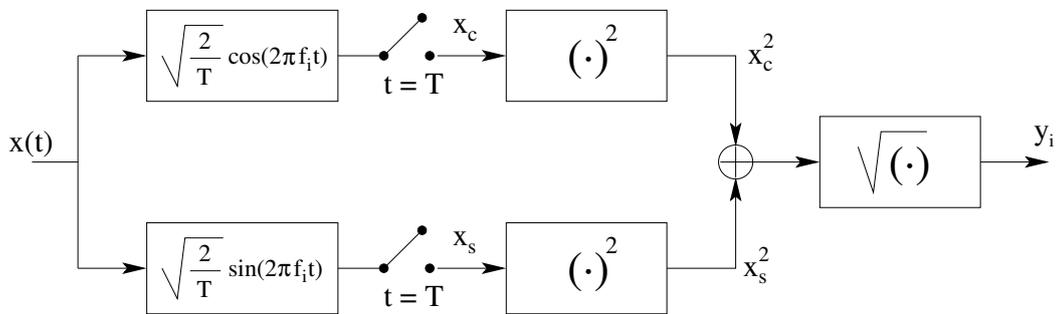


Figura 10.2 Detector en cuadratura no coherente alternativo que emplea filtros adaptados en lugar de correladores.

Vamos a suponer que tenemos dos correladores que multiplican la señal $x(t)$ dada por la ecuación (10.3) por las funciones base ortonormales de la ecuación (10.4).

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_i t) \\ &\sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_i t) \end{aligned} \tag{10.4}$$

En ausencia de ruido, la salida de los correladores de la ecuación (10.4) será, respectivamente, $\sqrt{E} \cos(\theta)$ y $-\sqrt{E} \sin(\theta)$, por lo que la dependencia con respecto a la fase θ se puede eliminar sumando los cuadrados de las salidas de los correladores y tomando la raíz cuadrada, obteniéndose, cuando el ruido es cero, \sqrt{E} como salida final, que no depende de la fase θ . Esto nos sugiere que para la detección de una señal sinusoidal con fase arbitraria y con ruido AGWN, se puede utilizar este método de detección denominado **detector en cuadratura**. De hecho este método dará lugar al receptor óptimo en el sentido de mínima probabilidad de error media. En la figura 10.1 se puede ver el esquema de este método de detección no coherente.

Vamos a ver otras formas equivalentes al receptor en cuadratura de la figura 10.1. La primer de estas formas consiste en reemplazar los correladores por filtros adaptados, obteniéndose el receptor en cuadratura alternativo de la figura 10.2.

Para obtener la tercera forma alternativa del receptor en cuadratura vamos a considerar una señal según la ecuación (10.5). La envolvente de la señal a la salida un filtro adaptado a dicha señal no va a estar afectada por el valor de θ .

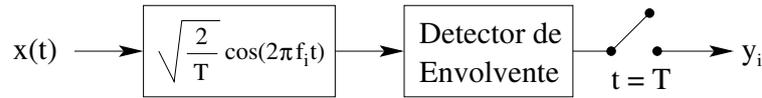


Figura 10.3 Tercera forma alternativa para el detector en cuadratura no coherente.

$$s(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_i t + \theta) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \quad (10.5)$$

Como no conocemos el valor de θ vamos a suponer que la respuesta al impulso del filtro adaptado viene dada por la ecuación (10.6).

$$h(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_i t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \quad (10.6)$$

La señal $v(t)$ a salida del filtro adaptado de la ecuación (10.6) para cuando la señal a la entrada es la señal ruidosa $x(t)$ a la entrada del receptor viene dada por el desarrollo de la ecuación (10.7).

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T x(\tau) \cos[2\pi f_i(t - \tau)] d\tau \\ &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_i t) \int_0^T x(\tau) \cos(2\pi f_i \tau) d\tau \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_i t) \int_0^T x(\tau) \sin(2\pi f_i \tau) d\tau \end{aligned} \quad (10.7)$$

La $y(t)$ envolvente de la señal $v(t)$ dada por la ecuación (10.7) viene dada por la ecuación (10.8), pero esta expresión es justamente la de que se obtendría para la salida de los detectores en cuadratura de las figuras 10.1 y 10.2. Por lo tanto el esquema de la figura 10.3 será la tercera forma alternativa del detector en cuadratura.

$$y(t) = \sqrt{\left[\int_0^T x(\tau) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_i \tau) d\tau \right]^2 + \left[\int_0^T x(\tau) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_i \tau) d\tau \right]^2} \quad (10.8)$$

La necesidad del detector de envolvente a la salida del filtro adaptado se puede justificar de la siguiente forma: la salida de un filtro adaptado a un pulso de radiofrecuencia alcanza su valor de pico en $t = T$, sin embargo, si la fase de la señal no está adaptada a la señal, dicho valor de pico ocurrirá en un instante distinto del de muestreo $t = T$. Si por ejemplo tuviéramos un desfase de π radianes, tendríamos un pico negativo en el instante de muestreo. Para evitar el problema de determinar el instante óptimo de muestreo, si nos quedamos con la envolvente de la señal a la salida del filtro adaptado, estaríamos evitando el problema de la fase, puesto que la envolvente no depende de la fase θ de la portadora.

DETECCIÓN NO COHERENTE DE BFSK.

Para ilustrar la teoría de detección no coherente que se explicó en el capítulo 10, vamos a analizar a continuación la detección no coherente de BFSK con ruido AWGN. Sin tener en cuenta la fase de la señal la implementación de BFSK es mucho más sencilla. Esta simplificación se logra a costa de una degradación en la calidad.

En BFSK tenemos dos símbolos 1 y \emptyset . El símbolo 1 se representa por la señal $s_1(t)$ y el símbolo \emptyset por una señal $s_2(t)$. Estas dos señales están dadas por la ecuación (11.1), donde f_1 y f_2 son dos frecuencias que deben estar separadas al menos $1/(2T_b)$ para que $s_1(t)$ y $s_2(t)$ sean ortogonales. E_b es la energía por bit y T_b la duración de bit.

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_i t) & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases} \quad (11.1)$$

En la figura 11.1 podemos ver el esquema del receptor en cuadratura no coherente empleando la tercera forma alternativa vista en el capítulo 10. El primer filtro está adaptado a la señal $\sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_1 t)$ y el segundo a $\sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_2 t)$. Las envolventes a la salidas de ambos filtros se muestrean para $t = T_b$, obteniéndose las variables y_1 e y_2 que sirven de entrada al decisor. El decisor decide que se transmitió el símbolo 1 cuando $y_1 > y_2$ y el símbolo \emptyset cuando $y_1 < y_2$.

Si se transmite el símbolo 1 y $y_1 > y_2$, la decisión será la correcta, pero si debido al ruido resulta que $y_1 < y_2$ se cometerá un error. Vamos a suponer que los símbolos son equiprobables de forma que se pueda aplicar la regla ML en el decisor. Debido a que los dos símbolos tienen igual energía, las regiones de decisión en el espacio de observación serán simétricas, por lo que las probabilidades de error condicionadas serán iguales. Nos bastará calcular la probabilidad de error cuando se transmitió el símbolo 1. Para ello vamos a determinar las de funciones densidad de probabilidad de las variables Y_1 e Y_2 cuyos valores muestrales son y_1 e y_2 , respectivamente.

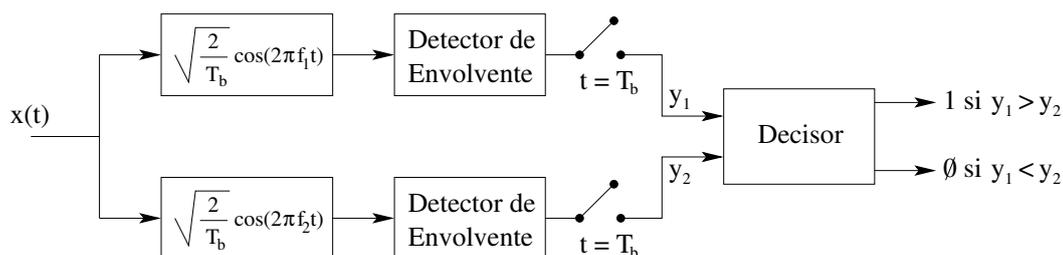


Figura 11.1 Receptor en cuadratura no coherente para BFSK.

Si suponemos que se transmitió el símbolo 1, eso significa que se transmitió la frecuencia f_1 . La señal recibida $x(t)$ a la entrada del receptor en ausencia de sincronismo de fase vendrá dada por la ecuación (11.2).

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_1 t + \theta) + w(t) \\ &= \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(\theta) \cos(2\pi f_1 t) - \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin(\theta) \sin(2\pi f_1 t) + w(t) \end{aligned} \quad (11.2)$$

Vamos a representar mediante x_{c_i} y x_{s_i} , dadas por las ecuaciones (11.3) y (11.4), para $i = 1, 2$, las coordenadas de la señal recibida $x(t)$.

$$x_{c_i} = \int_0^{T_b} x(t) \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_i t) dt \quad (11.3)$$

$$x_{s_i} = \int_0^{T_b} x(t) \sqrt{\frac{2}{T_b}} \sin(2\pi f_i t) dt \quad (11.4)$$

Aunque la señal transmitida $s_i(t)$ se puede representar mediante puntos de señal en un espacio de 2 dimensiones, la presencia de la incertidumbre de la fase θ en el receptor hace necesario utilizar $N = 4$ dimensiones y por tanto $N = 4$ funciones base ortonormales para representar a la señal recibida $x(t)$.

La señal y_1 tras el detector de envolvente del camino superior de la figura 11.1 viene dada por la ecuación (11.5), donde si se transmitió el símbolo 1, x_{c_1} y x_{s_1} vienen dados por las ecuaciones (11.6) y (11.7).

$$y_1 = \sqrt{x_{c_1}^2 + x_{s_1}^2} \quad (11.5)$$

$$x_{c_1} = \sqrt{E_b} \cos(\theta) + w_{c_1} \quad (11.6)$$

$$x_{s_1} = -\sqrt{E_b} \sin(\theta) + w_{s_1} \quad (11.7)$$

Por otro lado, la señal y_2 tras el detector de envolvente del camino inferior de la figura 11.1 viene dada por la ecuación (11.8), donde si se transmitió el símbolo 1, x_{c_2} y x_{s_2} vienen dados por las ecuaciones (11.9) y (11.10).

$$y_2 = \sqrt{x_{c_2}^2 + x_{s_2}^2} \quad (11.8)$$

$$x_{c_2} = w_{c_2} \quad (11.9)$$

$$x_{s_2} = w_{s_2} \quad (11.10)$$

Los términos w_{s_i} y w_{c_i} para $i = 1, 2$ son términos que dependen exclusivamente del ruido $w(t)$ según las ecuaciones (11.11) y (11.12). Estas variables de ruido son muestras de variables aleatorias Gaussianas, independientes, de media cero y varianza $N_0/2$.

$$w_{c_i} = \int_0^{T_b} w(t) \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_i t) dt \quad (11.11)$$

$$w_{s_i} = \int_0^{T_b} w(t) \sqrt{\frac{2}{T_b}} \sin(2\pi f_i t) dt \quad (11.12)$$

Cuando se transmitió el símbolo 1, las variables x_{c_2} y x_{s_2} son muestras de dos variables aleatorias X_{c_2} y X_{s_2} Gaussianas y estadísticamente independientes, con media cero y varianza $N_0/2$, por lo tanto, y_2 será una muestra de una variable aleatoria Y_2 con distribución Rayleigh. Podremos expresar la función de densidad de probabilidad de dicha variable Y_2 cuando se transmitió el símbolo 1 según la ecuación (11.13).

$$f_{Y_2|1}(y_2|1) = \frac{2y_2}{N_0} \exp\left(-\frac{y_2^2}{N_0}\right) u(y_2) \quad (11.13)$$

Si se transmitió el símbolo 1, x_{c_1} y x_{s_1} son dos muestras de dos variables aleatorias X_{c_1} y X_{s_1} Gaussianas y estadísticamente independientes, con medias $\sqrt{E_b} \cos(\theta)$ y $-\sqrt{E_b} \sin(\theta)$, respectivamente, y varianza N_0 . La función de densidad de probabilidad conjunta de las variables X_{c_1} y X_{s_1} suponiendo que se transmitió el símbolo 1 viene dada por la ecuación (11.14).

$$f_{X_{c_1}, X_{s_1}|1}(x_{c_1}, x_{s_1}|1) = \frac{1}{\pi N_0} \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \left[(x_{c_1} - \sqrt{E_b} \cos \theta)^2 + (x_{s_1} + \sqrt{E_b} \sin \theta)^2 \right]\right\} \quad (11.14)$$

La envolvente y_1 será una muestra de una variable aleatoria Y_1 con distribución Rician según la ecuación (11.15), donde $I_0(x)$ es la función de Bessel de primera clase y orden cero. Se puede comprobar que la dependencia con respecto a la fase θ ha desaparecido en la función de densidad de la envolvente.

$$f_{Y_1|1}(y_1|1) = \frac{2y_1}{N_0} u(y_1) \quad (11.15)$$

Si hacemos $E_b = 0$ en la ecuación (11.15) teniendo en cuenta que $I_0(0) = 1$ obtendríamos la distribución de Rayleigh similar a la de la ecuación (11.13).

Cuando se transmite 1 se comete error cuando ocurre que $y_1 < y_2$, por lo que la probabilidad de error P_{e1} se puede obtener integrando la función de densidad $f_{Y_2|1}(y_2|1)$ con respecto a y_2 desde y_1 hasta infinito y luego promediando en todos los valores de y_1 , esto es multiplicando por la función de densidad $f_{Y_1|1}(y_1|1)$ e integrando con respecto a y_1 de cero hasta infinito, es decir, se tiene la ecuación (11.16).

$$p_{e1} = Prob(y_2 > y_1 | 1) = \int_0^\infty f_{Y_1|1}(y_1|1) \int_{y_1}^\infty f_{Y_2|1}(y_2|1) dy_2 dy_1 \quad (11.16)$$

En la ecuación (11.16), la integral interior es la probabilidad condicional del error para un valor dado de y_1 suponiendo que se transmitió el símbolo 1 y la integral exterior es el promedio para todos los posibles valores de y_1 . La integral interior de la ecuación (11.16) se puede resolver según la ecuación (11.17).

$$\int_{y_1}^\infty f_{Y_2|1}(y_2|1) dy_2 = \frac{2}{N_0} \int_{y_1}^\infty y_2 \exp\left(-\frac{y_2^2}{N_0}\right) dy_2 = \left[-\exp\left(-\frac{y_2^2}{N_0}\right)\right]_{y_1}^\infty = \exp\left(-\frac{y_1^2}{N_0}\right) \quad (11.17)$$

Sustituyendo el resultado de la ecuación (11.17) en la ecuación (11.16) se obtiene la ecuación (11.18).

$$p_{e1} = \frac{2}{N_0} \int_0^\infty y_1 \exp\left(-\frac{2y_1^2 + E_b}{N_0}\right) I_0\left(\frac{2y_1\sqrt{E_b}}{N_0}\right) dy_1 \quad (11.18)$$

Haciendo en la ecuación (11.18) los cambios de variable dados por las ecuaciones (11.19) y (11.20), se puede poner la ecuación (11.21).

$$v = \frac{2y_1}{\sqrt{N_0}} \quad (11.19)$$

$$a = \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \quad (11.20)$$

$$p_{e1} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right) \int_0^\infty v \exp\left(-\frac{v^2 + a^2}{2}\right) I_0(av) dv \quad (11.21)$$

La integral de la derecha de la ecuación (11.21) representa el área debajo de la curva de la función de densidad de probabilidad Rician normalizada, por lo que el área es unidad. Se obtiene finalmente para la probabilidad de error P_{e1} cuando se transmitió el símbolo 1 la ecuación (11.22).

$$p_{e1} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right) \quad (11.22)$$

De igual forma se podría repetir todo lo anterior para cuando se transmitió el símbolo \emptyset , pero por simetría sabemos que se obtendría la misma probabilidad. Además se ha supuesto que los símbolos son equiprobables, la probabilidad media de error P_e viene dada finalmente por la ecuación (11.23).

$$p_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right) \quad (11.23)$$

COMPARACIÓN DE CALIDAD DE LOS SISTEMAS VISTOS.

En la figura 12.1 podemos ver una comparación de la probabilidad de error media P_e como función de la relación entre la energía por bit E_b y la densidad espectral de potencia de ruido N_0 , relación E_b/N_0 , en dB, para los sistemas binarios vistos en los capítulos precedentes: BPSK coherente, BFSK coherente y BFSK no coherente. Las expresiones para la probabilidad de error media P_e para dichos sistemas venía dada respectivamente por las ecuaciones (8.17), (8.35) y (11.23).

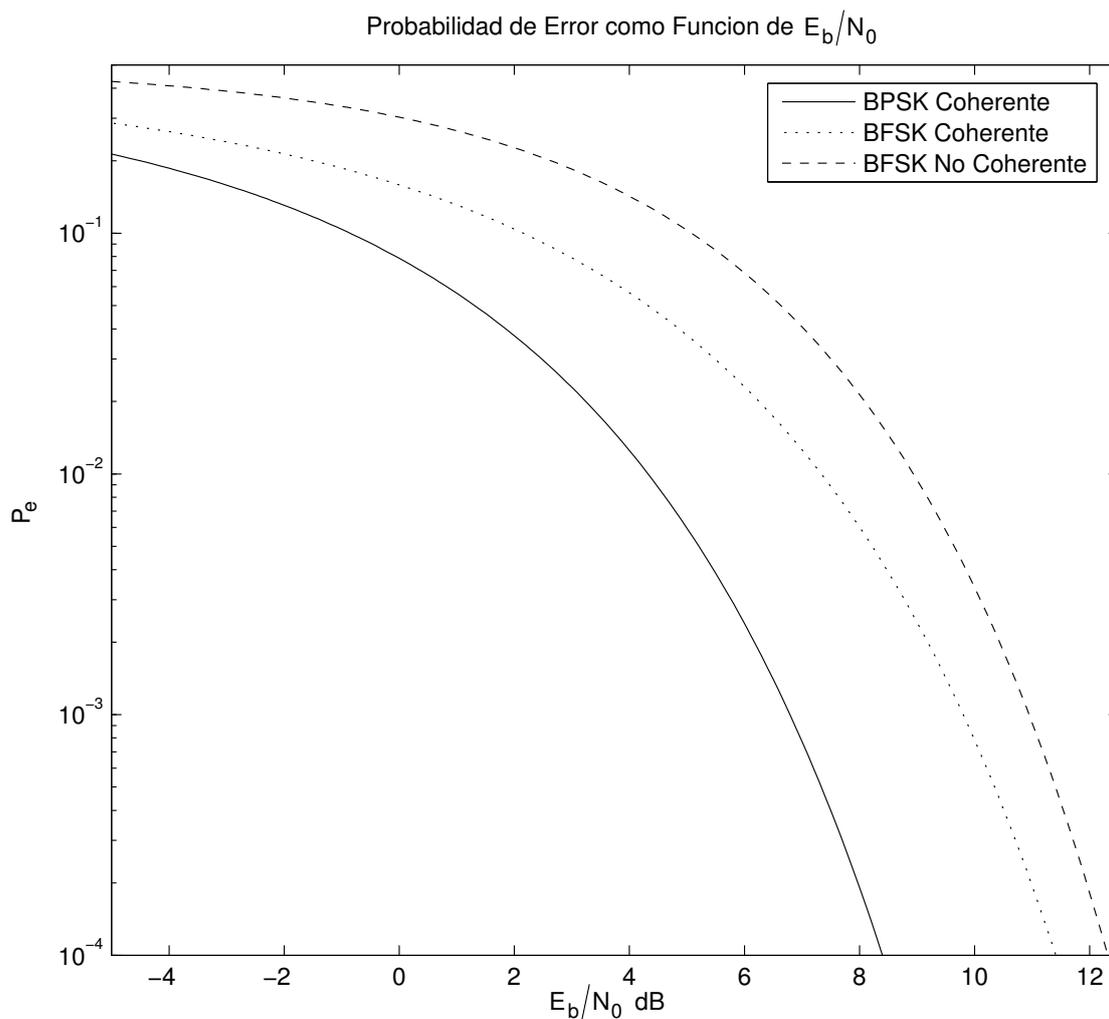


Figura 12.1 Comparación de la probabilidad de error media para BPSK coherente, BFSK coherente y BFSK no coherente como función de E_b/N_0 .

Como se puede ver en la figura 12.1, BPSK es 3 dB mejor que BFSK debido fundamentalmente a que puntos de señal transmitida están más separados en el espacio de señal para BPSK que para BFSK en iguales condiciones de energía por bit E_b . Para relación E_b/N_0 grande se puede ver que BFSK coherente y BFSK no coherente son bastante parecidos puesto que sólo están separados en torno a 1 dB. Finalmente, podemos ver que todas las curvas decrecen muy rápidamente según E_b/N_0 crece, con lo cual se puede considerar que un sistema que garantice cierto valor de E_b/N_0 a la entrada del receptor será prácticamente inmune frente al ruido, puesto que su probabilidad de error será arbitrariamente pequeña.